

基于格子波尔兹曼模型的图像去噪

陈 玉^{1,2}, 严壮志¹, 钱跃斌³

(1. 上海大学通信与信息工程学院, 上海 200072; 2. 江苏大学电气信息工程学院, 江苏镇江 212013;
3. 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

摘 要: Perona 和 Malik 提出的各向异性的扩散模型存在着模型不稳定、图像灰度容易产生“阶越”现象等缺陷。本文通过在格子波尔兹曼各向同性扩散模型的网格点间加入跨膜介质, 建立了格子波尔兹曼各向异性扩散模型。该模型中前向扩散过程占据了主导作用, 因而是稳定的。实验分析表明, 该模型很好地解决了 P-M 模型存在的灰度“阶越”现象, 处理结果具有更高的峰值信噪比。

关键词: 图像去噪; 格子波尔兹曼模型; P-M 模型; 偏微分方程

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2009) 03-0574-07

The Lattice Boltzmann Method Based Image Denoising

CHEN Yu^{1,2}, YAN Zhuang-zhi¹, QIAN Yue-hong³

(1. School of Communication and Information Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, China;
2. School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, China;
3. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, China)

Abstract: The diffusion model proposed by Perona and Malik is unstable. This will lead to the “staircasing effect” in image denoising. The lattice Boltzmann anisotropic diffusion model (LBADM) is proposed by introducing a medium between the nodes of the lattice based on the lattice Boltzmann isotropic diffusion model (LBIDM). The force represented by the forward diffusion process dominates in the LBADM. This means the Lattice Boltzmann model LBADM is stable. The experiment and discussion showed that our algorithm can overcome the staircasing effect of the P-M model well. Compared to the Perona and Malik’s isotropic diffusion model, the lattice Boltzmann anisotropic diffusion model had higher peak signal-to-noise ratio.

Key words: image denoising; lattice boltzmann model; P-M model; partial differential equation

1 引言

图像去噪作为偏微分方程理论在图像处理领域的一个重要研究方向,早在 1984 年, Koenderink^[1]就已经将热传导方程应用于图像去噪处理了。1990 年 Perona 和 Malik 提出了基于各向异性扩散方程的图像去噪算法^[2], 他们的方法可以在去除图像噪声的同时保持图像的边缘信息。Perona 和 Malik 提出的各向异性的扩散模型(下面简称 P-M 模型)中同时存在着前向扩散与后向扩散过程。前向扩散物理学上表示粒子从高密度区向低密度区移动的过程。后向扩散等同于将前向扩散过程的时间倒转, 即粒子从低密度区向高密度区移动。后向扩散过程将使灰度值大的地方图像灰度继续增大, 而灰度值小的地方图像灰度继续减小, 因而有边缘增强的作用。但是后向扩散是不适定的^[3]。任何微小的误差都可

能导致方程求解的不稳定。这意味着利用 P-M 模型进行图像去噪时, 图像中的任何噪声干扰都可能对图像最后的处理结果产生巨大的影响^[4]。另外, 后向扩散过程也很容易导致图像灰度的“阶越”现象(staircasing effect)^[5,6], 即原图像中灰度值平缓过渡的地方, 在处理结果中却出现了灰度值突然的阶跃性的变化, 使图像看起来好像是由一块块亮度不同的区域组成的。针对这些问题, 很多学者提出了改进, 如 Cattle^[7], Chen^[8], Gilboa^[9]等人对模型方程的改进。1996 年, You 等人深入分析了各向异性扩散方程的稳定性问题, 他们指出, 当扩散过程中前向扩散过程占主导作用时, 可以很好的消除图像灰度的“阶越”现象, 并且这时 P-M 模型是稳定的^[10]。

格子波尔兹曼模型(Lattice Boltzmann Model)是一种新的求解偏微分方程的数值工具。它是由陈十一和钱跃斌在 1991~1992 年间提出的^[11,12]。目前已经在流体力

学中得到了广泛应用,可以用于求解 Navier-Stokes 等偏微分方程.相对于传统的数值解法,LBM 具有稳定性好,编程简单,计算效率高的特点.另外 LBM 是一个天然的非连续系统,因此是应用于图像处理的极好工具.本文中,我们在在格子波尔兹曼各向同性扩散模型(LBIDM)的基础上,通过在网格格点间加入跨膜介质,建立了一个新的格子波尔兹曼各向异性扩散模型(LBADM).由于模型中粒子的扩散总是表现为从粒子的高密度区域向低密度区域扩散,因而前向扩散过程占据了主导作用,因此该模型是稳定的.利用该模型我们实现了图像的去噪处理.实验表明我们的算法可以解决 P-M 模型中存在的“灰度阶越”问题.与 P-M 模型和 Gilboa 提出的复数域扩散模型 CDM(Complex Diffusion Model)相比,该模型的处理结果有更高的峰值信噪比.

2 LBM 原理

LBM 起源于模拟流体运动规律的格子气元胞自动机.格子气元胞自动机将流体看成由大量离散粒子组成的时空离散系统,空间结构如图 1(a)所示.粒子分布在离散空间中的每个网格中,其数量代表网格点的状态.每个时刻每个网格中的粒子从不同方向(本文中用 i 表示)向其邻居移动并发生碰撞,如图 1(b)和图 1(c)所示.

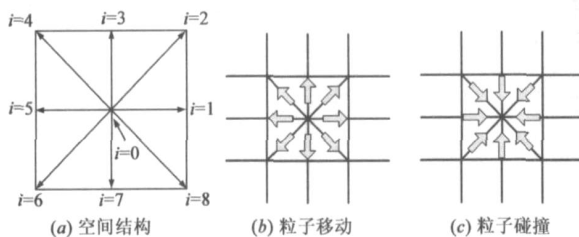


图1 格子气元胞自动机的空间结构,以及粒子的移动与碰撞示意图

如果用 $n_i(r, t)$ 表示在时刻 t , r 处的网格上,沿方向 i 移动的粒子数;用 C_i 表示各个方向的单位向量.那么格子气元胞自动机的演化方程可以写为:

$$n_i(r + h \cdot C_i, t + \tau) = n_i(r, t) + \mathcal{I}_i(r, t) \quad (1)$$

其中, \mathcal{I}_i 为碰撞项,表示粒子碰撞对网格中粒子数产生的影响; τ 和 h 分别为时间步长和空间步长.由于格子气元胞自动机中,网格点的状态是离散的,因此不可避免的会产生一定的统计噪声^[13].为了克服这个缺陷,McNamara 和 Zanetti 提出直接由 Boltzmann 方程替换格子气元胞自动机,用粒子分布函数 $f(r, t)$ 取代离散变量 $n_i(r, t)$ ^[14].在此基础上,1991 年~1992 年,陈十一和钱跃斌利用 BGK(Bhatnagar-Gross-Krook)估计取代了方程(1)中的碰撞项,从而提出了完整的 LBM 理论框架.LBM 中模型的演化方程可以写为:

$$f_i(r + h \cdot C_i, t + \tau) = f_i(r, t) + \frac{\tau}{h} [f_i^{(0)}(r, t) - f_i(r, t)] \quad (2)$$

其中, $f_i(r, t)$ 为粒子密度分布函数; $f_i^{(0)}(r, t)$ 为局部平衡分布函数,表示模型由于碰撞而到达平衡时的状态; τ 为松弛时间,表示模型趋向于平衡态的快慢.

$$\text{如果取: } \begin{cases} f_i^{(0)} = M, M \in [0, 1] \\ = f_i \end{cases} \quad (3)$$

LBM 模型的宏观方程则与各向同性扩散方程一致,该模型为格子波尔兹曼各向同性扩散模型(LBIDM).本文中,在 LBIDM 的基础上,我们将提出一个新的格子波尔兹曼各向异性扩散模型(LBADM),并以此为基础实现图像的去噪处理.

3 格子波尔兹曼各向异性扩散模型(LBADM)

为了在扩散模型的基础上,构建各向异性扩散模型.首先,我们引入半透膜的选择性渗透机制.所谓半透膜(semipermeable membrane)是指一类可以让小分子物质通过而大分子物质不能通过的薄膜的总称.不同的半透膜所能通过的分子的尺寸是不同的,例如对于鸡蛋的膜来说,葡萄糖分子就是大分子物质;而对于肠衣来说,葡萄糖是小分子物质,淀粉是大分子物质.本文中,我们将 LBM 模型的每个元胞之间加入一个“半透膜”,并且各个方向上“半透膜”允许通过的粒子尺寸都不相同.假设元胞中沿每个方向移动的粒子有 N 个,我们规定每个粒子的尺寸在区间 $[0, N]$ 上呈均匀分布,并且元胞在方向 i 上的“半透膜”允许通过的粒子尺寸为 n_i ,那么元胞中沿方向 i 移动的 N 个粒子中,将有 $N \frac{n_i}{N} = n_i$ 个粒子可以通过“半透膜”.显然各个方向上通过“半透膜”的粒子是不相同的,这样的扩散模型是各向异性的.这里,我们定义概率 n_i/N 为粒子通过概率,记为 g_i .由于“半透膜”是一个生物学概念,为了与之区别,在本文中不妨称之为“跨膜介质”.

上面的模型可以简化为如下的过程:当粒子向元胞邻居移动时,以概率 g_i 通过跨膜介质,而以概率 $1 - g_i$ 挡回,元胞在下一时刻的状态应该等于被跨膜介质挡回的粒子数加上邻居通过跨膜介质进入该元胞的粒子数,如图 2 所示.如此,该模型的演化方程可以写为:

$$\begin{aligned} f_i(r + h C_i, t + \tau) &= g_i(r) \left\{ f_i(r, t) + \frac{\tau}{h} [f_i^{(0)}(r, t) - f_i(r, t)] \right\} \\ &+ [1 - g_i(r)] \left\{ f_i(r + h C_i, t) \right. \\ &\left. + \frac{\tau}{h} [f_i^{(0)}(r + h C_i, t) - f_i(r + h C_i, t)] \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

这里我们选择如下的平衡分布函数:

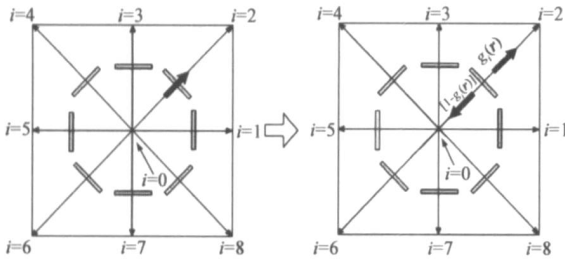


图2 每个粒子通过该跨膜介质的概率记为 $g_i(r)$, 并且以概率 $[1-g_i(r)]$ 返回原位

$$f_i^{(0)}(r, t) = i(r, t) \quad (5)$$

其中
$$i = \begin{cases} 1 - \frac{8M}{9}, & i=0 \\ \frac{M}{9}, & i=1, 2, 3, \dots, 8 \end{cases}, M \in [0, 1].$$

如果将方程(4)的两边泰勒展开, 分别根据一阶无穷小和二阶无穷小联立方程, 便可以得到该模型的宏观方程(推导见附录):

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{M}{18} \frac{h^2}{t} g_i(r) (C_i \cdot \nabla)^2 - \frac{M}{9} \frac{h}{t} g_i(r) (C_i \cdot \nabla) - \frac{2}{t} g_i(r) f_i^{(2)} \quad (6)$$

从方程(6)可以看到, 如果 $g_1(r) = g_2(r) = \dots = g_8(r) = g(r)$, 由于

$$g(r) (C_i \cdot \nabla) = 0 \quad (7)$$

$$g(r) f_i^{(2)} = 0 \quad (8)$$

那么该模型就退化为各向同性扩散模型.

如果我们忽略方程(6)中的二阶无穷小项 $-\frac{2}{t} g_i(r) f_i^{(2)}$, 那么我们可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} K g_i(r) (C_i \cdot \nabla)^2 - K g_i(r) (C_i \cdot \nabla) \quad (9)$$

其中, $K = \frac{M}{9} \frac{h}{t}$.

如果将 Perona 和 Malik 提出的各向异性扩散方程 $\frac{\partial}{\partial t} = \text{div}[c(|\nabla|) \nabla]$ 右边的微分项展开, 可以看出其在形式上与方程(9)是很相似的. 图3给出了LBIDM模型和LBADM模型对lena图像的处理结果.

图3中, (a)为lena图像, (b)为LBIDM模型的处理结果, (c)为LBADM模型的处理结果. 其中, $K=1$, $t=0.1667$, $h=1$, 迭代次数同为50次. 从图3可以看出, LBIDM在对图像去噪的

同时模糊了图像的边缘, 其效果与各向同性的扩散方程相同, 而LBADM则很好的保持了图像的边缘.

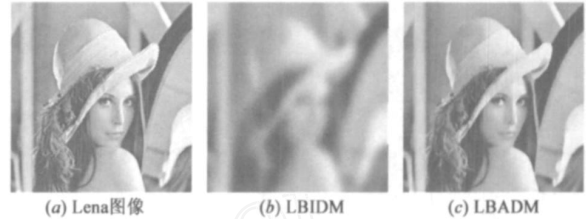


图3 LBIDM模型和LBADM模型对lena图像的处理结果. LBIDM在对图像去噪的同时模糊了图像的边缘, 其效果与各向同性的扩散方程相同, 而LBADM则很好的保持了图像的边缘

4 实验分析

上文中, 我们提出了LBADM. 虽然该模型中跨膜介质限制了粒子的移动, 但这种限制作用无论对移出元胞的粒子还是进入元胞的粒子都是相同的. 从宏观上看, 粒子还是从高密度区域向低密度区域扩散, 模型中的前向扩散过程占据了主导作用. 根据 You 等人的分析可知, 模型是稳定的. 这里, 我们利用LBADM实现了图像的去噪处理. 实验表明我们的算法可以解决P-M模型中存在的“灰度阶越”问题.

4.1 基于LBADM的图像去噪算法

算法中, 第一步, 首先必须对模型初始化. 我们将图像中的像素点看作是网格空间中的元胞, 将原始图像作为LBADM的初始值, 粒子密度分布函数和局部平衡分布函数的初始值设置如下:

$$f_i(r, 0) = f_i^{(0)}(r, 0) = \begin{cases} \frac{M}{9} \frac{c(r, 0)}{9}, & i \neq 0 \\ 1 - \frac{8M}{9} \frac{c(r, 0)}{9}, & i = 0 \end{cases}, M \in [0, 1].$$

第二步, 迭代过程. 粒子从元胞内以特定方向向其

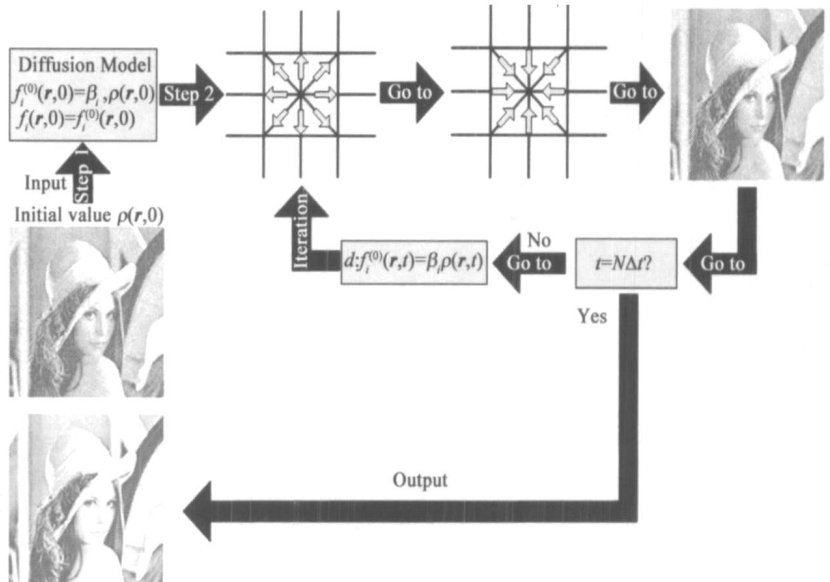


图4 基于LBADM的图像去噪算法流程图

邻居移动,在各个元胞内部发生碰撞,从而对元胞的状态产生影响,即

$$\begin{aligned}
 & f_i(r+hC_i, t+\tau) \\
 &= g_i(r) \left\{ f_i(r, t) + \frac{1}{9} [f_i^{(0)}(r, t) - f_i(r, t)] \right\} \\
 &+ [1-g_i(r)] \left\{ f_i(r+hC_i, t) \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{9} [f_i^{(0)}(r+hC_i, t) - f_i(r+hC_i, t)] \right\} (r, t+\tau) \\
 &= \sum_{i=0}^8 f_i(r, t+\tau), 1 \leq i \leq 8.
 \end{aligned}$$

每次碰撞后必须重新计算局部平衡分布函数:

$$f_i^{(0)}(r, n+\tau) = \begin{cases} M \frac{(r, n+\tau)}{9}, & i=0 \\ 1 - \frac{8M(r, n+\tau)}{9}, & i=0 \end{cases}$$

如果达到最大迭代次数 N , 则退出迭代.

第三步,输出 (r, t) .

算法流程如图 4 所示.

4.2 参数选择

为了让模型在图像梯度变化平缓的地方尽量实现图像平滑,而在图像边缘也就是图像边缘梯度变化剧烈的地方停止平滑,函数 $g_i(r)$ 必须与图像的梯度信息建立联系. 在我们的研究中,函数 $g_i(r)$ 设置为:

$$g_i(r) = \frac{1}{\left[1 + \frac{|G^*(r,0) - G^*(r+hC_i,0)|}{k} \right]^n} \tag{10}$$

其中, G 为高斯滤波器, k 为一固定常数,实际取值为 $k=10$.

参数 n 决定了模型对图像梯度的敏感程度. 当 $n \rightarrow +\infty$ 时,模型对图像不起平滑作用;相反,当 $n \rightarrow 0$ 时,模型退化为各向同性的扩散方程. 在实验中,我们实际取 $n=2$.

从式(9),我们可以看到,方程右边各项的系数与 M , h 以及 τ 有关. 由于我们将图像的像素点看作为元胞空间中的元胞,因此元胞空间的空间间隔与图像像素点的间隔应该一致,即 $h=1$. 显然,当 h 设为 1 后,式(9)右边各项系数便唯一的被 M/τ 所确定.

时步长 τ 的另一个作用是确定迭代次数,例如,为求得时刻 T 的数值模拟结果,需要迭代 T/τ 次. 当 T 较小时,我们希望时步长度 τ 相对较小,以提高计算精度;当 T 较大时,我们则希望时步长度 τ 相对大一些,以提高计算速度. 但如果对于任意的 τ, M 都固定不变, τ 的变化势必使式(9)右边各项系数产生变化,从而使方程发生变化. 考虑到方程的系数 $K = \frac{M-h}{9\tau}$

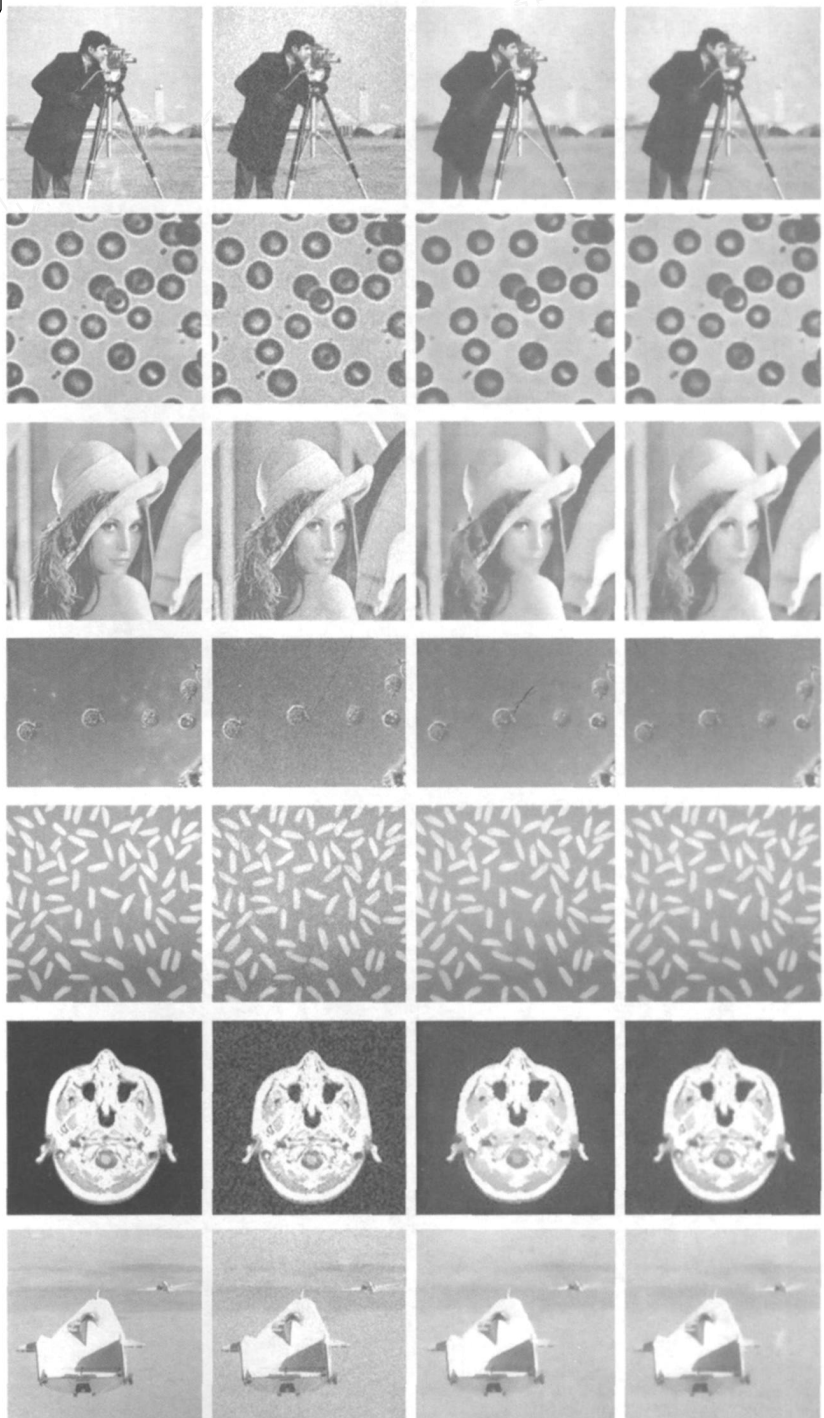


图5 LBADM和P-M模型的实验结果

为一常数,因此在实验中我们取 $t = \frac{M-h}{9K}$, 其中 K 为一常数. 这样可以通过 M 实现对 t 的调节. 为简单起见, 实验中我们实际设置 K 为 1.

4.3 评价与分析

为了定性的评价 LBADM 的有效性, 我们在标准图像中加入噪声, 将 P-M 模型和 LBADM 对噪声图像进行对比实验. 图 5 是我们采用 P-M 模型和 LBADM 分别对各种图像进行去噪的实验结果. 图 5 中各行的第一列为没有加入噪声的原图像; 第二列为加入方差为 30 的噪声后的图像; 第三列是采用 P-M 模型进行图像去噪的结果; 第四列为利用 LBADM 进行图像去噪的结果. 实验中 LBADM 和 P-M 模型的参数设置分别如表 1 和表 2 所示.

表 1 LBADM 参数设置

t	h	迭代次数	M	$g_i(r)$
0.11	1	200	1	$g_i(r) = \frac{1}{1 + \frac{ G^*(r,0) - G^*(r+hC_i,0) }{10}}$

表 2 P-M 模型参数设置

t	h	迭代次数	$c(\nabla)$
0.1	1	30	$c(\nabla) = \frac{1}{1 + \frac{ \nabla(G^*) }{10}}^2$

图 5 显示, LBADM 在去除图像噪声的同时能够很好的保持图像边缘. 与 P-M 模型不同的是, LBADM 的处理结果中图像的边缘过渡更加自然, 而 P-M 模型的处理结果中, 图像边缘显得更加尖锐. 由于没有后向扩散过程, LBADM 可以很好的消除图像灰度的“阶越”现象, 如图 6 所示. 图 6 中, 为了显示细节部分的效果, 我们选取了人物头部(图 6(a)和图 6(b)中的白色方框部分),



图 6 P-M 模型存在着一定的图像灰度的“阶越”现象

并放大显示. 其中, (a) 为 P-M 模型的处理结果; (b) 为本文提出的图像去噪算法的图像去噪效果; (c) 为图片 (a) 的头部放大图; (d) 为图片 (b) 的头部放大图. 图 6 (c) 中, 人物的眼睛以及头发与背景交界处等部位存在着一定的灰度的“阶越”, 而图 6 (d) 中这些部分的像素灰度值则过度的比较自然, 更接近实际情况. 由于模型中前向扩散过程占据了主导作用, 因此图像去噪后, LBADM 对图像的边缘有一定的平滑作用. 同时也正是因为 LBADM 前向扩散过程占据了主导作用, 其稳定性相对于 P-M 模型要更好.

为定量地评价 LBADM, 我们采用 lena 图像作为标准图像, 如图 7 所示.

通过对该标准图像加入具有不同方差的噪声, 我们得到了一组测试图像, 如图 8 所示. 其中, 方差 $\sigma^2 = 10, 20, 30, \dots, 100$.

实验中, 我们采用图像的峰值信噪比作为评价标准, 定义如下:



图 7 标准图像

$$PSNR = -10 \log \left[\frac{(\sigma(r, t) - I(r))^2}{255^2} \right] \quad (11)$$

其中, I 为未加入噪声的原始图像. 实验发现, 随着迭代次数的增加, 各向异性平滑的输出图像的信噪比会逐步达到一个最大值, 然后逐步下降(如图 9 所示). 因此在评价中, 当峰值信噪比达到最大值的时候, 停止迭代. 评价步骤如下:

- (1) 分别采用 LBADM, P-M 模型和 CDM 处理噪声污染图像, 得到输出图像 $LBM(r, t)$, $PM(r, t)$ 和 $CDM(r, t)$;
- (2) 根据 $PSNR(t) = -10 \log \left[\frac{(\sigma(r, t) - I(r))^2}{255^2} \right]$, 计算 $LBM(r, t)$, $PM(r, t)$ 和 $CDM(r, t)$ 的峰值信噪比;
- (3) 如果 $PSNR(t) > PSNR(t-1)$, 重复步骤(1)和(2);
- (4) 输出 $PSNR = PSNR(t)$.

按照以上步骤, 分别对图 8 中的各个噪声图像进行处理, 我们可以得到模型输出图像的峰值信噪比随噪声方差的变化曲线, 如图 10 所示.

当图像中噪声方差较小时, LBADM 和 P-M 模型几乎有相同的输出峰值信噪比, 而 CDM 模型的峰值信噪比相对较小; 但随着图像噪声方差的逐渐增大, P-M 模型的输出峰值信噪比下降的最大, CDM 输出峰值信噪比变化相对较为平缓. 与 P-M 和 CDM 模型相比, LBADM 的输出峰值信噪比受噪声的影响是最小的. 从图 10 可

以得出结论, LBADM 相对于 CDM 和 P-M 模型能够更好的去除噪声干扰, 处理结果也更加逼近于原图像.

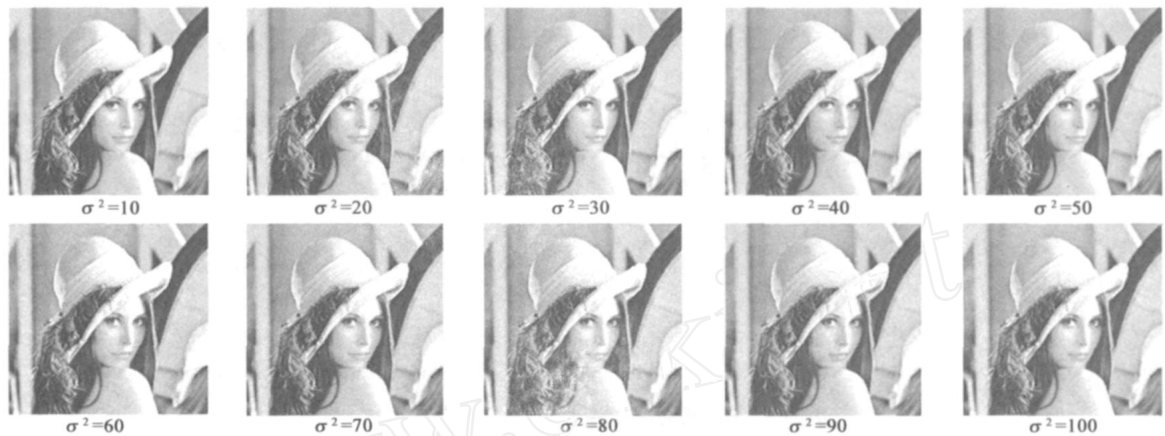


图8 测试图像

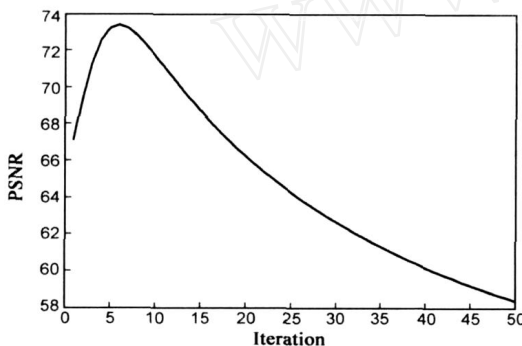


图9 随着迭代次数的增加, 各向异性平滑的输出图像的信噪比会在达到一个最大值后逐步下降

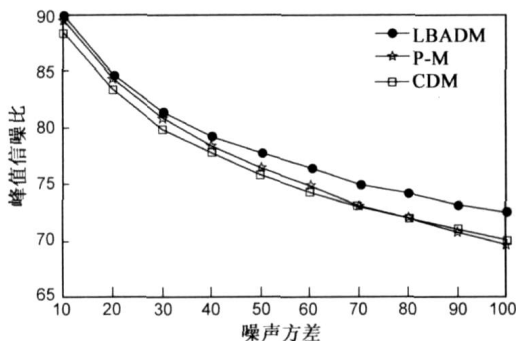


图10 输出图像的峰值信噪比随噪声方差的变化曲线

在图像处理速度上, 虽然 LBADM 与 P-M 相比较还是较慢, 但由于 LBADM 模型中每个元胞状态的变化都遵循相同的规则, 因此非常适合于并行图像处理系统的实现, 这将极大的提高图像处理的速度. 在图像数据庞大以及对图像处理实时性要求很高的场合下, 我们提出的 LBADM 模型有着很大的应用价值.

5 结论

本文中, 为了消除 P-M 模型的图像灰度“阶越”现象, 我们在 LBADM 的基础上, 通过在网格格点间加入跨膜介质, 建立了 LBADM 模型. 虽然该模型中跨膜介质限制了粒子的移动, 但从宏观上看, 粒子还是从高密度

区域向低密度区域扩散, 因而模型中只有前向扩散过程, 而不存在后向扩散过程. 根据 You 等人的分析可知, 模型的宏观方程是稳定的.

为了定性地评价 LBADM 的有效性, 我们在标准图像中加入噪声, 将 P-M 模型和 LBADM 对噪声图像进行对比实验. 实验结果显示, 本文算法在去除图像噪声的同时能够很好的保持图像边缘, 并且很好的解决了 P-M 模型存在的灰度“阶越”现象. 与 P-M 模型不同的是, 由于前向扩散过程的作用, LBADM 的处理结果中图像的边缘过渡更加自然, 而 P-M 模型的处理结果中, 图像边缘显得更加尖锐.

为定量地评价 LBADM, 我们采用 lena 图像作为标准图像, 通过对该标准图像加入具有不同方差的噪声, 得到了一组测试图像. 以峰值信噪比作为评价标准, 得到了 LBADM, CDM 和 P-M 模型输出图像的峰值信噪比随噪声方差的变化曲线. 评价结果显示, 当图像中噪声方差较小时, LBADM 和 P-M 模型几乎有相同的输出峰值信噪比, 而 CDM 模型的峰值信噪比相对较小, 但随着图像噪声方差的逐渐增大, P-M 模型的输出峰值信噪比下降的最大, CDM 输出峰值信噪比变化相对较为平缓. 与 P-M 和 CDM 模型相比, LBADM 的输出峰值信噪比受噪声的影响是最小的. 因此可以得出结论, LBADM 相对于 CDM 和 P-M 模型能够更好的去除噪声干扰, 处理结果也更加逼近于原图像.

附录

利用 Chapman-Enskog 展开式将粒子分布密度函数 (6) 展开为如下形式:

$$f_i = f_i^{(0)} + \epsilon f_i^{(1)} + \epsilon^2 f_i^{(2)} + \epsilon^3 f_i^{(3)} + \dots \quad (A1)$$

$$\text{并且} \quad \partial_x = \partial \quad (A2)$$

$$\partial_y = \partial \quad (A3)$$

$$\partial_t = \partial_t + \epsilon^2 \partial_{t_2} \quad (A4)$$

" $f_i^{(n)}$ " 是 n 阶修正项, 而 ϵ 是一个无穷小量. 并且

$$\begin{cases} f_i^{(0)}(\mathbf{r}, t) = f_i(\mathbf{r}, t) = g_i(\mathbf{r}) \\ f_i^{(n)}(\mathbf{r}, t) = 0, n > 0 \end{cases}$$

将式(4)左边对时间和空间泰勒展开到二阶无穷小,将(A1)~(A4)代入,并在在方程两边取 $O(\epsilon^2)$ 我们有:

$$t \frac{\partial}{\partial t_1} f_i^{(0)} + g_i(\mathbf{r}) \nu(C_i \cdot \nabla) f_i^{(0)} = - \frac{1}{t} f_i^{(1)} \quad (A5)$$

将式(A5)两边对 i 求和可以得到:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} = - \sum_i g_i(\mathbf{r}) \nu(C_i \cdot \nabla) f_i^{(0)} \quad (A6)$$

以及一阶修正项:

$$f_i^{(1)} = - \sum_i \nu(C_i \cdot \nabla) g_i(\mathbf{r}) f_i^{(0)} - g_i(\mathbf{r}) \nu(C_i \cdot \nabla) f_i^{(0)} \quad (A7)$$

同样,将式(4)左边对时间和空间泰勒展开到二阶无穷小,将式(A1)~(A4)代入,并在在方程两边取 $O(\epsilon^2)$,有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_2} + \sum_i \nu(C_i \cdot \nabla) f_i^{(1)} \\ = - \sum_i g_i(\mathbf{r}) \frac{1}{2} \nu^2(C_i \cdot \nabla)^2 f_i^{(0)} - \frac{1}{t} \sum_i g_i(\mathbf{r}) f_i^{(2)} \end{aligned} \quad (A8)$$

将式(A7)代入式(A8),有

$$\frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{1}{2} \nu^2 \sum_i g_i(\mathbf{r}) (C_i \cdot \nabla)^2 f_i^{(0)} - \frac{1}{t} \sum_i g_i(\mathbf{r}) f_i^{(2)} \quad (A9)$$

将式(A6)两边同时乘以 t ,将式(A9)两边同时乘以 t^2 ,并将结果相加,我们可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{M \hbar^2}{18 t} \sum_i g_i(\mathbf{r}) (C_i \cdot \nabla)^2 \\ - \frac{M \hbar}{9 t} \sum_i g_i(\mathbf{r}) (C_i \cdot \nabla) - \frac{2}{t} \sum_i g_i(\mathbf{r}) f_i^{(2)} \end{aligned} \quad (A10)$$

参考文献:

- [1] Koenderick I J. The structure of image[J]. Biological Cybernet, 1984, 50(5): 363 - 370.
- [2] Perona P and Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 7(12): 629 - 639.
- [3] Kichenassamy S. The Perona-Malik paradox[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1997, 57(5): 1328 - 1342.
- [4] Stewart L and Benhamouda B. A semidiscrete nonlinear scale-space theory and its relation to the Perona-Malik paradox[A]. Advances in Computer Vision[C]. New York: Springer-Verlag, 1997. 1 - 10.
- [5] Nitzberg M and Shiota T. Nonlinear image filtering with edge and corner enhancement [J]. IEEE Transactions on Pattern

Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(8): 826 - 833.

- [6] Rudin L I, Osher S, and Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60(1-4): 259 - 268.
- [7] Cattle F, Coll T, Lion P L, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(1): 182 - 193.
- [8] Chen Y, Bese P. On the incorporation of time-delay regularization into curvature-based diffusion[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2001, 14(2): 149 - 164.
- [9] Gilboa G, Sochen N A, Zeevi Y Y. Image enhancement and denoising by complex diffusion process [J]. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(8): 1020 - 1036.
- [10] You Y L, Xu W Y, A. Tannenbaum and M. Kaveh. Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, 5(11): 1539 - 1553.
- [11] Chen S Y, Chen H D, Martinez D, W. Matthaeus. Lattice Boltzmann model for simulation of magnetohydrodynamics [J]. Physics Review Letter, 1991, 67(27): 3776 - 3779.
- [12] Qian Y H, D. d'Humieres, P. Lallemand. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation[J]. Europhysics Letters, 1992, 17(6): 479 - 484.
- [13] Qian Y H. Fractional propagation and the elimination of staggered invariants in lattice-BGK models[J]. International Journal of Modern Physics C, 1997, 8(4): 753 - 761.
- [14] McNamara G R and Zanetti G. Use of the Boltzmann equation to simulate Lattice-Gas automata[J]. Physics Review Letter, 1988, 61(20): 2332 - 2335.

作者简介:



陈玉男, 1977年生于江苏省, 2004年获江苏大学硕士学位, 2008年获上海大学博士学位, 现为江苏大学电气信息工程学院讲师, 主要研究方向为元胞自动机以及基于偏微分方程的图像处理。

Email: chenyu@ujs.edu.cn

严壮志, 1961年生于江苏省南京市, 1983年毕业于天津大学电力及自动化系, 1984~1990年在日本京都大学电气工程专业攻读博士学位, 获得日本京都大学工学博士学位, 现任上海大学通信与信息工程学院副院长、教授和博士生导师, 兼生物医学工程研究所所长。主要研究方向是图像处理及其在生物医学中的应用、生命体征的无线移动监测系统及其应用。

Email: zzyan@shu.edu.cn

钱跃斌, 1990年获巴黎高等师范理学博士学位, 现为上海大学“长江学者奖励计划”特聘教授。Email: qian@shu.edu.cn