

# 超高斯谱函数及其时-频局域化特征

袁 晓<sup>1,2,3</sup>, 虞厥邦<sup>2</sup>, 陈向东<sup>4</sup>, 杨家德<sup>5</sup>

(1. 四川大学电子信息学院, 成都 610064; 2. 电子科技大学光电系, 成都 610054; 3. 空军工程大学工程学院, 西安 710038;  
4. 电子科技大学传感技术工程四川省重点实验室, 成都 610054; 5. 重庆光电技术研究所, 重庆 400060)

**摘 要:** 首先在频域定义第一类、第二类超高斯谱函数并推导出其时域解析表达式, 然后引用时间算子和频率算子分析两类超高斯谱函数的时间局域化、频域局域化和时-频局域化特征. 研究表明: 时间算子和频率算子对于时-频分析是两个很有用的数学工具, 超高斯谱函数的基本性质十分有利于构造规范正交尺度和子波; 超高斯谱函数的带宽主要取决于形状因子, 时宽主要取决于超高斯谱的阶数, 而时-频局域化特征仅与阶数有关.

**关键词:** 超高斯谱函数; 子波构造; 时间算子和频率算子; 时-频局域化; Gamma 函数

**中图分类号:** TN941 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 01-0080-04

## Super-Gaussian Spectrum Functions and Their Time-Frequency Localization Characteristics

YUAN Xiao<sup>1,2,3</sup>, YU Jue-bang<sup>2</sup>, CHENG Xiang-dong<sup>4</sup>, YANG Jia-de<sup>5</sup>

(1. College of Electronic Information, Sichuan Univ., Chengdu 610064, China; 2. Dept. of Optoelectronic Tech, UESTC, Chengdu 610054, China;  
3. The Eng. Institute, AFEU, Xi'an 710038, China; 4. Inst. of Information Matrial Eng., UESTC, Chengdu 610054, China;  
5. Chongqing Optoelectronic Research Inst., Chongqing 400060, China)

**Abstract:** Class one and class two super-Gaussian spectrum functions are defined firstly in frequency domain, and then their explicit analytic expressions in time domain are deduced. Time operator and frequency operator are introduced to analyse the time, frequency and time-frequency localization characteristics of the aforementioned two new class of functions. Theoretical analysis and results of numerical simulations show that: i) Time operator and frequency operator are very useful mathematical tool for time-frequency analysis; ii) The basic properties of super-Gaussian spectrum functions are useful in constructing orthonormal and almost orthonormal scaling functions and wavelets; iii) The bandwidth of super-Gaussian spectrum functions is decided mainly by their shape factor; the time width of super-Gaussian spectrum functions is controlled chiefly their order; time-frequency localization characteristics of super-Gaussian spectrum functions depend only on their order.

**Key words:** super-Gaussian spectrum function; construction of wavelet; time operator and frequency operator; time-frequency localization; Gamma function

### 1 引言

高斯函数  $g(t)$  的 Fourier 变换  $\mathcal{G}(\omega)$  仍然是高斯函数  $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{1}{2}(t)^2) \Leftrightarrow \mathcal{G}(\omega) = \exp(-\frac{1}{2}(\omega)^2)$  (本文称  $\mathcal{G}(\omega)$  为高斯谱函数). 高斯函数在信号分析和处理中具有许多独特性能, 比如在“测不准原理”中, 不可能求得一个具有小于或等于高斯函数作为窗函数的时-频面积, 在这种意义下, 高斯函数是时-频局域化的“最优”窗函数<sup>[1,2]</sup>; 在计算机视觉和子波构造方面, 高斯函数也表现不俗, 但基于高斯函数构造的子波往往难以满足正交条件<sup>[3]</sup>. 文[4~7]中减弱“最优”窗限制, 将高斯谱推广到超高斯谱情形, 用于子波构造, 得到许许多多正交和几乎正交的尺度函数和母波(即基子

波)函数, 并且基于超高斯谱函数构造的子波为研究和评价各种经典子波性能提供了一种可比照的工具和标准<sup>[7]</sup>, 因此深入探讨超高斯谱函数的基本性质, 特别是其时-频局域化特征是十分必要的.

### 2 超高斯谱函数

**定义 1** 第一类超高斯谱函数

$$g_1^m(\omega) := \exp\left[-\frac{1}{m} \left| \omega \right|^m\right], m \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

式中  $m$  称为超高斯谱函数的阶数(当然它可以是非正整数), 称为形状因子. 对应的时域函数  $g_1^m(t)$  称为第一类超高斯谱(时域)尺度函数.

**定义 2** 第二类超高斯谱函数

收稿日期: 1999-09-05; 修回日期: 1999-12-11

基金项目: 国防科技重点实验室基金试点项目(2000JS11.4.3.D20213); 成都电子科技大学抗干扰通信重点实验室基金(No. IDZ0207)

$$2g^m(\cdot) := \exp\left[-\left|\cdot\right|^m\right], \quad \cdot, m \in \mathbb{R}^+ \quad (2)$$

式中  $\cdot$  是独立于形状因子和阶数  $m$  的参变量. 对应的时域函数  $2g^m(t)$  称为第二类超高斯谱(时域)尺度函数,

对于阶数  $m \geq 1$  来说,  $1g^m(\cdot)$  和  $2g^m(\cdot)$  是速降的, 当  $m = 1$  时, 对应双边指数谱; 当  $m = 2$  时, 对应高斯谱; 当  $m \rightarrow \infty$  时, 对应矩形谱, 即有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 1g^m(\cdot) = \lim_{m \rightarrow \infty} 2g^m(\cdot) = \text{rect}\left(\frac{\cdot}{2}\right) \Leftrightarrow \sin c\left(\frac{\cdot}{2}\right) \quad (3)$$

故当  $m$  不是很大时, 对应的时域尺度  $1g^m(t)$  和  $2g^m(t)$  波形也是速降的. 这说明随着阶数  $m$  的增大, 超高斯谱函数的频率局域化特征越来越好, 而时间局域化特征越来越有差.

**定理 1** 超高斯谱函数对应的时域(即 Fourier 反变换)尺度函数为

$$1g^m(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(1 + \frac{2k+1}{m}\right) \left(m^{1/m} t\right)^{2k+1} \quad (4)$$

$$2g^m(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(1 + \frac{2k+1}{m}\right) \left(-1/m t\right)^{2k+1} \quad (5)$$

式中  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数.

**证明:**  $2g^m(\cdot) = 2g^m(\cdot)$ ,  $\cos(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\cdot)^{2k}$

$$\begin{aligned} 2g^m(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2g^m(\cdot) e^{j t d} d = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\left(\cdot\right)^m} \cos(\cdot t) d \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} \int_0^{\infty} e^{-\left(\cdot\right)^m} \cdot^{2k} d \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(-1/m t\right)^{2k} \frac{1}{m} \left(\frac{2k+1}{m}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(-1/m t\right)^{2k} \frac{2k+1}{(2k+1)m} \left(\frac{2k+1}{m}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(1 + \frac{2k+1}{m}\right) \left(-1/m t\right)^{2k+1} \end{aligned}$$

将  $\cdot = 1/m$  代入上式, 式(4)也得证.

**定理 2** 超高斯谱的积分面积和能量是有限的, 即

$$1g^m(\cdot), 2g^m(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}) \cap UL^2(\mathbb{R}) \quad (6)$$

且有

$$S_1(\cdot, m) = \int_{-\infty}^{\infty} 1g^m(\cdot) d = 2 m^{1/m} (1 + 1/m) \quad (7)$$

$$S_2(\cdot, m) = \int_{-\infty}^{\infty} 2g^m(\cdot) d = 2 \cdot^{-1/m} (1 + 1/m) \quad (8)$$

$$E_1(\cdot, m) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |1g^m(\cdot)|^2 d = \frac{1}{2} (m/2)^{1/m} (1 + 1/m) \quad (9)$$

$$E_2(\cdot, m) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |2g^m(\cdot)|^2 d = \frac{1}{2} (2)^{-1/m} (1 + 1/m) \quad (10)$$

**证明:**  $\int_0^{\infty} e^{-x^m} dx = \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m}\right)$ ,

$$S_1(\cdot, m) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left|\cdot\right|^m\right] d$$

$$\int_0^{\infty} x^{(1/m)-1} e^{-x} dx = 2 m^{1/m} (1 + \frac{1}{m})$$

同理可证式(8~10).

当  $0 < m < \infty$  时,  $1 \leq (1 + 1/m) < \infty$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} m^{1/m} = 1$ ,  $\lim_{m \rightarrow 0} m^{1/m} = 0$ . 对于有限的  $\cdot$  (在子波构造中通常取  $\cdot = 1$ ), 由式(7)和(9)必有

$$0 < S_1(\cdot, m) < \infty; 0 < E_1(\cdot, m) < \infty$$

且

$$\lim_{m \rightarrow 0} S_1(\cdot, m) = 0; \lim_{m \rightarrow \infty} S_1(\cdot, m) = 2$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} E_1(\cdot, m) = 0; \lim_{m \rightarrow \infty} E_1(\cdot, m) = 1$$

对于  $0 < \cdot < 1$  (在子波构造中取  $\cdot = 1$ ),  $\lim_{m \rightarrow 0} \cdot^{-1/m} = 1$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \cdot^{-1/m} = 0$ , 则由式(8)和(10)必有

$$0 < S_2(\cdot, m) < \infty; 0 < E_2(\cdot, m) < \infty$$

且

$$\lim_{m \rightarrow 0} S_2(\cdot, m) = \infty; \lim_{m \rightarrow \infty} S_2(\cdot, m) = 2$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} E_2(\cdot, m) = \infty; \lim_{m \rightarrow \infty} E_2(\cdot, m) = 1$$

从而式(6)得证.

超高斯谱函数的积分面积和能量曲线如图 1 所示.

显然, 两类超高斯谱尺度  $1g^m(t)$  和  $2g^m(t)$  时域波形积分面积恒为 1, 而其时域能量等于其频域能量  $E_1$  和  $E_2$ ; 从图 1 看出, 当  $m > 1$ ,  $\cdot = 1$  和  $\cdot = 0$  时,  $E_2 > 1$ , 这些条件对于构造规范正交尺度和子波是十分有利的.

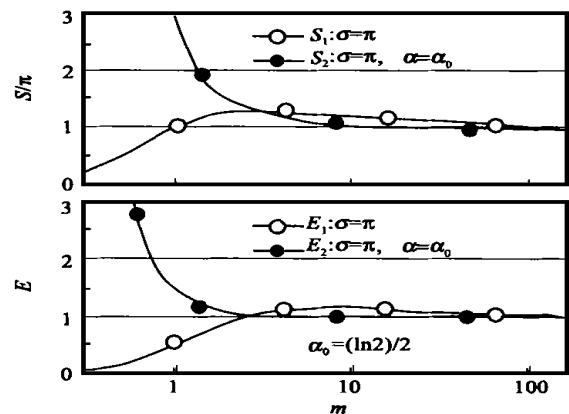


图 1 超高斯谱函数的积分面积和能量曲线

### 3 频率算子和时间算子

为了在时域计算频率函数和在频域计算时间函数, 人们引进了频率算子  $W$  和时间算子  $T^{[2]}$ :

$$W = -j \frac{d}{dt}; T = j \frac{d}{d}$$

理所当然,  $W$  和  $T$  可以重复使用, 用符号  $W^n$  和  $T^n$  表示, 也就是

$$W^n s(t) = (-j)^n \frac{d^n}{dt^n} s(t); T^n S(\cdot) = j^n \frac{d^n}{d^n} S(\cdot)$$

这两个算子均为埃米特 (Hermitian) 算子, 即对于任何两

个信号  $s_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$  和  $s_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$ , 有

$$\begin{cases} \int_R s_1^*(t) W_{S_2}(t) dt = \int_R s_2(t) \{W_{S_1}(t)\}^* dt \\ \int_R S_1^*(\omega) T_{S_2}(\omega) d\omega = \int_R S_2(\omega) \{T_{S_1}(\omega)\}^* d\omega \end{cases} \quad (11)$$

用部分积分上述两个方程很容易证明.

**定理 3<sup>[2]</sup>** 设  $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ , 则对任意一实函数  $g \in L^1(\mathbb{R})$  有

$$g(\omega) = \int_R g(t) |S(\omega)|^2 d\omega = \int_R s^*(t) g(W) s(t) dt \quad (12)$$

$$g(t) = \int_R g(\omega) |s(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2} \int_R S^*(\omega) g(T) S(\omega) d\omega \quad (13)$$

使用时间算子和频率算子可以极大地简化我们的计算, 而且对研究和理解时-频局域化有着重要意义.

### 4 超高斯谱函数的时-频局域化特征

为了刻画一个非平凡函数  $g(t)$  的局域化特征, 需要研究  $|g(t)|^2$  和  $|G(\omega)|^2$ , 通常用它们的标准偏差来表征  $g$  的时-频局域化特征.

**定义 3** 函数  $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$  的时宽  $T$  和带宽  $B$  分别定义为<sup>[2]</sup>

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle)^2 |g(t)|^2 dt / \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \langle \omega \rangle)^2 |G(\omega)|^2 d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

(当然也可定义为<sup>[1]</sup>  $T = 2 \sigma_t, B = 2 \sigma_\omega$ .)

**定理 4** 对于第一、第二类超高斯谱函数, 其时宽、带宽分别为

$$T_1 = \frac{m}{2} \left( \frac{2}{m} \right)^{1/m} \left[ \left( 2 - \frac{1}{m} \right) / \left( \frac{1}{m} \right) \right]^{1/2}, m > 1/2 \quad (14)$$

$$T_2 = \frac{m}{2} (2)^{1/m} \left[ \left( 2 - \frac{1}{m} \right) / \left( \frac{1}{m} \right) \right]^{1/2}, m > 1/2 \quad (15)$$

$$B_1 = \left( \frac{m}{2} \right)^{1/m} \left[ \left( \frac{3}{m} \right) / \left( \frac{1}{m} \right) \right]^{1/2} \quad (16)$$

$$B_2 = \frac{m}{(2)^{1/m}} \left[ \left( \frac{3}{m} \right) / \left( \frac{1}{m} \right) \right]^{1/2} \quad (17)$$

**证明:** 因为  $|g^m(t)|$  和  $|G^m(\omega)|$  均为偶函数, 它们的中心均在原点, 因而  $\langle t \rangle = 0, \langle \omega \rangle = 0$ , 故有

$$T_1 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |g^m(t)|^2 / |g^m(t)|^2 dt \quad (18)$$

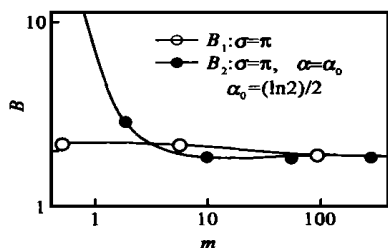


图 2 带宽  $B$  曲线

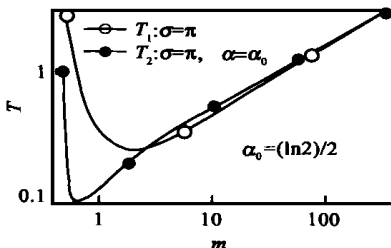


图 3 时宽  $T$  曲线

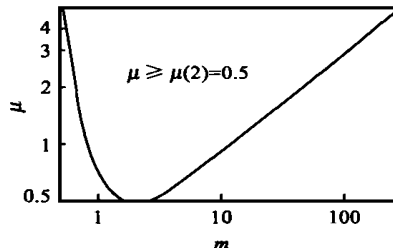


图 4 时-频局域化特征  $\mu$  曲线

$$B_1 = \left[ \int_R |g^m(\omega)|^2 / |g^m(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} \quad (19)$$

直接在时域计算式(18)是十分复杂的, 因为除  $m=1, m=2$  和  $m \rightarrow \infty$  以外,  $|g^m(t)|$  是一个无穷级数之和, 不可能得到简明的解析表达式.

应用定理 3 和时间算子  $T$  的埃米特性质有

$$\begin{aligned} \int_R |g^m(t)|^2 dt &= \frac{1}{2} \int_R \{g^m(t)\}^* T T_1 g^m(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_R \{T_1 g^m(t)\} \{T_1 g^m(t)\}^* dt \\ &= \frac{1}{2} \int_R \left| \frac{d}{d\omega} g^m(\omega) \right|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_R \left( \frac{m-1}{m} \right)^2 e^{-\frac{2}{m}|\omega|^m} d\omega \\ &= \frac{1}{2m} \int_0^{\infty} 2^{m-2} e^{-\frac{2}{m}\omega^m} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(m)}{2} \left( \frac{2}{m} \right)^{1/m} \left( 2 - \frac{1}{m} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

再由 Parseval 定理得

$$\int_R |g^m(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G^m(\omega)|^2 d\omega = \left( \frac{m}{2} \right)^{1/m} \frac{1}{m} \left( \frac{1}{m} \right) \quad (21)$$

将上两式代入式(18)即得

$$\begin{aligned} T_1 &= \left[ \int_R \left| \frac{d}{d\omega} g^m(\omega) \right|^2 d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} |G^m(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2} \\ &= \frac{m}{2} \left( \frac{2}{m} \right)^{1/m} \left[ \left( 2 - \frac{1}{m} \right) / \left( \frac{1}{m} \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (22)$$

式(14)即得证.

$$\text{将式(21)和} \int_R |g^m(t)|^2 dt = \frac{2}{m} \left( \frac{m}{2} \right)^{1/m} \left( \frac{3}{m} \right)$$

代入式(19), 式(16)得证.

同理可证式(15)和式(17).

由定理 4 知: 当  $m=1/2$  时,  $T_1 = T_2, B_1 = B_2$ .

取  $\mu = \frac{B_1 T_1}{2} = \frac{m}{2} = 0 = (\ln 2)/2$  时, 两类超高斯谱函数的带宽和时宽曲线分别如图 2 和图 3 所示. 从图看出: 当  $m \geq 1/2$  时, 第一类超高斯谱函数的时间局域化特征略微优于第二类超高斯谱函数, 而第二类超高斯谱函数的频率局域化特征好于第一类超高斯谱函数.

分析定理 4, 我们惊奇地发现, 有如下重要结论:

**定理 5** 对于(第一类、第二类)超高斯谱尺度函数, 其阶数  $m$  必须满足  $m > 1/2$  (23)

这是式(14)和式(15)成立的必要条件,因为 Gamma 函数  $\Gamma(x)$  的自变量必须满足<sup>[8]</sup>:  $x > 0$ .

窗函数  $g(t)$  的时宽  $T$  和带宽  $B$  在时-频相空间确定了一个分析单元,其面积的大小完全刻画了该窗函数的时-频局域化特征  $\mu := BT^{-1/2}$ .

由定理 4 立即有如下推论.

**推论 1** 两类超高斯谱函数具有相同的时-频局域化特征  $\mu$  且仅与阶数  $m$  有关,而与其它参变量无关

$$\mu = \mu(m) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{3}{m} \right) \left( 2 - \frac{1}{m} \right) \right]^{1/2} / \left( 1 + \frac{1}{m} \right), \quad m > 1/2 \quad (24)$$

超高斯谱函数的时-频局域化特征曲线如图 4 所示. 从该图看出:

$$\mu \geq \mu(2) = 1/2 \quad (25)$$

比较分析图 2、图 3 和图 4 得出,超高斯谱函数的时-频局域化特征  $\mu$  主要取决于其时间局域化特征  $T$ .

## 5 结束语

超高斯谱函数及其对应的时域尺度函数均具有简明的解析表达式,它们的能量  $E = 1$ ,而时域积分面积恒等于 1,这些特性对于构造规范正交尺度和子波是十分有利的.

当  $m \geq 1$  时,第一类和第二类超高斯谱函数的基本特性几乎相同,当  $m < 1$  时,两类谱函数产生了显著差异;当  $m \geq 1$  时,第一类超高斯函数的时间局域化特征略微优于第二类超高斯谱函数,而第二类超高斯谱函数的频率局域化特征好于第一类超高斯谱函数.

超高斯谱函数的带宽  $B$  主要取决于形状因子,时宽  $T$  主要取决于超高斯谱的阶数  $m$ ,而其时-频局域化特征  $\mu$  仅与阶数  $m$  有关,与参变量和形状因子无关:  $\mu = \mu(m)$ .

时间算子  $T$  和频率算子  $W$  对于时-频分析是两个很有用的数学工具,使用时间算子极大地简化了我们对超高斯谱函数的时间局域化特征和时-频局域化特征的解析分析和快速计算. 这些结果对于基于超高斯谱函数的尺度和子波构造具有重要的指导意义.

## 参考文献:

- [ 1 ] 崔锦泰著,程正兴译. 小波分析导论 [M]. 西安交通大学出版社,1995.  
 [ 2 ] 科恩著,白居宪译. 时频-分析:理论与应用 [M]. 西安交大出版社,1998.

- [ 3 ] 袁晓,刘光远,虞厥邦. Bubble 小波的构造及其性质研究 [A]. 1997 年中国神经计算科学大会论文集(二) [C]. 南京:1997:76 - 79.  
 [ 4 ] 袁晓,虞厥邦. Bubble 小波的正交条件研究 [J]. 电子科技大学学报,1998,27(1):25 - 28.  
 [ 5 ] 袁晓. 子波算法、构造、解析子波变换及其在信号处理中的应用 [D]. 博士学位论文,成都:电子科技大学,1998.  
 [ 6 ] 袁晓. 一类新的复解析子波构造及其性质研究 [J]. 电子学报,2000,28(4):123 - 126.  
 [ 7 ] 袁晓. 超高斯谱函数与子波构造 [J]. 信号处理,1999,15(增刊):65 - 69.  
 [ 8 ] 谭琳著. 函数札记 [M]. 杭州:浙江大学出版社,1997.  
 [ 9 ] Yuan Xiao, Yu Juebang. A New Kind of Wavelet based on Super-Gaussian Spectrum Functions [A]. WCC 2000. ICSP 2000 [C], 1:399 - 402.

## 作者简介:



**袁 晓** 四川中江人. 1985 年、1991 年和 1998 年分别获得四川大学理学学士、硕士和电子科技大学工学博士学位. 现任教于空军工程大学. 感兴趣的领域有电路与系统、神经网络、语音信号分析处理和子波理论与应用等. 目前主要研究子波的构造与性质、快速算法与应用. 已发表论文二十余篇.



**虞厥邦** 1955 年毕业于华南工学院,现为电子科技大学教授. 电路与系统学科博士生导师. 学术研究方向为非线性动力学、神经网络及计算智能、混沌信号处理、混沌通信系统、电路设计自动化等. 在国内外学术刊物及会议上发表、宣读论文约 180 篇.



**陈向东** 讲师,工学博士,1998 年毕业于电子科技大学微电子与固体电子学专业,主要从事压电传感器、非制冷红外探测及图像处理领域的研究,已发表论文十余篇.

**杨家德** 研究员,所长,重庆光电技术研究所.