第 1 期 电 子 学 报 Vol.38 No.1
2010 年 1 月 ACTA ELECTRONICA SINICA Jan. 2010

求二部图的最大匹配图的一种算法

李 晶,王世英
(山西大学数学科学学院,山西太原 030006)

摘 要: 一个图的最大匹配图是以这个图的最大匹配集作为顶点集,两个顶点相邻当且仅当这两个最大匹配恰有一条边不同.本文首先对 Gallai-Edmonds 结构定理中的三部分顶点在二部图中进行了详细刻画.然后讨论了构造最大匹配图问题的计算复杂性.最后深入研究了二部图最大匹配图的结构性质并给出了构造二部图的最大匹配图的一种算法.

关键词: 最大匹配图;二部图;算法
中图分类号: O157.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 01-0161-06

An Algorithm for Constructing the Maximum Matching Graphs on Bigraphs

LI Jing, WANG Shi-ying
(*School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi* 030006, *China*)

Abstract: The maximum matching graph of a graph is that graph whose vertices are the maximum matchings and where two vertices are adjacent if and only if the two maximum matchings differ by exactly one edge. In this paper, we first study the structure of three kinds of vertices in the Gallai-Edmonds theorem on bigraphs. Then, we show the computational complexity of the problem of constructing maximum matching graphs. Finally, we study the structure of the maximum matching graphs and give an algorithm for constructing the maximum matching graphs on bigraphs.

Key words: maximum matching graph; bigraph; algorithm

1 引言

匹配理论作为图论和组合最优化最重要的内容之一,广泛的应用于理论和实际的研究.如资料分配,工作安排,时间分配和人员择偶等.解决这些问题将涉及到求最大匹配的算法.目前常见的算法只能求出一个最大匹配.很多时候,人们需要求出所有的最大匹配并了解它们之间的关系.

定义 1 简单图 G 的最大匹配图 $M(G)=(\nu,\varepsilon)$ 的顶点集 $\nu=\{M: M$ 是 G 的一个最大匹配$\}$,边集 $\varepsilon=\{M_1M_2: |M_1-M_2|=1\}$.最大匹配图作为一类变换图,首先由王世英与 Eroh 在 1998 年分别独立地提出并开始研究.王世英[1]研究了最大匹配图的结构性质.同年,Eroh[2]研究了最大匹配图的判别及多重匹配图的性质.近年来,人们相继研究了最大匹配图的围长、连通度和子图,进而给出了最大匹配图是树或完全图的条件;刻画了最大匹配图是正则图或圈的图,并且证明了二部图的最大匹配图的连通度等于它的最小度[3~6].但是有关最大匹配图算法方面的研究,目前尚未见到.

定义 2 称图 $G=(X\cup Y,E)$是二部图,若图 G 的顶点集可以分解成两个子集 X 和 Y,使得 G 的每一条边的两个端点分别在 X 和 Y 中.

定义 3 图 G 的一个匹配 M 是指 G 的一个边子集,它的元素是 G 中的边,并且这些边中的任意两条在 G 中均不相邻.若匹配 M 的某条边与顶点 v 关联,则称 M 饱和顶点 v,并且称 v 是 M 饱和的,否则称 v 是 M 未饱和的.若 G 的每个顶点均是 M 饱和的,则称 M 为 G 的完美匹配.若 G 没有另外的匹配 M',使得 $|M'|>|M|$,则称 M 为 G 的最大匹配.若 G 恰有一个顶点是 M 未饱和的,则称 M 为 G 的几乎完美匹配.

定义 4 图 G 的一个覆盖是指顶点集的一个子集 K,使得 G 的每条边都至少有一个端点在 K 中.一个覆盖 K 称为 G 的最小覆盖如果 G 没有覆盖 K',使得 $|K'|<|K|$.

定义 5 设 G_1,G_2 是图 G 的子图.若 G_1,G_2 没有公共顶点,则称它们是不相交的.G_1 和 G_2 的并图 $G_1\cup G_2$ 是指 G 的一个子图,其顶点集为 $V(G_1)\cup V(G_2)$,其边集为 $E(G_1)\cup E(G_2)$.如果 G_1 和 G_2 是不相交的,则

收稿日期:2008-01-03;修回日期:2009-04-19
基金项目:国家自然科学基金(No.60773131);山西省自然科学基金(No.2008011010)

记并图为 G_1+G_2.

定义 6 简单图 H_1 和 H_2 的积图是指具有顶点集 $V(H_1)\times V(H_2)$ 的简单图 $H_1\times H_2$,其中,(u,v)与(u',v')相邻,当且仅当或者 $u=u'$,且 $vv'\in E(H_2)$,或者 $v=v'$,且 $uu'\in E(H_1)$.

给定图 G,令 $D(G)$表示至少不能被 G 中某个最大匹配饱和的所有顶点的集合,$A(G)$表示至少与 $D(G)$中某点相邻的 $V(G)-D(G)$中所有点的集合,$C(G)=V(G)-D(G)-A(G)$.其它未给出的定义见文献[7].

定理 1[8] **(Gallai-Edmonds 结构定理)**

设 M 是 G 的任意一个最大匹配,$A(G)$,$C(G)$,$D(G)$如上述定义.则 M 包含 $G[D(G)]$的每个分支的一个几乎完美匹配,$G[C(G)]$的一个完美匹配并且将 $A(G)$中的每个点匹配到 $D(G)$中不同分支的点.

2 Gallai-Edmonds 结构定理中三部分顶点的详细刻画

引理 1[7] 在二部图中,最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数.

定理 2 在二部图最小覆盖中的任意两顶点之间的边不在任何最大匹配中.

证明 设 K 是二部图 G 的一个最小覆盖,点 $u,v\in K$,$(u,v)\in E(G)$.反证,设存在一个最大匹配 M 使得$(u,v)\in M$.由覆盖的定义,M 中每一条边都至少有一个端点在 K 中.又由于匹配中的边不相邻,故 $M-\{(u,v)\}$中每一条边都至少有一个端点在 $K-\{u,v\}$中.此时,$|K-\{u,v\}|=|K|-2$.因此 $M-\{(u,v)\}$中最多有$|K|-2$ 条边.从而 M 最多有 $|K|-2+1=|K|-1$ 条边.另一方面,由引理 1,$|M|=|K|$,矛盾. 证毕.

推论 1 二部图最小覆盖中每一个顶点都是所有最大匹配饱和的.

证明 设 K 是二部图 G 的任意一个最小覆盖,M 是图 G 的任意一个最大匹配.由覆盖的定义,M 中每一条边都至少有一个端点在 K 中.又由定理 2 可得 M 中每一条边恰有一个端点在 K 中.最后由引理 1,$|K|=|M|$,故 M 饱和了 K 中所有顶点. 证毕.

在以下的讨论中图 G 是指没有孤立点的简单二部图 $G=(X\cup Y,E)$,其中 $X=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$,$Y=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$.设 M 是图 G 的任意一个最大匹配.V_0 是 G 中 M 未饱和点集合,$X_0=V_0\cap X$,$Y_0=V_0\cap Y$.V_1 是由 M 交错路连接到 X_0 中顶点的 $V(G)\setminus V_0$ 中顶点集合,$X_1=V_1\cap X$,$Y_1=V_1\cap Y$.V_2 是由 M 交错路连接到 Y_0 中顶点的 $V(G)\setminus V_0$ 中顶点集合,$X_2=V_2\cap X$,$Y_2=V_2\cap Y$.设 $X_3=X-X_0-X_1-X_2$,$Y_3=Y-Y_0-Y_1-Y_2$,$V_3=X_3\cup Y_3$.

引理 2 $X_i\cap X_j=\varnothing$,$Y_i\cap Y_j=\varnothing$,其中 $i\neq j$,$i,j\in\{0,1,2,3\}$.

证明 由 X_0 是 X 中 M 未饱和点集合,有 $X\setminus X_0=X_1\cup X_2\cup X_3$ 是 M 饱和点集合.因此 $X_0\cap X_i=\varnothing$,$i=1,2,3$ 是显然的.由定义 $X_3=X-X_0-X_1-X_2$,故 $X_3\cap X_i=\varnothing$,$i=0,1,2$.下面只需证 $X_1\cap X_2=\varnothing$.若 $X_1\cap X_2\neq\varnothing$,则存在点 $u\in X_1\cap X_2$.因为 $u\in X_1$,所以存在一条以 $u_0\in X_0$ 为起点,u 为终点的 M 交错路 $P_1=u_0v_s\cdots u$.又因为 $u\in X_2$,所以存在一条以 $v_0\in Y_0$ 为起点,u 为终点的 M 交错路 $P_2=v_0u_t\cdots u$.设 $Q=V(P_1)\cap V(P_2)$.因为 $u\in Q$,所以 $Q\neq\varnothing$.设 x 是路 P_2 上第一个属于 Q 中的点.若 $x\in X$,则 P_1 中(u_0,x)节为 $P_1'=u_0v_s\cdots v_rx$,P_2 中(v_0,x)节为 $P_2'=v_0u_t\cdots v_lx$.由 x 的取法,$V(P_1')\cap V(P_2')=\{x\}$.因为 u_0,v_0 都是 M 未饱和的,故(u_0,v_s),$(v_0,u_t)\notin M$.此时,由 $u_0,x\in X$,$v_0\in Y$ 知,P_1' 是一条交错偶路,P_2' 是一条交错奇路.因此$(v_r,x)\in M$,$(v_l,x)\notin M$.从而 $P_1'(P_2')^{-1}=u_0v_s\cdots v_rxv_l\cdots v_0$ 是一条 M 交错路且起点和终点都是 M 未饱和的.即 $P_1'(P_2')^{-1}$是一条 M 增广路,这与 M 是最大匹配矛盾.若 $x\in Y$,则设 u_r 是 x 在路 P_1 上下一个点.令 $P_1'=u_0\cdots xu_r$ 是 P_1 中(u_0,u_r)节,$P_2'=v_0\cdots u_lx$ 是 P_2 中(v_0,x)节.因为 P_1',P_2' 都是交错偶路,所以$(x,u_r)\in M$,$(u_l,x)\in M$.因此,$u_r=u_l$.从而 $u_l\in Q$,与 x 是路 P_2 上第一个属于 Q 的点矛盾.因此 $X_1\cap X_2=\varnothing$.同理可证,$Y_i\cap Y_j=\varnothing$,其中 $i\neq j$,$i,j\in\{0,1,2,3\}$. 证毕.

定义 7 设图 $G=(X\cup Y,E)$,M 是 G 的一个最大匹配.若 X_i 和 Y_i($i=0,1,2,3$)的定义如上,则称 $X_0\cup X_1\cup X_2\cup X_3$ 是 X 的 M 分解,$Y_0\cup Y_1\cup Y_2\cup Y_3$ 是 Y 的 M 分解.

引理 3 顶点集合 $K_1=X_2\cup X_3\cup Y_1$ 和 $K_2=Y_1\cup Y_3\cup X_2$ 是二部图 G 的两个最小覆盖.

证明 设 $e\in E(G)$是 G 的任意一条边,e 在 X 中的端点为 u.若 $u\in X_2\cup X_3$,则 $u\in K_1$.若 $u\in X_0\cup X_1$,则由 $N(X_0)\subseteq Y_1$,$N(X_1)\subseteq Y_1$,知以 u 为端点的边的另一个端点一定在 Y_1 中.特别地,e 的另一个端点 $v\in Y_1\subseteq K_1$.综上,e 至少有一个端点在 K_1 中.即 K_1 是图 G 的一个覆盖.由引理 1,有$|K_1|\geqslant|M|$.另一方面,注意到 $X_2\cup X_3\cup Y_1\subseteq V(G)\setminus V_0$ 中顶点都是 M 饱和的.由 X_1,Y_1 的定义,知 Y_1 中顶点的 M 配对点在 X_1 中.又由引理 2,$X_1\cap(X_2\cup X_3)=\varnothing$,故$[Y_1,X_2\cup X_3]\cap M=\varnothing$.因此 K_1 中每一个顶点是 M 饱和的且被 M 中互不相同的边饱和.从而$|K_1|\leqslant|M|$.因此$|K_1|=|M|$.由引理 1,K_1 是图 G 的最小覆盖.同理可证 K_2 也是图 G 的最小覆盖. 证毕.

定理 3　设图 G 是一个没有孤立点的简单二部图,$A(G)$,$C(G)$,$D(G)$和 $X_i,Y_i(i=0,1,2,3)$的定义如上.则

(ⅰ)$D(G)=X_0\cup X_1\cup Y_0\cup Y_2$.

(ⅱ)$A(G)=X_2\cup Y_1$.

(ⅲ)$C(G)=X_3\cup Y_3$.

证明:

(ⅰ)先证 $D(G)\subseteq X_0\cup X_1\cup Y_0\cup Y_2$.设 $K_1=X_2\cup X_3\cup Y_1$,$K_2=Y_1\cup Y_3\cup X_2$.由引理 3,K_1,K_2 都是 G 的最小覆盖.由推论 1,K_1,K_2 中每个顶点都是所有最大匹配饱和的.因此 $K_1\cup K_2\subseteq A(G)\cup C(G)$.即 $X_2\cup X_3\cup Y_1\cup Y_3\subseteq A(G)\cup C(G)$.进而$(X-X_2-X_3)\cup(Y-Y_1-Y_3)\supseteq D(G)$.即 $D(G)\subseteq(X_0\cup X_1)\cup(Y_0\cup Y_2)$.

下证 $D(G)\supseteq X_0\cup X_1\cup Y_0\cup Y_2$.由定义,有 $X_0\cup Y_0\subseteq D(G)$.设 $u_1\in X_1$,则存在一条以点 $u_0\in X_0$ 为起点,u_1 为终点的 M 交错偶路 P.令 $M'=M\Delta E(P)$,则 M'是 G 的另一个最大匹配且不饱和 u_1.因此 $u_1\in D(G)$,进而 $X_1\subseteq D(G)$.同理 $Y_2\subseteq D(G)$.从而 $X_0\cup Y_0\cup X_1\cup Y_2\subseteq D(G)$.综上,$D(G)=X_0\cup Y_0\cup X_1\cup Y_2$.

(ⅱ)先证 $A(G)\subseteq Y_1\cup X_2$.设 K 是 G 的任意一个最小覆盖,下证 $A(G)\subseteq K$.若 $A(G)\not\subseteq K$,则存在一点 $x\in A(G)$且 $x\notin K$.由于 G 的每一条边至少有一个端点在 K 中,故 $N(x)\subseteq K$.由推论 1,K 中顶点是所有最大匹配饱和的.因此 $K\cap D(G)=\varnothing$.从而 $N(x)\cap D(G)=\varnothing$.这与 $x\in A(G)$矛盾.因此 $A(G)\subseteq K$.由引理 3,K_1,K_2 是图 G 的两个最小覆盖.因此 $A(G)\subseteq K_1$,$A(G)\subseteq K_2$.进而 $A(G)\subseteq K_1\cap K_2=Y_1\cup X_2$.

下证 $A(G)\supseteq Y_1\cup X_2$.由推论 1,任意一点 $v_1\in Y_1\subseteq K_1$ 是所有最大匹配饱和的.因此 $v_1\in A(G)\cup C(G)$.因为 v_1 是 M 饱和的,所以存在点 $u_1\in X$ 使得$(u_1,v_1)\in M$.由 Y_1 和 X_1 的定义,知 $u_1\in X_1$.由(ⅰ),有 $X_1\subseteq D(G)$.因此,v_1 同 $D(G)$中顶点相邻.由 $A(G)$的定义,有 $v_1\in A(G)$.进而 $Y_1\in A(G)$.同理可证 $X_2\in A(G)$.进而 $Y_1\cup X_2\subseteq A(G)$.综上,$A(G)=Y_1\cup X_2$.

(ⅲ)由(ⅰ),(ⅱ)和定义易得.　　证毕.

推论 2　$D(G)$是独立集.

证明　由定理 3(ⅰ),$D(G)=X_0\cup X_1\cup Y_0\cup Y_2$.若$[X_0,Y_0]\neq\varnothing$,则由 X_0,Y_0 的定义,任意边$(u_0,v_0)\in[X_0,Y_0]$是一条 M 增广路,矛盾.因此,$[X_0,Y_0]=\varnothing$.若$[X_0,Y_2]\neq\varnothing$,则设$(u_0,v_t)\in[X_0,Y_2]$.因为 $v_t\in Y_2$,所以 G 中存在一条起点为 $v_0\in Y_0$,终点为 v_t 的 M 交错偶路 $P=v_0\cdots u_sv_t$,其中$(u_s,v_t)\in M$.此时,$u_0v_tP^{-1}$是一条 M 增广路,矛盾.因此$[X_0,Y_2]=\varnothing$.同理,$[X_1,Y_0]=\varnothing$,$[X_1,Y_2]=\varnothing$.从而顶点集 X_0,X_1,Y_0 和 Y_2 两两之间无边.又由于 G 是二部图,同一集合内任意两点之间无边,故 $D(G)$是独立集.　　证毕.

推论 3　$X_2\cup Y_1$ 是图 $G'=G-C(G)-E(G[A(G)])$的最小覆盖.

证明　由推论 2,$D(G)$是独立集.不难看出,G'是以$(A(G),D(G))$为二分划的二部图.由定理 3(ⅱ),$A(G)=X_2\cup Y_1$.从而 $X_2\cup Y_1$ 是图 G'的一个覆盖.由定理 1,G'的最大匹配的边数为$|A(G)|=|X_2\cup Y_1|$.又由引理 1 可知 $X_2\cup Y_1$ 是 G'的一个最小覆盖.　　证毕.

3　计算复杂性和算法设计

二部图最大匹配图构造问题:给定二部图 $G=(X\cup Y,E)$,如何构造图 G 的最大匹配图?

二部图最大匹配图判定问题:给定二部图 $G=(X\cup Y,E)$和图 H,H 是否是图 G 的最大匹配图?

若存在一个算法可解决最大匹配图构造问题,则利用该算法可以解决判定问题.因此构造问题不会比判定问题简单.在文献[9]中,Valiant 证明了计算二部图的完美匹配数目问题是 NP-Hard 的.因为完美匹配是最大匹配的特例,所以计算二部图的最大匹配数目问题是 NP-Hard 的.这也说明二部图最大匹配图判定问题是 NP-Hard 的.对于二部图最大匹配图判定问题是不是 NP 的,我们一无所知.因为对于二部图最大匹配图判定问题的一个是实例,除了列举所有最大匹配外,不知道是否有较短证明.列举自然不是简短证明.综上,二部图最大匹配图构造问题是 NP-Hard 的.因此要构造一个图的最大匹配图是一件比较困难的事情.

3.1　二部图最大匹配图的结构性质

图 $G=(X\cup Y,E)$是没有孤立点的简单二部图,M 是 G 的一个最大匹配.$X_0\cup X_1\cup X_2\cup X_3$ 是 X 的 M 分解,$Y_0\cup Y_1\cup Y_2\cup Y_3$ 是 Y 的 M 分解.记 $G'=G-C(G)-E(G[A(G)])$,$G_1=G[X_0\cup X_1\cup Y_1]$,$G_2=G[Y_0\cup X_2\cup Y_2]$.我们有

引理 4　$G'=G_1+G_2$

证明　由定理 3(ⅲ),$V(G')=X_0\cup X_1\cup Y_1\cup Y_0\cup X_2\cup Y_2=V(G_1)\cup V(G_2)$.由定理 3(ⅰ)和推论 2,有$[X_0\cup X_1,Y_0\cup Y_2]=\varnothing$.此时,由定理 3(ⅱ)和 G'的定义,$E(G')=[X_0\cup X_1\cup X_2,Y_0\cup Y_1\cup Y_2]-[X_2,Y_1]=[X_0\cup X_1,Y_1]\cup[X_2,Y_0\cup Y_2]=E(G_1)\cup E(G_2)$.因此,$G'=G_1\cup G_2$.由引理 2,$V(G_1)\cap V(G_2)=(X_0\cup X_1\cup Y_1)\cap(Y_0\cup X_2\cup Y_2)=\varnothing$.因此,$G_1$ 和 G_2 不相交.从而 $G'=G_1+G_2$.　　证毕.

推论 4　设 L,L_1 和 L_2 分别是图 G',G_1 和 G_2 的最大匹配集合,则 $L=\{M_1\cup M_2:M_1\in L_1,M_2\in L_2\}$.

注意到对任意 $M_1\in L_1$,$M_2\in L_2$ 有 $M_1\cap M_2=\varnothing$,因此,$M_1\cup M_2$ 和(M_1,M_2)是一一对应的.为方便,在下

面,我们把 $M_1 \cup M_2$ 认为是(M_1, M_2).

推论 5 图 G', G_1 和 G_2 的最大匹配的边数分别为 $|X_2|+|Y_1|$, $|Y_1|$和$|X_2|$.

证明 设 M', M_1 和 M_2 分别是图 G', G_1 和 G_2 的最大匹配.由引理 4 有,$|M'|=|M_1|+|M_2|$.由推论 3 和引理 1 有,$|M'|=|X_2|+|Y_1|$.因为 $G_1=G[X_0 \cup X_1 \cup Y_1]$在 Y 中的顶点集合为 Y_1,所以$|M_1| \leqslant |Y_1|$.因为 G_2 在 X 中的顶点集合为 X_2,所以$|M_2| \leqslant |X_2|$.因此,$|M_1|=|Y_1|$, $|M_2|=|X_2|$. 证毕.

定理 4 设 G 是一个没有孤立点的简单二部图,$A(G)$, $C(G)$, $D(G)$, X_i, Y_i, $i=0,1,2,3$ 和 G', G_1, G_2 的定义如上.若 H_1, H_2 分别是图 G_1, G_2 的最大匹配图,则图 G'的最大匹配图 H 是 H_1 和 H_2 的积图.

证明 由推论 4 易知 $V(H)=V(H_1)\times V(H_2)$成立.任取 H 中两个顶点 M_1, M_2,这两个顶点对应图 G'的两个最大匹配.令 $M_1^1=M_1 \cap E(G_1)$, $M_1^2=M_1 \cap E(G_2)$,则 $M_1=(M_1^1, M_1^2)$.由引理 4 有 $G'=G_1+G_2$.因此,M_1^1, M_1^2 分别是图 G_1, G_2 的最大匹配.令 $M_2^1=M_2 \cap E(G_1)$, $M_2^2=M_2 \cap E(G_2)$,则 $M_2=(M_2^1, M_2^2)$.同理,M_2^1, M_2^2 也分别是图 G_1, G_2 的最大匹配.由 H 的定义知,$(M_1, M_2)\in E(H)$当且仅当$|M_1-M_2|=1$.这等价于 $M_1^1=M_2^1$,且$|M_1^2-M_2^2|=1$,或者 $M_1^2=M_2^2$,且$|M_1^1-M_2^1|=1$.这也就是说,$M_1^1=M_2^1$,且$(M_1^2, M_2^2)\in E(H_2)$,或者 $M_1^2=M_2^2$,且$(M_1^1-M_2^1)\in E(H_1)$.由积图的定义,不难看出 H 是 H_1 和 H_2 的积图. 证毕.

引理 5[3] 图 $G-C(G)-E(G[A(G)])$的最大匹配图是连通的,且与图 G 的最大匹配图的每一个分支同构.

推论 6 图 G_1, G_2 的最大匹配图的积图是连通的,且与图 G 的最大匹配图的每一个分支同构.

记 mc 是图$G[C(G)]$的完美匹配的个数.特别地,若 $C(G)=\varnothing$,则令 $mc=1$.

定理 5[1] 若图 $G[C(G)]$有 mc 个完美匹配,则图 G 的最大匹配图由 mc 个同构的连通分支组成.

根据以上的定理和推论,我们构造图 G 的最大匹配图.首先,我们将分别找出图 G_1, G_2 和 $G_3=G[C(G)]$的所有最大匹配.

3.2 构造与最大匹配对应的顶点序列

设 $Y_1=\{y_1, y_2, \cdots, y_{|Y_1|}\}$, $X_2=\{x_1, x_2, \cdots, x_{|X_2|}\}$, $X_3=\{z_1, z_2, \cdots, z_{|X_3|}\}$.由引理 1 和 3 知,$|Y_1 \cup X_2 \cup X_3|=|K_1|=|M|$.对 K_1 中每一个顶点我们建立一个顶点集合如下:

$$T_i=\begin{cases} T(y_i)=N(y_i)\cap(X_0 \cup X_1), \\ \qquad 1 \leqslant i \leqslant |Y_1| \\ T(x_{i-|Y_1|})=N(x_{i-|Y_1|})\cap(Y_0 \cup Y_2), \\ \qquad |Y_1|+1 \leqslant i \leqslant |Y_1|+|X_2| \\ T(z_{i-|Y_1|-|X_2|})=N(z_{i-|Y_1|-|X_2|})\cap Y_3, \\ \qquad |X_2|+|Y_1|+1 \leqslant i \leqslant |M| \end{cases} \tag{1}$$

令顶点序列集合 $S_1=\{u_1 u_2 \cdots u_{|Y_1|}: u_i \in T_i\}$,其中 $u_i \neq u_j$, $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,\cdots,|Y_1|\}$.我们有

定理 6 S_1 中顶点序列与图 G_1 的最大匹配是一一对应的.

证明 对任意 $u_1 u_2 \cdots u_{|Y_1|}\in S_1$,定义映射 $f: u_1 u_2 \cdots u_{|Y_1|} \to \{(u_1, y_1), (u_2, y_2), \cdots, (u_{|Y_1|}, y_{|Y_1|})\}$.对每个 $i \in \{1,2,\cdots,|Y_1|\}$,因为 $y_i \in Y_1$, $u_i \in T(y_i) \subseteq X_0 \cup X_1$,所以$(u_i, y_i)\in E(G_1)$.又因为 $u_1, u_2, \cdots, u_{|Y_1|}$和 $y_1, y_2, \cdots, y_{|Y_1|}$都是互不相同的,所以边集合 $M'=\{(u_i, y_i), i=1,2,\cdots,|Y_1|\}$是图 G_1 的一个匹配且$|M'|=|Y_1|$.由推论 5 知,M'是最大匹配.设 $u_1' u_2' \cdots u_{|Y_1|}'$是 S_1 中一个不同于 $u_1 u_2 \cdots u_{|Y_1|}$的序列,则至少存在点 $u_i' \neq u_i$.从而两个序列分别对应的两个最大匹配至少有一条边$(u_i', y_i)\neq(u_i, y_i)$.因此映射 f 是单射.另一方面,设 M'是图 G_1 的一个最大匹配,由推论 5 可得$|M'|=|Y_1|$.因为 $V(G_1)\cap Y=Y_1$,所以任意边$(u, v)\in M'$满足 $v \in Y_1$, $u \in N(v)$.注意到$[X_2, Y_1]$和$[X_3, Y_1]$中都无边,从而 $u \in T(v)$.此时,M'中的每一条边在 X 中的端点分别是 T_1, T_2, $\cdots$, $T_{|Y_1|}$中一个顶点,记为 $u_1, u_2, \cdots, u_{|Y_1|}$.因为匹配中的边不相邻,所以 $u_i \neq u_j$, $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,\cdots,|Y_1|\}$.从而 $u_1 u_2 \cdots u_{|Y_1|}\in S_1$.因此,映射 f 是满射.综上,S_1 中顶点序列与图 G_1 的最大匹配是一一对应的. 证毕.

令顶点序列 $S_2=\{v_1 v_2 \cdots v_{|X_2|}: v_i \in T_{|Y_1|+i}$且 $v_i \neq v_j, i \neq j, i, j \in \{1,2,\cdots,|X_2|\}\}$, $S_3=\{v_1 v_2 \cdots v_{|X_3|}: v_i \in T_{|Y_1|+|X_2|+i}$且 $v_i \neq v_j, i \neq j, i, j \in \{1,2,\cdots,|X_3|\}\}$.类似定理 6,我们有

定理 7 S_2 中顶点序列与图 G_2 的最大匹配是一一对应的,S_3 中顶点序列与图 G_3 的最大匹配是一一对应的.

算法 1

输入:图 G_i, $i \in \{1,2,3\}$和 T_i, $i \in \{1,2,\cdots,|M|\}$.

输出:图 G_i 所有最大匹配对应的顶点序列集合 S.

step1 若输入的图是 G_1,则置 $T:=T_1$, $L:=|Y_1|$和 $r:=0$;若输入的图是 G_2,则置 $T:=T_{|Y_1|+1}$, $L:=|X_2|$, $r:=|Y_1|$;若输入的图是 G_3,则置 $T:=T_{|Y_1|+|X_2|+1}$, $L:=|X_3|$, $r:=|Y_1|+|X_2|$.

step2 置 $S:=\varnothing$, $S':=\varnothing$.若 $L=0$,则输出 S,算

法停止.否则对 T 中每一个元素 x,构造一个只有一个顶点的序列 $c := x$,置 $S := S\cup\{c\}$,序列 c 的长度 $l(c):=1$.

step3　若 $S\neq\varnothing$,则取 S 中一个序列 c.否则,置 $S := S'$, $S' = \varnothing$.转 step3.

step4　若 $l(c):=L$,则输出 S,算法停止.否则,置 $C := \{x_i : x_i$ 是 c 中第 i 元素, $i=1,2,\cdots,l(c)\}$, $Q := \{x : x\in T_{r+l(c)+1} - C\}$.

step5　若 $Q\neq\varnothing$,则对 Q 中每一个元素 x,构造一个序列 cx, $S' := S'\cup\{cx\}$, $l(cx) := l(c)+1$.

step6　$S := S-\{c\}$.转入 step3.

定理 8　当输入的图为 G_i, $i\in\{1,2,3\}$时,算法 1 输出的集合是 S_i.

证明　考虑输入的图是 G_1 的情况.设 S 是算法 1 的输出.任取 $u_1u_2\cdots u_l\in S$.由算法 1 步骤 3 和步骤 5 知, S' 中序列的长度都是相等的.又由步骤 3 的赋值 $S := S'$ 有 S 中序列的长度也都是相等的.由步骤 4,当算法停止时, S 中的序列长度 $l = |Y_1|$.又由步骤 4 知, $u_i \neq u_j$, $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,\cdots,|Y_1|\}$.因此,由 S_1 的定义, $u_1u_2\cdots u_l\in S_1$.另一方面,因为我们采取的是遍历搜索,所以 S_1 中任意一个序列在 S 中.因此, $S=S_1$.同理可证,当输入的图分别是 G_2, G_3 时,算法 1 输出的集合分别是 S_2, S_3.　证毕.

3.3　利用顶点序列构造最大匹配图

算法 2

输入:一个没有孤立点的简单二部图 G.

输出:图 G 的最大匹配图 H.

step1　给图 G 的顶点标号,执行匈牙利算法(见文献[7])找到图 G 的一个最大匹配 M.

step2　找出顶点集合 X_0, X_1, X_2, X_3 和 Y_0, Y_1, Y_2, Y_3.置 $K := X_2\cup X_3\cup Y$,按式(1)建立 $|K| = |M|$ 个顶点集合 T_i, $i=1,2,\cdots,|M|$.

step3　置 S_1, S_2, S_3 分别为算法 1 对输入图是 G_1, G_2, G_3 时的输出.置 $m_1 := |S_1|$, $m_2 := |S_2|$.若 $S_3\neq\varnothing$,则置 $m_3 := |S_3|$;否则置 $m_3 := 1$.

step4　若 $m_1\neq 0$,构造图 H_1,使得其顶点集为 S_1.两个顶点 $c_1, c_2\in S_1$ 之间有边当且仅当 c_1 和 c_2 只有一个对应位置元素不同.若 $m_2\neq 0$,构造图 H_2,使得其顶点集为 S_2.两个顶点 $d_1, d_2\in S_2$ 之间有边当且仅当 d_1 和 d_2 只有一个对应位置元素不同.

step5　若 $m_1 = 0 = m_2$,置图 H 是以顶点集为 S_3 的空图,输出 H,算法停止.若 $m_1\neq 0$ 且 $m_2 = 0$,置 $H' := H_1$.若 $m_1 = 0$ 且 $m_2\neq 0$,置 $H' := H_2$.若 $m_1\neq 0$ 且 $m_2\neq 0$,置 H' 是 H_1 和 H_2 的积图.

step6　置图 H 是 m_3 个 H' 的不相交的并图.输出 H,算法停止.

定理 9　算法 2 输出的图 H 是图 G 的最大匹配图.

证明　若算法在第步骤 5 停止,则图 $G = G_3 = G[C(G)]$.因此图 G 的最大匹配是完美匹配.由最大匹配图的定义,图 G 的最大匹配图是 m_3 个顶点的空图.若算法在步骤 6 停止,由定理 6,定理 7 和最大匹配图的定义,按算法 2 步骤 4 构造的图 H_1, H_2 分别是图 G_1, G_2 的最大匹配图.由定理 4,步骤 5 构造的图 H' 是图 G' 的最大匹配图.最后由引理 5 和定理 5,步骤 6 构造出的图 H 是图 G 的最大匹配图.　证毕.

4　实例分析

图 1 是一个二部图,实线表示用匈牙利算法在多项式时间内找到二部图的一个最大匹配 M.虚线是不在 M 中的边.

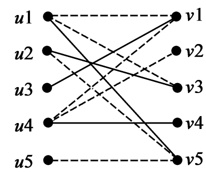

图1　简单二部图G

此时, $X_0 = \{u_5\}$, $X_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$, $X_2 = \{u_4\}$, $X_3 = \varnothing$, $Y_0 = \{v_2\}$, $Y_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$, $Y_2 = \{v_4\}$, $Y_3 = \varnothing$.从而 $K = X_2\cup X_3\cup Y_1 = \{u_4, v_1, v_3, v_5\}$, $G_1 = G[\{u_5, u_1, u_2, u_3, v_1, v_3, v_5\}]$, $G_2 = G[\{u_4, v_2, v_4\}]$, $G_3 = \varnothing$.建立 $|K| = 4$ 个顶点集合如图 2 所示.

T_1	T_2	T_3	T_4
(u_1,u_3)	(u_1,u_2)	(u_1,u_2,u_5)	(v_2,v_4)

图2

根据算法 1, S_1 和 S_2 的顶点序列构造过程如图 3 所示($S_3 = \varnothing$).

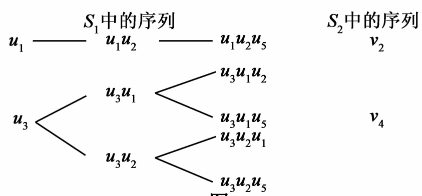

图3

由算法 2 步骤 4,利用 S_1, S_2 的顶点序列构造 G_1, G_2 的最大匹配图 H_1 和 H_2 如图 4 所示.

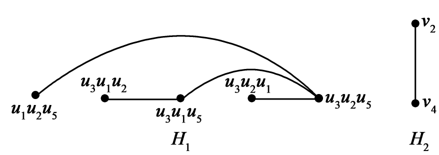

图4

由算法 2 步骤 5 和步骤 6,构造图 G 的最大匹配图如图 5 所示.

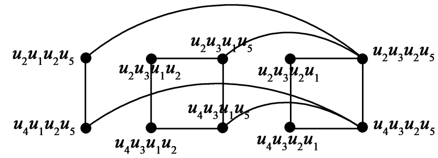

图5　图G的最大匹配图

参考文献：

[1] Wang Shiying, Liu Yan, et al. On the maximum matching graph of a graph[J]. OR Transactions, 1998, 2(2): 13 - 17.

[2] L Eroh, M Schultz. Matching graphs[J]. Journal of Graph Theory, 1998, 29(2): 73 - 86.

[3] Liu Yan, Lin Yixun, et al. The girth of maximum matching graphs[J]. OR Transactions, 2001, 5(1): 13 - 20.

[4] Liu Yan, Wang Shiying. The connectivity of maximum matching graphs[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2004, 17(1): 33 - 38.

[5] Liu Yan. Characterization of maximum matching graphs of certain types[J]. Discrete Mathematics, 2005, 290(2 - 3): 283 - 289.

[6] Liu Yan. Sub graphs of maximum matching graphs[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2004, 35(9): 1063 - 1067.

[7] J A Bondy, U S R Murty. Graph Theory with Applications [M]. London: The Macmillan Press Ltd, 1976.

[8] L Lovasz, M D Plummer. Matching Theory[M]. New York: Elsevier Science Publishing Company, Inc, 1986.

[9] L G Valiant. The complexity of computing the permanent[J]. Theoretical Computer Science, 1979, 8(2): 189 - 201.

作者简介：

李 晶 女，1983 年生于湖南怀化. 2005 年毕业于山西大学数学科学学院. 现为山西大学数学科学学院博士生. 从事网络拓扑结构及算法方面的研究.

王世英 男，1961 年生于山西省晋中市. 教授、博士生导师、美国数学评论评论员和中国运筹学会理事. 1990 年在陕西师范大学获理学学士学位，1993 年在陕西师范大学获理学硕士学位，2000 年在郑州大学获理学博士学位，2002 年在华中科技大学获博士后证书. 现为山西大学数学与应用数学研究所副所长. 主要从事算法、网络和 DNA 计算等方面的研究工作.

E-mail: shiying@sxu.edu.cn

(上接第 171 页)

[2] W H Hsu, L S Kennedy, S-F Chang. Reranking methods for visual search[J]. IEEE Transactions on Multimedia, 2007, 14(3): 14 - 22.

[3] T H Haveliwala. Topic-sensitive pageRank: A context-sensitive ranking algorithm for web search[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2003, 15(4): 784 - 796.

[4] A Haubold, A Natsev, M R Naphade. Semantic multimedia retrieval using lexical query expansion and model-bBased reranking[A]. IEEE International Conference on Multimedia and Expo[C]. Toronto, Canada: IEEE, 2006. 882 - 891.

[5] R Yan, A G Hauptmann. Co-retrieval: A boosted reranking approach for video retrieval[A]. IEE Proceedings of Vision, Image and Signal Processing [C], United Kingdom: IET, 2005. 888 - 895.

[6] G Shafer. A Mathematical Theory of Evidence[M]. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1976.

[7] D P Huttenlocher, G A Klanderman, W J Rucklidge. Comparing images using the hausdorff distance[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1993, 15(9): 850 - 863.

[8] C Petersohn. Fraunhofer HHI at TRECVID 2004: Shot Boundary Detection System [DB/OL]. http://www.nlpir.nist.gov/projects/tvpubs/ tvpapers04/fraunhofer.pdf, 2004

[9] S K Wei, et al. BJTU TRECVID 2006 Video Retrieval System [DB/OL]. http://www-nlpir. nist. gov/projects/tvpubs/tv. pubs. org. html, 2006.

[10] C G M Snoek, M Worring, J C van Gemert, J M Geusebroek, A W M Smeulders. The challenge problem for automated detection of 101 semantic concepts in multimedia[A]. Proceedings of the 14th annual ACM international conference on Multimedia[C]. Santa Barbara, CA, USA: ACM, 2006. 421 - 430.