

一种变步长凸组合自适应滤波器及其均方性能分析

于 霞¹, 刘建昌^{1,2}, 李鸿儒^{1,2}

(1. 东北大学流程工业综合自动化教育部重点实验室, 辽宁沈阳 110004;

2. 东北大学信息科学与工程学院, 辽宁沈阳 110004)

摘要: 在分析凸组合最小均方(CLMS)算法性能的基础上,提出一种新的变步长凸组合最小均方(VSCLMS)算法.该算法采用一种变步长滤波器替代原 CLMS 滤波器组中的恒值大步长滤波器,使新的自适应滤波器能够在噪声、时变,甚至非平稳的环境下保持良好的随动性能,并在收敛的各个阶段均保持快速且稳定的均方特性.理论推导与仿真分析分别验证了新算法与原 CLMS 算法相比不仅有更快的收敛速度,而且稳态均方性能与跟踪性能也有所提高.

关键词: 自适应滤波; CLMS 算法; 变步长; 凸组合

中图分类号: TP802 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 02-0480-05

A Convex Combination of Variable Step-size Adaptive Filter and Its Mean-Square Performance Analysis

YU Xia¹, LIU Jian-chang^{1,2}, LI Hong-ru^{1,2}

(1. Key Laboratory of Integrated Automation of Process Industry, Northeastern University, Ministry of Education, Shenyang, Liaoning 110004, China;

2. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang, Liaoning 110004, China)

Abstract: Based on the performance analysis of the CLMS algorithm, a new variable step-size convex combination of least-mean-square (VSCLMS) algorithm was presented. This algorithm proposed a variable step-size adaptive filter to replace one of the original CLMS filters with the constant step-size parameter. Therefore, the new algorithm has a better tracking performance in the presence of noise, time-varying and even non-stable environment. Besides, the new algorithm also has the performance in convergence processing. Theoretical analysis and simulation examples show the new algorithm has validity about the faster convergence and mean-square performance in the steady-state and tracking processing compared with the CLMS algorithm.

Key words: adaptive filtering; CLMS algorithm; variable step-size; convex combination

1 引言

凸组合最小均方(Convex Combination of Least-Mean-Square, 简称 CLMS)滤波器算法^[1]是近几年提出的基于并行计算思想的自适应滤波算法.它通过并联具有不同迭代步长的独立最小均方(Least-Mean-Square, 简称 LMS)滤波器^[2]的方式提高算法的收敛性能,避免了单一 LMS 滤波器为协调收敛速度与稳态误差对步长因子 μ 的不同要求,对系统性能所做的折衷^[3].但不同迭代步长的并行计算往往对于算法参数的要求非常精确,不利于滤波系统在噪声环境中保证良好的稳态性能.同时,对于工作在时变频率高甚至非平稳的环境的情况,CLMS 算法也有其不可避免的性能不足.

为了使 CLMS 算法能够满足不同工作环境的需要,提升它的应用空间,本文在原有 CLMS 算法的基础上,引入变步长调整规则,将其中一个独立的固定步长因子

LMS 滤波器改为基于均方误差快速收敛的变步长 LMS 滤波器^[4].这样可以加快原算法的收敛速度及其在时变环境下的跟踪性能.同时,为保证系统的稳态性能、减小系统失调,将另一个 LMS 滤波器设定为小步长迭代,该方式同时又可协调另一个变步长 LMS 滤波器在稳态环境下步长因子易受噪声干扰的特性,在保持原 CLMS 滤波器的性能优势的同时全面的提升了算法的性能.

2 CLMS 算法

CLMS 滤波器^[1]的原理如图 1 所示.

图 1 中 $w_1(n)$ 、 $w_2(n)$ 分别为两个独立 LMS 滤波器的权向量; $y_1(n)$ 、 $y_2(n)$ 分别为两个滤波器的输出; $e_1(n)$ 、 $e_2(n)$ 分别为两个滤波器产生的误差; $\lambda(n)$ 为 CLMS 算法的联合系数; $y_{eq}(n)$ 为整个滤波器的等效输出; $e_{eq}(n)$ 为滤波器的等效误差.

从图 1 中可以看出,该算法通过建立两个自适应滤

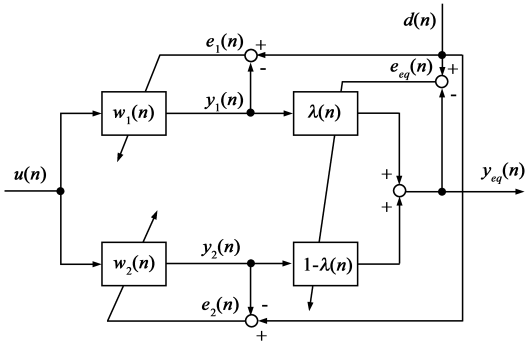


图1 CLMS滤波器原理图

滤波器的并联凸组合形成了一个择优逼近器. 其核心思想在于: 将其中一个滤波器设定为快速动作的, 以保证算法快速收敛; 而另一个则设定为慢收敛滤波器, 以保证收敛最终得到很小的稳态误差. 整个滤波器组可根据均方误差大小设定不同的联合参数 $\lambda(n)$ 值, 并以此调整两个滤波器的权重, 使其根据整个收敛情况发挥不同步长滤波器的优势.

CLMS算法采用两个LMS滤波器权系数凸组合的方式得到等价权值向量:

$$w_{eq}(n) = \lambda(n)w_1(n) + [1 - \lambda(n)]w_2(n) \quad (1)$$

其中联合系数 $\lambda(n) \in (0, 1)$, 并定义其取值函数为:

$$\lambda(n) = \text{sgm}[a(n)] = 1 / (1 + e^{-a(n)}) \quad (2)$$

由此可得等价输出项与误差项的表达式为:

$$y_{eq}(n) = \lambda(n)y_1(n) + [1 - \lambda(n)]y_2(n) \quad (3)$$

$$e_{eq}(n) = d(n) - y_{eq}(n) \quad (4)$$

联合系数 $\lambda(n)$ 中的参数 $a(n)$ 通过使整个自适应滤波器的均方误差最小为准则自适应, 因此同样适用于LMS算法的最速下降表达式:

$$a(n+1) = a(n) - \frac{\mu_a}{2} \frac{\partial e_{eq}^2(n)}{\partial a(n)} \quad (5)$$

参数 $a(n)$ 表达式符合LMS理论的鲁棒性^[5]规则, 可使CLMS算法有良好的稳定性.

由整个算法的原理与结构可以看出, 联合LMS滤波器组的方式工作为: 当自适应刚刚开始或者系统发生时变时, 有较大 μ 参数的LMS滤波器的性能要比 μ 参数较小的LMS滤波器好, 通过使 $\lambda(n)$ 取值接近于1而使得 $w_{eq}(n) \approx w_1(n)$. 同理在相反的条件下, 如系统处于稳态过程时, 有较小 μ 值的慢滤波器将会得到更小的均方误差, 因此将 $\lambda(n)$ 取值减小到接近于0, 整个联合滤波器组将由于慢收敛滤波器的主导作用最终减小系统的失调^[6].

由于CLMS算法将联合参数 $\lambda(n)$ 作为控制整个收敛过程的核心参数, 而该参数又需要通过指数运算和一个最速下降迭代过程才能够求得. 这样不仅迫使算法对于误差项、输出项等有很高的精度要求, 而且也不

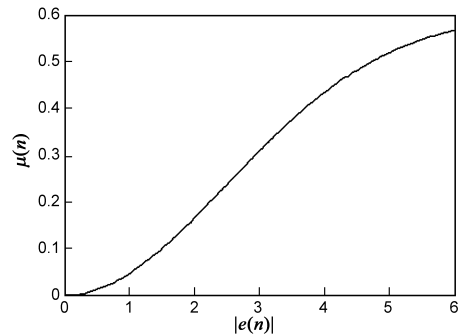
利于算法在较强噪声干扰的环境下仍保持同样好的收敛性能. 因此提出一种新的变步长CLMS算法(以下简称: VSCLMS算法), 以降低传统CLMS算法对于联合参数 $\lambda(n)$ 的依赖性.

3 VSCLMS算法及其均方性能分析

将其中快收敛大步长LMS滤波器改进为依照均方误差收敛的变步长LMS滤波器. 迭代步长 μ 取基于Sigmoid函数的可变函数^[4], 即:

$$\mu(n) = \beta(1 - \exp(-\alpha |e(n)|^2)) \quad (6)$$

为保证收敛要求参数满足: $\alpha > 0, 0 < \beta < \mu_{\max}$. 取 $\beta = 0.6, \alpha = 0.08$ 时, $\mu(n)$ 与误差 $|e(n)|$ 的关系曲线如图2所示.

图2 $\mu(n)$ 与误差 $|e(n)|$ 的关系曲线

由图2可以看出, 通过收敛过程中误差 $|e(n)|$ 的不断变化, 迭代步长 $\mu(n)$ 也在不断调整. 在收敛初始阶段, 误差 $|e(n)|$ 往往较大, 此时迭代步长将接近于能够保证算法收敛的最大迭代步长 μ_{\max} 以保证最快的收敛速度; 随着收敛过程的进行, 误差 $|e(n)|$ 不断减小, 当收敛进入稳态邻域时, $\mu(n)$ 也随之渐近到一个很小的值, 以保证算法有较小的稳态误差.

由于变步长LMS算法的均方误差在收敛进入稳态过程时易被噪声污染而使得步长因子 μ 有较大振荡, 严重影响了系统的稳定性. 因此, 可将CLMS算法中的另一个独立LMS滤波器设为小步长收敛来弥补变步长LMS滤波器这一不足. 根据自适应滤波理论^[3], 系统的权向量失调与步长因子 μ 成正比, 其表达式为:

$$M = \mu \cdot \text{tr}R \quad (7)$$

其中 M 为LMS滤波器的失调. 可根据系统的精度要求来确定该小步长LMS滤波器的 μ 值, 以保证新的VSCLMS算法的稳态性能不依赖于变步长LMS滤波器. 使其无论有怎样的收敛特性, 整体算法都能够最终得到一个很小的失调.

下面具体分析VSCLMS算法的性能. 首先提出如下假设^[6]:

(1) 期望响应 $d(n)$ 与输入向量 $u(n)$ 间符合如下线性衰减模型:

$$d(n) = w_0^T u(n) + e_0(n) \quad (8)$$

式中 w_0 为长度为 M 的未知权向量; $e_0(n)$ 为方差为 σ_0^2 的独立建模观测噪声.

(2) 初始权向量 $w_1(0)$ 、 $w_2(0)$ 与初始参数 $a(0)$ 对于任意 n 值独立于 $\{u(n), d(n), e_0(n)\}$.

(3) $E[u(n)] = 0$, $E[u(n)u^T(n)] = R$, $E[d(n)] = 0$, $E[e_0(n)] = 0$.

为讨论方便, 现分别对单个滤波器与联合后的改进滤波器定义如下符号与附加参数值:

(1) 滤波器的权向量误差项为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(n) &= w_0 - w_i(n), i = 1, 2 \\ \varepsilon(n) &= w_0 - w(n) \end{aligned} \quad (9)$$

(2) 先验误差项为:

$$\begin{aligned} e_{a,i}(n) &= \varepsilon_i^T(n) u(n), i = 1, 2, \\ e_a(n) &= \varepsilon^T(n) u(n) \end{aligned} \quad (10)$$

(3) 后验误差项为:

$$\begin{aligned} e_{p,i}(n) &= \varepsilon_i^T(n+1) u(n), i = 1, 2 \\ e_p(n) &= \varepsilon^T(n+1) u(n) \end{aligned} \quad (11)$$

滤波器的性能通常用额外均方误差 (EMSE) 来衡量, 将它定义为滤波器在工作过程中除最小均方误差外的额外误差项. 分析算法的稳态性能时, 通常假设学习迭代次数 n 取其极限值 ∞ , 由于误差项 $e(n)$ 满足如下表达式:

$$e(n) = e_a(n) + e_0(n) \quad (12)$$

因此, 各滤波器的 EMSE 可由下式得出:

$$J_{ex,i}(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} E[e_{a,i}^2(n)], i = 1, 2 \quad (13)$$

$$J_{ex}(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} E[e_a^2(n)] \quad (14)$$

同时为分析凸组合后系统性能, 定义基于先验误差项的交叉 EMSE 表达式如下:

$$J_{ex,12}(\infty) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} E[e_{a,1}(n)e_{a,2}(n)] \quad (15)$$

由定义式 (15) 与 Cauchy-Schwartz 不等式可得出如下结论: 交叉 EMSE 不会同时高于单个滤波器的 EMSE. 即:

$$J_{ex,12}(\infty) \leq \max\{J_{ex,1}(\infty), J_{ex,2}(\infty)\} \quad (16)$$

通过能量守恒方程^[6]与稳态运行时 $\|u(n)\|^2$ 独立于 LMS 滤波器先验误差的假设, 可得出如下表达式:

$$J_{ex,i}(\infty) = \frac{\mu_i \sigma_0^2 \text{Tr}(R)}{2 - \mu_i \text{Tr}(R)} \quad (17)$$

其中 μ_i 满足收敛条件, 即: $\mu_i < 2/\text{Tr}(R)$. 而 EMSE 为 μ_i 的单调增函数, 因此有:

$$\frac{\partial J_{ex,i}(\infty)}{\partial \mu_i} = \frac{2\sigma_0^2 \text{Tr}(R)}{[2 - \mu_i \text{Tr}(R)]^2} > 0 \quad (18)$$

为推导两个滤波器的交叉 EMSE 参数, 引入能量守恒关系方程. 该方程以 LMS 系数更新理论为基础, 包含

了先验误差项与后验误差项. 经过推导与整理可得出如下等式:

$$\varepsilon_i(n+1) + \frac{u(n)}{\|u(n)\|^2} e_{a,i}(n) = \varepsilon_i(n) + \frac{u(n)}{\|u(n)\|^2} e_{p,i}(n) \quad (19)$$

将 $i=1$ 与 $i=2$ 分别代入并整理后得:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^T(n+1)\varepsilon_2(n+1) + \frac{e_{a,1}(n)e_{a,2}(n)}{\|u(n)\|^2} \\ = \varepsilon_1^T(n)\varepsilon_2(n) + \frac{e_{p,1}(n)e_{p,2}(n)}{\|u(n)\|^2} \end{aligned} \quad (20)$$

将式 (15) 两边取期望, 且在稳态情况下下式成立:

$$E[\varepsilon_1^T(n+1)\varepsilon_2(n+1)] = E[\varepsilon_1^T(n)\varepsilon_2(n)]; n \rightarrow \infty \quad (21)$$

由此可得:

$$E\left[\frac{e_{a,1}(n)e_{a,2}(n)}{\|u(n)\|^2}\right] = E\left[\frac{e_{p,1}(n)e_{p,2}(n)}{\|u(n)\|^2}\right]; n \rightarrow \infty \quad (22)$$

权值更新时先验误差项与后验误差项的关系如下:

$$e_{p,i}(n) = e_{a,i}(n) - \mu_i \|u(n)\|^2 e_i(n), i = 1, 2 \quad (23)$$

整理式 (22) 与式 (23) 得出:

$$\begin{aligned} \mu_2 E[\mu_1(n) \|u(n)\|^2 e_1(n) e_2(n)] \\ = E[\mu_1(n) e_{a,2}(n) e_1(n)] + \mu_2 E[e_{a,1}(n) e_2(n)] \end{aligned} \quad (24)$$

对于 VSCLMS 算法, 其变步长迭代规则为: $\mu_1(n) = \beta(1 - \exp(-\alpha |e_1(n)|^2))$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 步长在理想状态下收敛为一个很小的值, 可取如下近似:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\mu_1(n)] = \mu_0 \quad (25)$$

将 $e_i(n) = e_{a,i}(n) + e_0(n)$, $i = 1, 2$ 代入式 (24) 得:

$$\begin{aligned} \mu_0 \mu_2 E\{\|u(n)\|^2 (e_{a,1}(n)e_{a,2}(n) \\ + e_0(n)[e_{a,1}(n) + e_{a,2}(n)] + e_0(n))\} \\ = (\mu_0 + \mu_2) J_{ex,12}(\infty) \\ - E\{\mu_0 e_{a,2}(n) + \mu_2 e_{a,1}(n)\} e_0(n) \end{aligned} \quad (26)$$

由分析可知 $e_0(n)$ 为零均值过程并独立于先验误差项, 因此可得出交叉 EMSE 的表达式如下:

$$J_{ex,12}(\infty) = \frac{\mu_{12}}{2} [E[\|u(n)\|^2 e_{a,1}(n) e_{a,2}(n)] + \sigma_0^2 \text{Tr}(R)] \quad (27)$$

定义: $\mu_{12} \triangleq \frac{2\mu_0\mu_2}{\mu_0 + \mu_2}$ 并代入式 (27), 得到最终的交叉 EMSE 参数为:

$$J_{ex,12}(\infty) = \frac{\mu_{12} \sigma_0^2 \text{Tr}(R)}{2 - \mu_{12} \text{Tr}(R)} \quad (28)$$

由于 $\mu_0 < \mu_{12} < \mu_2$, 综合式 (17) 与式 (28) 可得出如下结论: $J_{ex,2}(\infty) > J_{ex,12}(\infty) > J_{ex,1}(\infty)$. 对于传统 CLMS 来说, 文献 [6] 给出 EMSE 参数关系如下:

$J'_{ex,1}(\infty) > J'_{ex,12}(\infty) > J'_{ex,2}(\infty)$;而对于改进算法来说,并没有改变原算法中小步长 LMS 滤波器的迭代规则,即有: $J_{ex,2}(\infty) = J'_{ex,2}(\infty)$. 因此,可以得出以下结论: $J'_{ex,12}(\infty) > J_{ex,12}(\infty)$,即新的 VSCLMS 算法的均方性能优于 CLMS 算法.

4 仿真分析

为进一步验证 VSCLMS 算法的收敛性能与跟踪性能,现将 VSCLMS 算法与原 CLMS 算法用于系统辨识过程中进行计算机仿真分析,并分别对两种算法进行 200 次独立仿真实验,求取统计平均值.同时,为能够客观比较系统失调等性能参数,两种算法的参数均选为其他文献中讨论过的相对最优参数.其中 CLMS 算法的相关参数选择如下:取 $\mu_1 = 0.01, \mu_2 = 0.1, \mu_a = 200$,并取合理的参数限幅^[1];对于本文提出的 VSCLMS 算法,与原算法重合部分的参数仍取原参数不变,即 $\mu_2 = 0.01, \mu_a = 200$,同时选择变步长迭代参数 $\beta = 0.6, \alpha = 0.08$ ^[4].

4.1 高斯白噪声输入时算法仿真性能分析

假设未知系统为 7 阶 FIR 模型,自适应滤波器的阶次与模型阶次相同.设输入信号 $u(n)$ 为零均值、方差为 1 的高斯白噪声,主输入端干扰信号 $v(n)$ 为与 $u(n)$ 不相关的高斯白噪声,且 $SNR = 20\text{dB}$.

另外,为比较算法的跟踪性能,令模型参数在迭代进行至 500 步时同时发生变化.得出 CLMS 算法与 VSCLMS 算法的学习曲线如下图 3 所示.

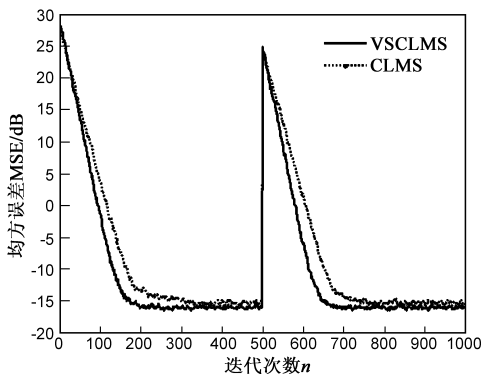


图3 高斯白噪声输入时两种算法的学习曲线比较图

图 3 可以看出,在收敛过程的初始阶段,VSCLMS 算法的收敛速度明显快于 CLMS 算法.在收敛过程进入稳态阶段时,VSCLMS 算法又继承了 CLMS 算法低稳态误差的优点,在稳态性能上优于 CLMS 算法.另外,由于新算法放宽了对联合参数的限幅,因此极大的缩小了系统渐进稳态的过渡过程.同时在系统参数发生变化时,VSCLMS 算法也表现出很好的跟踪性能.

4.2 相关信号作为输入时算法仿真性能分析

设相关输入信号表达式为:

$$x(n) = 0.8x(n-1) + r(n) \quad (29)$$

其中 $r(n)$ 为 $\sigma_v^2 = 0.01$ 的高斯白噪声,且与系统干扰 $v(n)$ 相互独立.其他仿真条件与参数选取均与独立信号输入时相同,两种算法的学习曲线如图 4 所示.

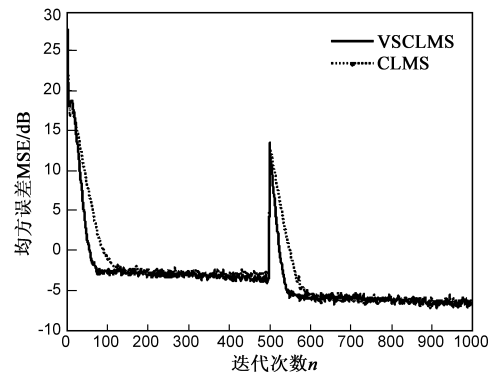


图4 相关信号输入时两种算法的学习曲线比较图

图 4 可以看出,相关信号输入时,VSCLMS 算法在收敛速度和跟踪性能上优于 CLMS 算法.这说明新算法可以很好的应用于非独立信号环境中.

4.3 非平稳环境下的仿真性能分析

给出仿真试验中的时变系统模型如下:

$$w(n+1) = w(n) + c(n) \quad (30)$$

其中 $c(n)$ 为零均值白色高斯噪声,取方差 $\sigma_v^2 = 1 \times 10^{-4}$.其他仿真条件与平稳环境下的试验参数相同.图 5 给出了两种算法的学习曲线.

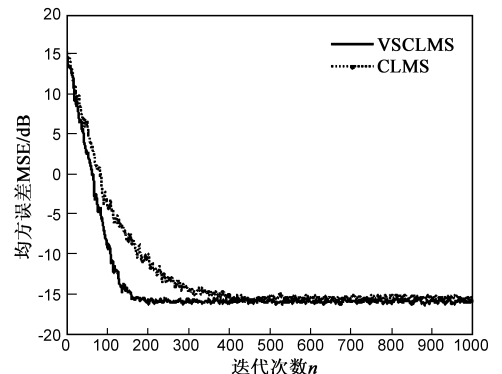


图5 非平稳环境下两种算法的学习曲线比较图

图 5 可以看出,VSCLMS 算法在非平稳环境下也有优于 CLMS 算法的收敛性能,尤其在渐进稳态过程中,VSCLMS 算法的过渡过程明显快于 CLMS 算法,这是因为 CLMS 算法在联合参数的函数边界上采取了限幅,导致算法在收敛过程渐进稳态时易产生震荡,不能很好实现平滑过渡所造成的.同时,进入稳态后新算法的均方误差也优于 CLMS 算法.

5 结论

新的 VSCLMS 算法在保持原 CLMS 结构不变的基础上引入变步长因子 $\mu(n)$,使其中恒值大步长独立 LMS

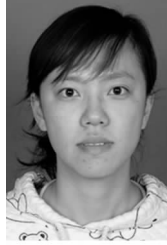
滤波器能够根据收敛进程及环境的要求随时调整步长;而另一滤波器采用小步长迭代方案,与变步长 LMS 滤波器相配合.这样不仅提高了算法的收敛速度与跟踪能力,同时兼顾了算法的稳态均方性能,解决了收敛速度与稳态均方误差间的矛盾.理论推导证明和仿真结果验证了算法的收敛性能与稳态均方性能.

参考文献:

- [1] J Arenas-Garcia, A R Figueiras-Vidal, A H Sayed. Steady state performance of convex combinations of adaptive filters [A]. Proceedings of IEEE International Conference Acoustics, Speech, and Signal Processing [C]. IEEE Press, 2005, 4. 33 – 36.
- [2] S R Paulo, Diniz. Adaptive Filtering: Algorithms And Practical Implementation (2E) [M]. Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [3] Simon Haykin. Adaptive Filter Theory (4E) [M]. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [4] 高鹰, 谢胜利. 一种变步长 LMS 自适应滤波算法及分析 [J]. 电子学报, 2001, 29(8): 1094 – 1097.
GAO Ying, XIE Sheng-li. A variable step size LMS adaptive filtering algorithm and its analysis [J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(8): 1094 – 1097. (in Chinese)
- [5] E V Papoulis, T Stathaki. A normalized robust mixed norm adaptive algorithm for system identification [J]. IEEE Signal Processing, 2004, 1(11): 56 – 59.

- [6] J Arenas-Garcia, A R Figueiras-Vidal, A H Sayed. Mean-square performance of a convex combination of two adaptive filters [J]. IEEE Signal Processing, 2006, 54(3): 1078 – 1090.

作者简介:



于霞女, 1982 年出生于辽宁鞍山, 东北大学控制理论与控制工程专业博士研究生. 研究方向为自适应信号处理、智能控制理论与应用.



刘建昌男, 1960 年出生于辽宁黑山, 东北大学信息科学与工程学院教授、博士生导师. 主要研究方向为智能控制理论与应用、复杂工业过程建模与控制.

李鸿儒男, 1968 年出生于辽宁绥中, 东北大学信息科学与工程学院教授. 主要研究方向为智能控制理论与应用, 复杂工业过程建模、控制与优化.