

高阶多通带滤波器优化设计研究

曾昭¹, 李仁发²

(1. 长沙电力学院电力系, 湖南长沙 410077; 2. 湖南大学计算机学院, 湖南长沙 410082)

摘 要: 本文详细讨论了 FIR 线性相位滤波器幅频特性与余弦基神经网络算法之间的关系, 证明了神经网络的收敛定理, 给出了高阶多通带滤波器的设计实例. 研究结果表明该算法在准理想多通带滤波器设计中的有效性和优异性能.

关键词: 神经网络; 高阶滤波器; 多通带; 优化设计

中图分类号: TP183 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2002) 01-0087-03

Study on the Optimum Design of the High-Order Multi-Band-Pass Filters

ZENG Zhe-zhao¹, LI Ren-fa²

(1. Dept. of Electric Power, Changsha Electric Power University, Changsha, Hunan 410077, China;

2. Computer College, Hunan University, Changsha, Hunan 410082, China)

Abstract: This paper discusses in detail the relations between the amplitude-frequency characteristic on the FIR filters with linear phase and the algorithm of the neural networks, proves the convergency theorem of the algorithm, and presents the design examples of the high-order multi-band-pass filters. The results show that the algorithm is efficient and excellent in the design field of the quasi-ideal multi-band-pass filters.

Key words: neural networks; high-order filters; multi-band-pass; optimum design

1 引言

FIR 滤波器的系统函数只有零点, 没有有限极点, 因而该类型的滤波器总是稳定的. 它的另一个突出优点是, 在满足一定对称条件下, 可以实现 IIR 滤波器难以实现的线性相位. 由于线性相位特性在工程实际中有非常重要的意义, 如在数据通信、语音信号处理、图像处理以及自适应处理等领域, 往往要求信号在传输过程不能有明显的相位失真, 因而 FIR 滤波器获得了广泛应用.

FIR 滤波器常用的设计方法有窗口法与频率取样法, 但是这两种方法均不易精确控制通带与阻带边界频率 Ω_p 与 Ω_r , 所以在实际应用中有一定的局限性, 由此出现了一些优化设计方法, 如利用最大误差最小化准则的 Remez 交换算法与线性规划算法^[1]. 虽然加权最小二乘 (WLS) 设计容易实现且能得到解析解^[2,3], 但这种算法需要计算一个矩阵的逆, 这个矩阵的阶数就是滤波器的独立系数. 当滤波器的阶数很高时, 这个矩阵的求逆将出现困难. 采用递推最小二乘 (RLS) 设计算法^[4], 可以不需要计算高阶矩阵的逆, 且其中协方差矩阵的计算可采用 U-D 分解算法^[5], 但是, 阻带最小衰减只有 40 分贝左右, 而且误差加权函数凭经验确定.

本文提出的神经网络优化设计方法, 其基本思想是使设计的频响与理想频响之间的全局误差在通带和阻带范围为最小. 由该方法设计的滤波器, 通带范围无过冲无波动, 容易精确控制通带与阻带边界频率 Ω_p 与 Ω_r , 初始条件随机给定, 因而是一种有效的设计方法.

2 线性相位 FIR 滤波器幅频特性

众所周知, $N-1$ 阶的 I 型 FIR 滤波器, 其幅频特性为:

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n \cos(n\Omega) \quad (1)$$

其中

$$w_0 = h\left(\frac{N-1}{2}\right), w_n = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), (n=1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}) \quad (2)$$

且脉冲响应 $h(n)$ 满足偶对称条件:

$$h(n) = h(N-1-n) \quad (3)$$

N 为奇数. 显然, 幅频特性是有限长傅里叶级数, w_n 为待定傅里叶系数, 只要求得 w_n 序列, 由式 (2) 即可得到有限长脉冲响应序列 $h(n): h\left(\frac{N-1}{2}\right) = w_0, h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) = \frac{w_n}{2}, (n=1, 2, \dots, \frac{N-1}{2})$, 利用 $h(n)$ 满足的偶对称性条件式 (3), 从而设计

出符合指标要求的 FIR 线性相滤波器。下面用神经网络算法来训练理想 FIR 线性相位滤波器的幅频特性,以获取网络权值 w_n 即傅里叶系数,从而设计出符合指标要求的 FIR 线性相滤波器 $h(n)$ 。

3 余弦神经网络模型

余弦神经网络模型如图 1 所示,其中 $C_0(\Omega)$, $C_1(\Omega)$, ..., $C_{n-1}(\Omega)$ 为余弦基函数,即: $C_0(\Omega) = 1$, $C_1(\Omega) = \cos(\Omega)$, $C_2(\Omega) = \cos(2\Omega)$, ..., $C_{n-1}(\Omega) = \cos[(n-1)\Omega]$ 。

图 1 神经网络模型

3.1 余弦基函数神经网络算法

神经网络输出如下: $H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n \cos(n\Omega)$ (4)

误差函数: $E(l) = |H_d(e^{j\Omega_l})| - H(e^{j\Omega_l})$ (5)

其中 $l=0,1,2, \dots, m-1$, m 为训练样本数, $|H_d(e^{j\Omega_l})|$ 为理想幅频响应。

性能指标: $J = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} E^2(l)$ (6)

权值调整: $\Delta w_k(l) = -\eta \frac{\partial J}{\partial w_k} = -\eta \frac{\partial J}{\partial E(l)} \frac{\partial E(l)}{\partial H(e^{j\Omega_l})} \frac{\partial H(e^{j\Omega_l})}{\partial w_k} = \eta E(l) C_k(\Omega_l)$

$w_k(l+1) = w_k(l) + \Delta w_k(l) = w_k(l) + \eta E(l) C_k(\Omega_l)$ (7)

($k=0,1,2, \dots, \frac{N-1}{2}$), 其中 η 为学习率,且 $0 < \eta < 1$ 。

3.2 神经网络算法收敛性条件

定理 1 在本文讨论的神经网络算法中,当学习率取为: $0 < \eta \leq \frac{4}{N+1}$ 时,该神经网络算法是收敛的。

证明 取 Lyapunov 函数为: $V(t) = \frac{1}{2} E^2(t)$, 则有: $\Delta V(t) = \frac{1}{2} E^2(t+1) - \frac{1}{2} E^2(t)$

因为 $E(t+1) = E(t) + \Delta E(t) = E(t) + \left(\frac{\partial E(t)}{\partial W} \right)^T \Delta W$,

$\Delta W = -\eta E(t) \frac{\partial E(t)}{\partial W}$, 于是有:

$$\Delta V(t) = \Delta E(t) \left[E(t) + \frac{1}{2} \Delta E(t) \right] = \left\| \frac{\partial E(t)}{\partial W} \right\|^2 E^2(t) \left(-\eta + \frac{1}{2} \eta^2 \left\| \frac{\partial E(t)}{\partial W} \right\|^2 \right) \quad (8)$$

由式(4)知, $H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n C_n(\Omega) = W^T C(\Omega)$, 其中: $W = [w_0, w_1, \dots, w_{(N-1)/2}]^T$

$C(\Omega) = [C_0(\Omega), C_1(\Omega), \dots, C_{(N-1)/2}(\Omega)]^T$, 所以, $\frac{\partial E(t)}{\partial W} = \frac{\partial E(t)}{\partial H(e^{j\Omega})} \frac{\partial H(e^{j\Omega})}{\partial W} = -C(\Omega)$

由式(8)知,要使神经网络算法收敛,必须有 $-\eta + \frac{1}{2} \eta^2$

$\left\| \frac{\partial E(t)}{\partial W} \right\|^2 < 0$ 成立,因 $\eta > 0$, 所以 $0 < \eta < \frac{2}{\left\| \frac{\partial E(t)}{\partial W} \right\|^2} =$

$\frac{2}{\sum_{n=0}^{N-1} C_n^2(\Omega)}$, 因为 $1 < \sum_{n=0}^{N-1} C_n^2(\Omega) \leq \frac{N+1}{2}$, 为了使神经网络

对收敛,取 $\sum_{n=0}^{N-1} C_n^2(\Omega) = \frac{N+1}{2}$, 因此, $0 < \eta < \frac{2}{\frac{N+1}{2}} = \frac{4}{N+1}$, 即

当学习率 η 满足 $0 < \eta \leq \frac{4}{N+1}$ 时,有 $\Delta V(t) < 0$, 从而本文讨论的神经网络算法是收敛的。

3.3 神经网络训练步骤

Step1 将理想幅频响应 $|H_d(e^{j\Omega_l})|$ 取样获取训练样本集: $\{ \Omega_l, |H_d(e^{j\Omega_l})| \}$, 令 $J=0$, 随机产生权值 $W(n)$, 给定任意小正实数 ε , 其中 $\Omega_l = \frac{2\pi}{N-1} l$, $l=0,1,2, \dots, \frac{N-1}{2}$

Step2 计算神经网络输出: $H(e^{j\Omega_l}) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n \cos(n\Omega_l)$

Step3 计算误差函数与性能指标:

$$E(l) = |H_d(e^{j\Omega_l})| - H(e^{j\Omega_l}), J = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{m-1} E^2(l)$$

Step4 调整权值: $w_k(l+1) = w_k(l) + \eta E(l) C_k(\Omega_l)$

Step5 判断样本集是否训练完毕,未完,返回 Step2 继续训练,否则,判断性能指标 J 是否小于给定的任意小正实数 ε . 若 $J > \varepsilon$, 则令 $J=0$, 返回 Step2 继续训练,若 $J \leq \varepsilon$, 则结束训练。

3.4 计算线性相位 FIR 滤波器脉冲响应

将 3.3 节中训练完毕的权值 w_n 代入式(2) 则有:

$h(\frac{N-1}{2}) = w_0$, $h(\frac{N-1}{2} - n) = \frac{1}{2} w_n$, 其中 $n=1,2, \dots, \frac{N-1}{2}$ 。

考虑到 I 型 FIR 滤波器脉冲响应 $h(n)$ 的偶对称性: $h(n) = h(N-1-n)$, 则可设计出一个符合指标要求的 FIR 滤波器。

4 高阶多通带 FIR 滤波器设计实例

例 1 已知某理想 I 型 FIR 三通带滤波器的幅频特性为:

$$|H_d(e^{j\Omega})| = \begin{cases} 1 & 0.5 \leq |\Omega| \leq 1.0, 1.5 \leq |\Omega| \leq 2.0, 2.5 \leq |\Omega| \leq 3.0 \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

要求设计一个 120 阶的 FIR 多通带滤波器, 则对 Ω 在 $[0, \pi]$ 范围内均匀取样, 共 61 个样点, 即: $\Omega_l = \frac{\pi}{60} l$, ($l=0,1,2, \dots, 60$)。为了使通带与阻带范围内无过冲, 无波动, 在每个过渡带内分别取两个样点 0.78 与 0.25, 因此, 实际的幅频取样点为: $H_d(l) = [\text{zeros}(1,8), 0.25, 0.78, \text{ones}(1,9), 0.78, 0.25, \text{zeros}(1,6), 0.25, 0.78, \text{ones}(1,9), 0.78, 0.25, \text{zeros}(1,6), 0.25, 0.78, \text{ones}(1,9), 0.78, 0.25, \text{zeros}(1,2)]$ 。

取网络结构为: $1 \times 61 \times 1$, 则经过 13 次网络训练, 通带与阻带范围内全局误差即性能指标为: $J = 2.9 \times 10^{-8}$, 由神经网络算法设计的线性相位三通带 120 阶 FIR 滤波器, 其脉冲响应如图 2 所示, 幅频衰减特性如图 3 所示。

例 2 同例 1,要求设计一个 500 阶的 FIR 三通带滤波器,则对 Ω 在 $[0, \pi]$ 范围内均匀取样,共 251 个样点,即 $\Omega_l = \frac{\pi}{250} l$, ($l = 0, 1, 2, \dots, 250$).

为了使通带与阻带范围内无过冲,无波动,在每个过渡带内分别取两个样点 0.78 与 0.25,因此,实际的幅频取样点为:

$$H_d(l) = [\text{zeros}(1, 38), 0.25, 0.78, \text{ones}(1, 40), 0.78, 0.25, \\ \text{zeros}(1, 36), 0.25, 0.78, \text{ones}(1, 40), 0.78, 0.25, \\ \text{zeros}(1, 36), 0.25, 0.78, \text{ones}(1, 40), 0.78, 0.25, \\ \text{zeros}(1, 9)]$$

取网络结构为: $1 \times 251 \times 1$, 则经过 12 次网络训练,通带与阻带范围内全局误差即性能指标为: $J = 2.7 \times 10^{-6}$, 由神经网络算法设计的 500 阶三通带 FIR 线性相位滤波器,其幅频衰减特性如图 4 所示。

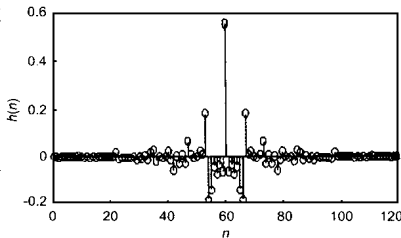


图 2 例 1 脉冲响应 $h(n)$

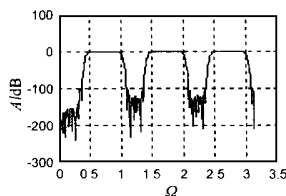


图 3 例 1 幅频衰减特性

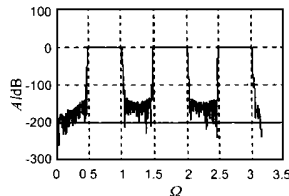


图 4 例 2 幅频衰减特性

5 FIR 数字滤波器系数 $h(n)$ 的有限字长效应

在工程实现阶段,所有的滤波器系数因量化而存在有限字长效应。对于 FIR 滤波器,系数量化误差主要影响滤波器的频率特性,不会影响其稳定性。文献[6]讨论了滤波系数 $h(n)$ 的有限字长效应引起的频率特性误差为: $|\Delta H(e^{j\Omega})| \leq \frac{N}{2} q$, 其中 N 为滤波器的长度, q 为量化间隔,即 $q = 2^{-b}$, b 是有限字长。显然,有限字长效应引起的频率特性误差与滤波器的长度 N 成正比,字长一定时,阶数越高,引起的频率特性误差越大。对于本文讨论的两个范例,设字长为 16 位,因有限字长效应引起的频率特性误差分别为: 0.000923 和 0.003822。文献[6]还详细讨论了浮点乘法运算因舍入量化噪声影响 FIR 数字滤波器的输出信噪比: $SNB \geq 10 \lg \frac{3}{N+1} \frac{1}{q^2}$ 。对于本文的两个范例,设字长为 16 位,因有限字长效应引起的 FIR 数字滤波器的输出信噪比分别为: 77 分贝和 74 分贝。随着当今计算机硬件技术的高速发展,对于 FIR 滤波器而言,不论采用软件还是硬件数字滤波(如 TMS320C30 DSP 为 32 位字长),有限字长效应的影响已微不足道了,因此,幅频特性更好的高阶 FIR 数字滤波器将不会因有限字长效应而影响其在工程实际中的推广应用。

6 结论

本文提出了一种 FIR 多通带数字滤波器的优化设计算

法,该方法的特点是通过训练神经网络权值来获取 FIR 数字滤波器的脉冲响应,达到滤波器的设计目的。该算法不涉及矩阵运算,因而在高阶滤波器的设计中解决了传统优化设计方法无法计算矩阵逆的困难。文中给出的两个范例,其幅频衰减特性优异,阻带衰减分别在 100 分贝与 140 分贝以上,通带平滑,设计精度高,已十分逼近理想滤波器的幅频特性,这是目前任何其它优化设计方法难以实现的。本文两个范例均涉及三通带高阶滤波器的优化设计,目前尚未发现类似范例供参考,在此不宜评价谁优谁劣,作者给出比较结果仅供参考。文献[4]采用 Remez 交换算法实现的 Minimax 设计结果和随机递推最小二乘(RS-RLS)算法结果(150 阶 FIR 低通滤波器),其阻带最小衰减约 40 分贝;文献[7,8]给出了用复数神经网络设计 25 阶双通带 FIR 滤波器的结果,阻带最小衰减约 56 分贝;文献[7]还给出了 30 阶 FIR 带通滤波器的设计结果,阻带最小衰减约 60 分贝。事实上,行家都十分清楚,目前国内外各种优化设计方法设计的 FIR 滤波器,阻带最小衰减一般不超过 63 分贝,通带等波纹诸多。

参考文献:

- [1] 吴湘淇. 信号、系统与信号处理 [M] (下). 北京: 电子工业出版社, 1996, 8: 105 - 109.
- [2] Y C Lim, J H Lee, C K Chen, R H Yang. A weight least squares algorithm for quasi-equiripple FIR and IIR digital filter design [J]. IEEE Trans. Signal Processing, Mar, 1992, 40: 551 - 558.
- [3] J H Lee, C K Chen, Y C Lim. Design of discrete coefficient FIR digital filters with arbitrary amplitude and phase responses [J]. IEEE Trans. Circuits Syst., July, 1993, 40: 444 - 448.
- [4] 赖晓平. FIR 数字滤波器的递推最小二乘设计算法 [J]. 信号处理, Sep. 1999, 15(3): 260 - 264.
- [5] L Ljung, T Soderstrom. Theory and Practice of Recursive Identification [M]. The MIT. Press, 1983.
- [6] 姚天任, 江太辉. 数字信号处理 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1999, 8: 198 - 199; 223 - 225.
- [7] 王炎, 廖小峰, 等. FIR 数字滤波器设计的复数神经网络方法 [J]. 信号处理, Sep. 1999, 15(3): 193 - 198.
- [8] X chen, T W parks. Design of FIR filters in the complex domain [J]. IEEE Trans. ASSP., Feb. 1987, ASSP-35(2): 144 - 153.

作者简介:



曾昭 男. 1963 年 9 月生于湖南蓝山. 副教授. 1989 年 12 月毕业于清华大学, 同年获硕士学位, 发表论文二十余篇. 主要感兴趣领域: 单片机应用系统开发、神经网络理论与应用、信号处理等。

李仁发 男. 1957 年 5 月生于湖南宜章. 教授, 1987 年 7 月毕业于天津大学, 同年获硕士学位, 发表文章三十余篇. 主要感兴趣领域: 计算机应用系统开发、神经网络理论与应用、控制理论与应用等。