

三维混沌信号产生器的设计

李清都^{1,2}, 杨晓松^{1,2}

(1. 重庆邮电学院非线性系统研究所, 重庆 400065; 2. 华中科技大学数学系, 湖北武汉 430074)

摘要: 混沌电路的设计是混沌通信和混沌加密等应用的先决条件, 因此混沌电路的理论研究和设计具有十分重要的意义. 本文对作者以前提出的二维混沌电路的方法进行推广, 论述如何在三维空间中构造混沌吸引子, 从而产生混沌信号. 该方法的优点是: 采用模块化设计思路, 混沌吸引子的形状可以根据实际需要来设计, 易于电路和集成电路实现.

关键词: 混沌; 混沌信号; 符号动力学; 拓扑马蹄; 随机信号

中图分类号: TN710 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2007) 03-0497-04

3D Chaotic Signals Generator Design

LI Qing-du^{1,2}, YANG Xiao-song^{1,2}

(1. Institute of Nonlinear Systems, Chongqing University of Posts and Telecomm, Chongqing, 400065, China;

2. Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074, China)

Abstract: Designing chaotic circuits is prerequisite to chaotic communications, chaotic encryption etc. Therefore the fundamental research on it is extremely significant. This paper generalizes the method of designing 2D chaotic circuit proposed by the authors before. By this new method, it becomes simple and flexible to design chaotic dynamic systems in the 3D state space. The remarkable advantage of this design method is that one can choose complexity of the chaotic attractor as needed by combining the three kinds of modules, and the chaotic attractor can be easily implemented with a circuit or an integrated circuit.

Key words: chaos; chaotic signals; symbolic dynamics; topological horseshoes; random signals

1 引言

混沌现象是自然界普遍存在的一种现象, 是有序决定的无序从而类似于随机的现象. 由于混沌现象具有长期不可预测性和伪随机性, 所以它可以作为随机信号源, 在通信、保密等领域有很强的应用价值, 对神经信息处理等其他诸多领域的研究也有重要意义. 从而, 掀起了对混沌信号产生器设计的研究热潮^[5-11].

然而, 目前混沌信号设计的研究还处于初步阶段, 缺乏成熟的理论使人们可以随意构造自己需要的混沌吸引子. 所以, 混沌信号产生器的设计还具有很大的挑战性. 作者在混沌电路信号产生器的设计上做了诸多尝试, 提出了二维空间中构造混沌信号产生器的方法^[1]. 作为该方法的一个推进, 本文将集中论述三维混沌信号产生器的设计思想, 便于向高维空间中推广.

因此, 本文仍然以分段映射的拓扑马蹄理论为基础, 分析混沌现象产生的机制, 提出三维混沌系统的设

计方法. 该方法采用模块化的设计思路, 容易推广使用, 从而满足实际不同需要.

2 分段映射的拓扑马蹄理论

基于符号动力系统的拓扑马蹄理论是研究混沌现象的一种有力工具^[3], 本节将介绍该理论的一些基本结论^[2-4], 尤其是关于分段映射的拓扑马蹄理论^[2].

令 X 是一个可分的度量空间, Q 是 X 的紧子集, $F: Q \rightarrow X$ 是映射, 做出以下假设.

假设 1^[2] 存在 Q 的 m 个互不相交的子集 $Q_1, \dots, Q_m$, 且对于每个 Q_i 有 $f|_{Q_i}$ 连续.

定义 1^[2] 令 Γ 是 Q 的紧子集, 对于任意 $1 \leq i \leq m$, $\Gamma_i = \Gamma \cap Q_i$ 非空且紧致, 我们称 Γ 为对应于 $Q_1, \dots, Q_m$ 的连接. 令 F 为一簇对应于 $Q_1, \dots, Q_m$ 的连接, 如果 $\Gamma \in F$ 可推出 $f(\Gamma_i) \in F$, 则 F 称为对应于 $Q_1, \dots, Q_m$ 的 f 连接簇.

定理 1^[2] 如果存在上面的连接簇 F , 那么将存在

一个紧不变集 $Q_l \in Q$, 并且 $f|_{Q_l}$ 半共轭与一个 m 移位映射.

半共轭一般定义: 令 Q_l 和 Σ_m 为拓扑空间, 存在映射 $f: Q_l \rightarrow Q_l$ 和 $\sigma: \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ 若存在连续映射 $h: Q_l \rightarrow \Sigma_m$ 满足 $h \circ f = \sigma \circ h$, 于是 f 与 σ 半共轭. 关于半共轭, 有以下重要结论.

定理 2^[4] 对于两个动力系统 (X, f) 和 (Y, g) , 如果 (X, f) 半共轭于 (Y, g) , 那么, f 的拓扑熵不小于 g , 即.

$$\text{ent}(f) \geq \text{ent}(g)$$

因为 $\text{ent}(\sigma) = \log m$, 这里 $g = \sigma$, 所以 $\text{ent}(f) \geq \log m$, 所以当 $m > 1$ 时, 动力系统 (X, f) 是混沌的^[3].

3 设计方法

混沌现象的本质就是对初始值的敏感依赖性. 如何构造含有这种性质的系统呢? 从上面的讨论可知, 如果动力系统中存在拓扑马蹄, 就能证明其存在混沌行为. 而对于马蹄, 简单的来说就是一个类似于不断拉伸、折叠(堆叠)的映射, 我们的目的就是构造一个含有这种映射的动力系统, 经过简化后, 再用电路或集成电路实现.

因为混沌不可能存在于连续的二维微分动力系统中, 所以在文献[1]中我们必须构造另外一个系统来实现映射 P , 然后利用某种切换控制机制使两个系统协调工作从而产生混沌. 而在三维的时候, 就可以借助于第三维空间实现另外一个映射和切换控制机制.

首先, 考虑三维空间中的一个方程:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \tilde{\omega} & 0 \\ -\tilde{\omega} & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

由于 x_3 与 x_1 和 x_2 没有耦合, 其解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\omega} t & \sin \tilde{\omega} t \\ -\sin \tilde{\omega} t & \cos \tilde{\omega} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$x_3 = e^{-\gamma t} x_{0,3}$. 若 $\gamma > 0$, 且足够大, 则空间中的任意状态都会以极快的速度被吸引到 $x_1 x_2$ 平面附近.

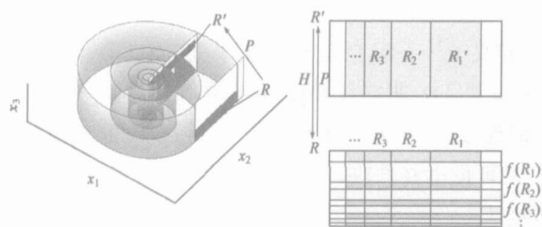


图1 三维空间中的设计混沌映射原理图

在动力系统(2)的作用下, 集合 R' 由外到内被切分成许多段 $R'_1, R'_2, R'_3, \dots$, 经过某时间撞到 R 所在切换面后, 都被在 x_3 方向压缩和 x_2 方向拉伸且两头正好到

达 R 的边界, 设这个映射为 H , 我们称这个系统为 S_B . 由于 $|x_3|$ 随时间减小, 时间越长被压缩的就越薄, 位置就越靠近 $x_1 x_2$ 平面. 当 R' 高度足够小时, $H(R'_1), H(R'_2), H(R'_3), \dots$ 将按从上到下的顺序堆叠在 R 上. 如果设计另一个系统 S_E 将 R 演化到 $R' \circ e$

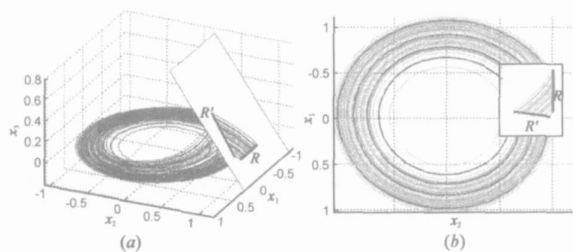


图 2 利用截面进行切换的单螺旋混沌相图

$$\text{动力系统 } S_B: \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \quad (3a)$$

$$\text{动力系统 } S_E: \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.95 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left[x - \begin{bmatrix} -0.9 \\ 0 \\ 0.9 \end{bmatrix} \right] \quad (3b)$$

切换控制 C_S : 令平面 $p: x_2 + x_3 = 1$ 为切换面, p 的下边启用系统 S_B , p 的上面启用动力系统 S_E .

将上面三个模块综合成一个输出反馈系统为:

$$\dot{x} = Ax + s_1(y)(by + k) \quad (4)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -0.05 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9 \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, y = c^T x, s_1(y) = \begin{cases} 1, & y > 1 \\ 0, & y \leq 1 \end{cases}$$

经过数值计算, 系统(4)相图为图 2 从图 2(b)不难看出, 该吸引子满足设计的基本思想, 应该是混沌的, 这一点也可以从它的最大 Lyapunov 指数为 0.023 得到证实.

动力系统 S_B 的平衡点不稳定, 且在系统中真实存在; 而动力系统 S_E 的平衡点稳定, 但位于切换面下方, 所以不属于整个混沌系统. 整个系统只包含一个不稳定的平衡点和一个混沌吸引子, 可以用计算机验证这个混沌吸引子是全局吸引的. 该模型是一个输出为标量的状态反馈模型, 这就意味着利用这种设计方式思路, 我们不但可以设计出全局吸引的混沌吸引子, 而且还能够将现有的非全局吸引的吸引子用状态反馈法让它全局吸引.

例 2 双螺旋和多螺旋结构

如图 3(a) 所示, 利用截面进行切换的双螺旋结构, 截面的上下分别采用动力系统 S_{B1} 和 S_{B2} , 设计如下:

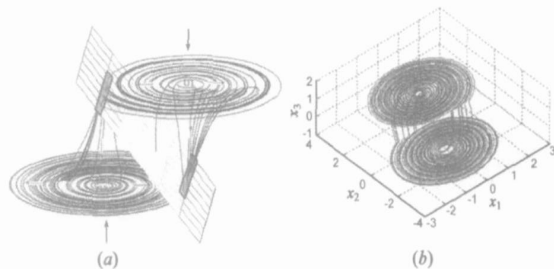
动力系统 S_{B1} :

$$\dot{x} = A(x - o) \quad (5a)$$

动力系统 S_{B2} :

$$\dot{x} = A(x + o) \quad (5b)$$

切换控制 C_S : 切换面 $p: y = c^T x = 0$ 在切换面上采用系统 S_{B1} , 在切换面下采用系统 S_{B2} .
为了简单起见, 将上面描述综合到一起为:

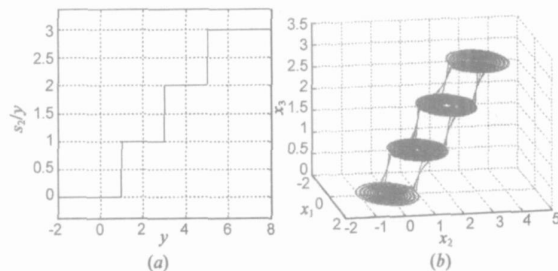
图 3 (a) 为两个系统 S_B 对接形成混沌原理图; (b) 双螺旋吸引子相图

$$\dot{x} = A(x - s_2(y)o) \quad (6)$$

其中 A 和 c 取值与例 1 相同, $o = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s_2(y) = \text{sign}(y)$.

计算机仿真得到的系统相图为图 3(b), 它的三个 Lyapunov 指数大约为 0.045, 0.000 和 -0.969, 所以该系统混沌.

实际上, 从双螺旋情况很容易推广到多螺旋的情况, 只需要对切换函数 $s_2(y)$ 做一下简单的调整即可. 令 $s(y)$ 为图 4(a) 中的阶梯函数, 计算机仿真得到的系统相图为图 4(b). 经数值计算其最大 Lyapunov 指数约为, 说明该系统混沌.

图 4 (a) 切换函数 $s_2(y)$ 的图像, (b) 四螺旋混沌吸引子

例 3 例 1 和例 2 在三维空间上耦合的情况

比较例 1 和例 2, 从所构成的子系统的稳定性上可以看出, 例 1 比例 2 中的混沌吸引子吸引区域广; 而从 Lyapunov 指数和相图上可以看出, 例 2 却明显比例 1 中的混沌吸引子更复杂. 为了取长补短, 我们把这两者在空间上耦合起来. 这样, 新系统的方程为:

$$\dot{x} = A(x - s_2(y)o) + s_1(y)(By + k) \quad (7)$$

在其他参数保持不变的情况下, 令

$$s_2(y) = \begin{cases} 0 & y > -1 \\ -1 & y \leq -1 \end{cases}$$

在空间中随机选取一点为初始值, 仿真得出的系统相图如图 5 所示. 它的最大 Lyapunov 约为 0.040, 说明吸引子混沌. 用同样的仿真方法, 进行了 1000 次测试, 发现

初始点都能很快的被吸引到混沌吸引子上去,说明这个系统很可能是全局吸引的,这就印证了我们在例 1 结尾处的想法。

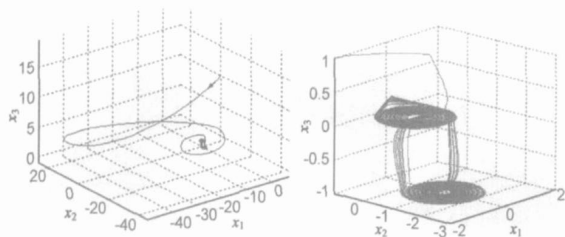


图 5 系统 (6) 的吸引子

4 结论

本文提出了一种全新三维混沌电路的设计思路,简单有效,并且易于推广到高维空间中.由于映射 P 的设计具有很大的灵活性,所以一方面,我们可以通过设计映射 P 来改变吸引子的全局性态,使它大范围吸引,从而产生持续稳定的混沌信号;另一方面,我们可以把现有的其他吸引子应用在文中设计的吸引子中,来提高混沌信号的性能.利用文中设计方法,可以设计出完全利用线性器件(电阻、电容、运放)来实现的混沌电路.本方法最大优点是理论与实践结合紧密,准确性高,容易工程实现,成本低,便于集成化。

参考文献:

- [1] 李清都, 杨晓松. 二维混沌信号产生器的设计[J]. 电子学报, 2005, 33(7): 1299–1302.
LI Qing du, YANG Xiaosong. 2D chaotic signals generator design[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(7): 1299–1302. (in Chinese)
- [2] Yang X S, Tang Y. Horseshoes in piecewise continuous maps[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 19(4): 841–845.
- [3] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear dynamical Systems and Chaos[M]. Springer Verlag, New York, 1990.

- [4] Xiong J. A note on topological entropy[J]. Science Bulletin, 1988, 33: 1534–1536.
- [5] Li Q, Yang X-S, Yang F. Multiple scrolls chaotic attractor and its circuit implementation[J]. Electron Lett, 2003, 39(18): 1306–1307.
- [6] Nakagawa S, Saito T. An RC OTA hysteresis chaos generator[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 1996, 43: 1019–1021.
- [7] Brown R. Generalization of the chua equations[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 1993, 40(11): 878–884.
- [8] Yang X-S, Li Q. Generate n scroll attractor in linear system by scalar output feedback[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, 18(1): 25–29.
- [9] Ogorzalek M J. Overview of electronic chaos generation, control, and applications[A]. Proc. SPIE[C]. Bellingham, WA, USA: Society of Photo Optical Instrumentation Engineers, 1995. 2–13.
- [10] Yang X-S, Li Q. Chaos generator via Wien bridge oscillator[J]. Electron Lett, 2002, 38(13): 623–625.
- [11] Yang X-S, Li Q, Chen G. A twin star hyperchaotic attractor and its circuit implementation[J]. Int J Circ Theor And Appl, 2003, 31(6): 637–640.

作者简介:



李清都 男, 1980 年生于湖北, 2002 年和 2004 年在重庆邮电学院获得工学学士和硕士学位, 现为重庆邮电学院讲师, 华中科技大学电路与系统专业在职博士生, 主要研究方向为: 电路与系统、混沌、神经网络等, 在国内外重要学术刊物发表论文二十余篇。

E-mail: Qingdu-li@163.com

杨晓松 男, 1964 年生于湖南, 1998 年在中国科技大学获博士学位, 现为华中科技大学博士生导师, 重庆邮电学院非线性系统研究所所长, 中国自动化学会控制理论专业委员会委员, 中国电子学会高级会员, J. Contr. Appl. 杂志编委. 研究领域为拓扑动力系统、控制论、神经信息处理、混沌及其在电路系统中的应用, 在国际重要刊物上发表文章七十余篇. E-mail: Yangxs@cqupt.edu.cn