

指数阻尼正弦模型阶选择算法

王 嵩^{1,2}, 鲍长春¹

(1. 北京工业大学电子信息与控制工程学院, 北京 100124; 2. 北京石油化工学院信息工程学院, 北京 102617)

摘 要: 本文针对指数阻尼正弦信号模型提出了一种新的基于子空间和结构总体最小范数的阶选择算法. 该方法利用信号子空间移不变性以及阶与信号分量数匹配时总体误差最小原理建立模型阶估计准则. 实验表明该方法获得了更高的阶估计精度. 算法无需设置阈值和惩罚项, 自动完成阶估计过程. 它可以应用到高分辨率的谐波恢复算法中.

关键词: 指数阻尼正弦; 模型阶选择; 子空间; 结构总体最小范数

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 01-0141-05

An Order-Selection Algorithm for Exponentially Damped Sinusoids Model

WANG Song^{1,2}, BAO Chang-chun¹

(1. School of Electronic Information and Control Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China;

2. School of Information Engineering, Beijing Institute of Petro-Chemical Technology, Beijing 102617, China)

Abstract: This paper presents a new order-selection algorithm for exponentially damped sinusoids model based on subspace and structured total least norm method. It constructs model order estimation criterion by utilizing the shift invariance of the signal subspace, and the principle of total error reaching minimum when order matching with the number of signal components. The results of simulation show a higher estimation accuracy of the new algorithm. The algorithm is not required to set a threshold and penalization terms, and can accomplish estimation procedure automatically. It can be applied to the high resolution harmonic retrieval algorithms.

Key words: exponentially damped sinusoids; model order selection; subspace; structured total least norm

1 引言

谐波/正弦恢复是许多信号分析/合成应用的核心问题. 如语音编码^[1], 音频信号处理^[2]. 在每帧信号含正弦数 M 给定的前提下, 这项技术的任务是估计出 M 条谱线参数: 频率, 相位, 幅度和阻尼因子, 来逼近原始信号 x_n . 数学模型描述如下:

$$\hat{x}_n = \sum_{m=1}^M A_m e^{i\varphi_m} \cdot e^{(i2\pi f_m + d_m)n} + \sigma_n \quad (1)$$

式中, $n = 0, \dots, N - 1$, \hat{x}_n 为含噪声信号 x_n 的估计, $\{A_m, d_m, f_m, \varphi_m\}_{m=1}^M$ 为实值的幅度, 阻尼因子, 频率和初相; σ_n 为噪声信号; M 为正整数, 即模型阶数. 式(1)也称指数阻尼正弦 (EDS-exponentially damped sinusoids) 模型^[3]. 该模型常写成更紧凑的形式, $\hat{x}_n = \sum_{m=1}^M \alpha_m z_m^n + \sigma_n$. 这里, $\alpha_m = A_m e^{i\varphi_m}$ 称为复振幅; $z_m = e^{i2\pi f_m + d_m}$ 称为极点 (pole). 工程应用中, 尤其在信号的高分辨率分析中, 通常假定 M 已知^[4,5], 然而实际往往并不知道模型阶数, 需

要作出实时选择或估计. 文献[6]证明, 低估模型阶数会导致模型参数估计出现偏差, 高估阶数则会在模型中出现拟合噪声. 可见, 准确的模型阶估计是信号参数建模的重要的基础问题.

目前, 已有若干文献提出估计模型阶数的方法. 常见的是基于信息理论准则 (ITC-information theoretic criteria) 的方法, 如最小描述长度 (MDL-minimum description length), Akaike 信息准则等方法, 以及近年提出的在短数据集下具有更好性能的最大后验方法, 贝叶斯方法等. 这些方法基于观测信号的统计模型, 假定噪声为高斯白噪声, 信号模型采用无阻尼的纯正弦模型, 估计准则由对数似然项和惩罚项组成. 有关这些统计方法的更进一步评述请读者参考文献[7].

最近, 文献[6]提出 ESTER (ESTimation ERor) 算法, 它可以在无人工预设参数的情况下计算出 EDS 模型阶数. 与统计方法相比, 该算法基于无噪声信号序列的指数阻尼正弦模型, 无需任何惩罚项或阈值, 易于实时实现. 尽管 ESTER 采用无噪信号模型, 在相同噪声水平

下,实验证明该算法比 ITC 方法具有更好的鲁棒性.目前 ESTER 还存在的问题是,在较低信噪比下,估计精度不够高.作为对该算法的一种改进形式,本文提出基于子空间和结构总体最小范数的阶估计方法,该方法增强了算法鲁棒性,具有更好的估计精度.

2 ESTER 算法原理

估计 EDS 模型阶数的 ESTER 算法描述如下.

输入:数据样点 $x_n, n = 0, \dots, N - 1$.

输出:估计的模型阶数 \hat{M} .

步骤 1. 将一帧输入数据序列 $x_n, n = 0, \dots, N - 1$,

构造成 Hankel 矩阵 $\mathbf{H}_{P \times Q}$,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{Q-1} \\ x_1 & x_2 & \ddots & \cdots & \vdots \\ x_2 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & x_{P+Q-3} \\ x_{P-1} & \cdots & \cdots & x_{P+Q-3} & x_{P+Q-2} \end{pmatrix}$$

这里, $N = P + Q - 1, P > M, Q > M$.

步骤 2. 对 \mathbf{H} 阵作奇异值分解,

$\mathbf{H} = \mathbf{U}_{P \times P} \boldsymbol{\Sigma}_{P \times Q} \mathbf{V}_{Q \times Q}^T$. 上标 T 表示矩阵转置.

步骤 3. 对所有 $m \in \{1, \dots, \min(P, Q)\}$, 取前 m 个左奇异矢量 $\{\mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(m)\}$, 构造矩阵 $\mathbf{U}(m) = [\mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(m)]$, 计算:

$$(a) \quad \boldsymbol{\Phi}(m) = \mathbf{U}_\downarrow(m)^\dagger \mathbf{U}_\uparrow(m),$$

$$(b) \quad \mathbf{R}(m) = \mathbf{U}_\downarrow(m) \boldsymbol{\Phi}(m) - \mathbf{U}_\uparrow(m),$$

这里, $\uparrow(\downarrow)$ 表示删除矩阵 $\mathbf{U}(m)$ 的第一行(最后一行), \dagger 表示伪逆.

步骤 4. 按误差矩阵范数平方的倒数最大准则估计模型阶数 M :

$$\hat{M} = \arg \max_m \frac{1}{\|\mathbf{R}(m)\|_F^2}, 1 \leq m < \min(P, Q),$$

这里, $\|\cdot\|_2$ 表示矩阵的谱范数.

从算法描述中我们看到 ESTER 源自以下事实:当 m 取值 M 时, 无噪声数据矩阵 \mathbf{H} 的左奇异矢量矩阵 $\mathbf{U}(M) = [\mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(M)]$ 具有移不变性, 即

$\mathbf{U}_\downarrow(M) \boldsymbol{\Phi}(M) = \mathbf{U}_\uparrow(M)$ 成立^[8]. 所以 $m = M$ 时,

$\|\mathbf{R}(m)\|_2$ 取极小值. 然而实际信号不可避免地带有观测噪声, 导致信号帧不再严格满足 EDS 模型, \mathbf{H} 阵的秩大于 M , 移不变特性只能近似满足, 即上式近似成立.

所以只有当 $\boldsymbol{\Phi}(m), \mathbf{U}(m)$ 均逼近真值时, 使用误差准则才能得到准确的估计结果. 显然, 算法步骤 3 中

$\boldsymbol{\Phi}(m), \mathbf{R}(m)$ 是以下优化问题的解

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\Phi}(m), \mathbf{R}(m)} \quad & \|\mathbf{R}(m)\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{U}_\downarrow(m) \boldsymbol{\Phi}(m) = \mathbf{U}_\uparrow(m) + \mathbf{R}(m) \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $\|\cdot\|_F$ 表示矩阵的 Frobenius 范数. 这是一个最小二

乘意义下的优化问题, 解是在假定右端项 $\mathbf{U}_\uparrow(m)$ 中存在扰动 $\mathbf{R}(m)$, 而 $\mathbf{U}_\downarrow(m)$ 不含误差的前提下得到的. 但事实上, $\mathbf{U}_\downarrow(m)$ 也含有噪声, 因此采用最小二乘法求解本文问题将导致估计结果有偏.

3 基于结构总体最小范数的阶估计方法

3.1 算法分析

\mathbf{H} 阵含有测量误差, 其前 M 个左奇异矢量张成被噪声污染的信号子空间. 为了获得统计更优解, 考虑采用总体最小二乘法求解以下优化问题^[9] (为了简化表述, 若无特别标明, 从式(3)起省略索引 m):

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} \quad & \|\mathbf{J}_1 \mathbf{R}_1 \quad \mathbf{J}_2 \mathbf{R}_2\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{J}_1(\mathbf{U} + \mathbf{R}_1) \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{J}_2(\mathbf{U} + \mathbf{R}_2) \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $\mathbf{J}_1 = [\mathbf{I}_{P-1} | \mathbf{0}_{(P-1) \times 1}]$, $\mathbf{J}_2 = [\mathbf{0}_{(P-1) \times 1} | \mathbf{I}_{P-1}]$. 为了使方程组 $\mathbf{U}_\downarrow \boldsymbol{\Phi} \approx \mathbf{U}_\uparrow$ 相容, 最小二乘将 $\mathbf{U}_\uparrow, \mathbf{U}_\downarrow$ 投影到 \mathbf{U}_\downarrow 的奇异子空间中, 而总体最小二乘将 $\mathbf{U}_\uparrow, \mathbf{U}_\downarrow$ 投影到 $[\mathbf{U}_\downarrow | \mathbf{U}_\uparrow]$ 的奇异子空间中. 当 $\mathbf{U}_\uparrow, \mathbf{U}_\downarrow$ 的扰动分布相同时, $[\mathbf{U}_\downarrow | \mathbf{U}_\uparrow]$ 的奇异子空间对噪声的敏感度小于 \mathbf{U}_\downarrow 的奇异子空间对噪声的敏感度. 这意味着前者更加靠近它相应的无扰动子空间. 也就是说, 总体最小二乘解可望比最小二乘解更准确^[9]. $\mathbf{U}_\uparrow, \mathbf{U}_\downarrow$ 均是 \mathbf{U} 的子矩阵, 显然, 二者的扰动分布相同, 因此采用总体最小二乘方法可得到统计更优解, 改善误差准则的估计精度.

注意到式(3)约束条件两端均有 \mathbf{U} , 扰动 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ 不仅相关而且完全相等. 于是式(3)演变为约束总体最小二乘问题^[10] (严格说, 目标函数应为 $\min \|\mathbf{J}_1 \mathbf{R} \quad \mathbf{J}_2 \mathbf{R}\|_F^2$, 但实际 $P, Q \gg 2$, 所以近似地有 $\min \|\mathbf{J}_1 \mathbf{R} \quad \mathbf{J}_2 \mathbf{R}\|_F^2 \Leftrightarrow \min \|\mathbf{R}\|_F^2$):

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{R}} \quad & \|\mathbf{R}\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{J}_1(\mathbf{U} + \mathbf{R}) \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{J}_2(\mathbf{U} + \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (4)$$

上式是一个具有二次目标函数和非线性等式约束 ($\mathbf{R}\boldsymbol{\Phi}$ 为非线性项) 的优化问题. 我们采用文献[11]提出的结构总体最小范数 (STLN-structured total least norm) 方法来求解. 有关约束总体最小二乘与 STLN 等价性证明请参考文献[12]. STLN 是一种迭代算法. 迭代时非线性等式约束在当前迭代点处线性化, 并求解一个等式约束的最小二乘问题.

3.2 算法实现

由残差阵 $\mathbf{E}(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{R}) = \mathbf{J}_1(\mathbf{U} + \mathbf{R}) \boldsymbol{\Phi} - \mathbf{J}_2(\mathbf{U} + \mathbf{R})$, 构造 STLN 问题:

$$\min_{\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{R}} \left\| \begin{array}{c} \mathbf{E}(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{R}) \\ \mathbf{R} \end{array} \right\|_F^2 \quad (5)$$

式(5)中的最小化通过线性逼近 $\mathbf{E}(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{R})$ 的方法来实现: 用 $\Delta\boldsymbol{\Phi}, \Delta\mathbf{R}$ 分别表示 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 \mathbf{R} 中的微小增量, 于是得

到当前迭代的残差阵

$$\begin{aligned} E(\Phi + \Delta\Phi, R + \Delta R) &= E(\Phi, R) + J_1(U\Delta\Phi + \Delta R\Phi) \\ &\quad + J_1(R\Delta\Phi + \Delta R\Delta\Phi) - J_2\Delta R \\ &= E(\Phi, R) + J_1(U\Delta\Phi + \Delta R\Phi) \\ &\quad + J_1R\Delta\Phi - J_2\Delta R \end{aligned} \quad (6)$$

式中,省略了二阶微增量 $J_1\Delta R\Delta\Phi$. 为了求解迭代过程中的微增量,用矢量化算子 $\text{vec}(\cdot)$ 对式(6)按列堆栈:

$$\begin{aligned} \text{vec}(E(\Phi + \Delta\Phi, R + \Delta R)) &= \text{vec}(E(\Phi, R)) + (I_m \otimes (J_1U + J_1R)) \\ &\quad \cdot \text{vec}(\Delta\Phi) + (\Phi^T \otimes J_1) \\ &\quad \cdot \text{vec}(\Delta R) - (I_m \otimes J_2) \text{vec}(\Delta R) \end{aligned} \quad (7)$$

式中, \otimes 表示 Kronecker 积. 现在被线性化的式(5)转变成最小二乘问题

$$\begin{aligned} \min_{\Delta\Phi, \Delta R} \left\| \begin{array}{c} E(\Phi + \Delta\Phi, R + \Delta R) \\ R + \Delta R \end{array} \right\|_F^2 \\ \Rightarrow \min_{\Delta\Phi, \Delta R} \left\| Y \begin{pmatrix} \text{vec}(\Delta\Phi) \\ \text{vec}(\Delta R) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{vec}(E(\Phi, R)) \\ \text{vec}(R) \end{pmatrix} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (8)$$

式中,

$$Y = \begin{pmatrix} I_m \otimes (J_1U + J_1R) & (\Phi^T \otimes J_1) - (I_m \otimes J_2) \\ \mathbf{0} & I_{Pm} \end{pmatrix}. \text{ 每次}$$

计算得到的微增量用于产生下一次迭代的初始值: $\Phi \leftarrow \Phi + \Delta\Phi, R \leftarrow R + \Delta R, E = J_1(U + R)\Phi - J_2(U + R)$. 我们采用 ESTER 算法的最小二乘解作为首次迭代的初始化值: $\Phi = U_{\downarrow}^{\dagger} U_{\uparrow}, E = U_{\downarrow}\Phi - U_{\uparrow}$, 并且 $R = \mathbf{0}$. 文献[13]指出,采用好的初始化值,比如总体最小二乘解,可以使估计过程快速收敛到更优的局部极小值,但代价是增加了初始化的计算复杂度. 对于本文问题,可以采用简单的最小二乘估计^[11,14]. 矩阵 Y 是具有规则结构的稀疏矩阵,为了快速有效地求解式(8),我们采用稀疏 QR 分解方法对 Y 上三角化^[15],再用回代法^[16]得到微增量的解. 本文算法是 STLN 算法的实际应用,其收敛性问题即为 STLN 的收敛性问题. 当算法重复迭代时,收敛性体现在 $[\text{vec}^T(\Delta\Phi) \mid \text{vec}^T(\Delta R)] \approx \mathbf{0}$. 文献[11]证明,STLN 算法收敛性与一阶优化条件等价,而且从本质上讲,STLN 算法是一种高斯-牛顿优化方法,因此算法是收敛的. 实验表明,经较少的有限次迭代, R 即可收敛. 算法实现时,可以指定迭代次数,而无需设置迭代终止门限,这是基于 STLN 的算法特有的迅速收敛性^[14]. 我们将本文提出的算法称为基于结构总体最小范数的误差准则 (STLNERC-STLN based Error Criterion). 以下是 STLNERC 算法要点:

输入: 一帧数据样点 $x_n, n = 0, \dots, N - 1$; 迭代次数 n .

输出: 估计的模型阶数 \hat{M} .

步骤 1. 将输入的一帧数据序列 $x_n, n = 0, \dots, N - 1$

构造成 Hankel 矩阵 $H_{P \times Q}$;

步骤 2. 对 H 阵作奇异值分解,得到左奇异矢量阵

$$U = [u(1), \dots, u(m)], 1 \leq m \leq P;$$

步骤 3. 对所有 $m \in \{1, \dots, \min(P, Q)\}$, 设初值

$$\Phi = U_{\downarrow}^{\dagger} U_{\uparrow}, E = U_{\downarrow}\Phi - U_{\uparrow}, R = \mathbf{0}, \text{ 迭代计算}$$

$$(a) \min_{\Delta\Phi, \Delta R} \left\| Y \begin{pmatrix} \text{vec}(\Delta\Phi) \\ \text{vec}(\Delta R) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{vec}(E(\Phi, R)) \\ \text{vec}(R) \end{pmatrix} \right\|_2^2,$$

$$(b) \Phi \leftarrow \Phi + \Delta\Phi, R \leftarrow R + \Delta R, E = J_1(U + R)\Phi - J_2(U + R), n \text{ 次};$$

步骤 4. 按误差倒数最大准则估计模型阶数 M ,

$$\hat{M} = \arg \max_m \frac{1}{\|R(m)\|_2^2}, 1 \leq m < \min(P, Q).$$

4 实验结果与分析

在实验 1 中,我们生成 5 极点的合成信号,帧长 255,加性噪声为有色噪声,信噪比 25dB. 实验采用文献[6]使用的低通滤波器 $H(z) = \frac{1}{(1 - 0.95z^{-1})}$ 对高斯白噪声滤波生成有色噪声. 表 1 给出了信号参数. 实验中,STLNERC 迭代计算两次.

表 1 5 极点信号参数

极点	1	2	3	4	5
频率	0.2Hz	0.206Hz	0.4Hz	0.6Hz	0.9Hz
阻尼因子	-0.01	-0.01	-0.008	-0.02	-0.016
幅度	80	90	10	60	30

图 1 是 ESTER 与 STLNERC 算法的误差准则比较. 图 1(a) 显示算法 ESTER 在 $m = 4$ 时, $\frac{1}{\|R(m)\|_2^2}$ 取全局极大值. 在较低信噪比下,基于最小二乘的 ESTER 算法抗噪声性能较差是产生错误估计的原因. 图 1(b) 显示算法 STLNERC 在 $m = 5$, $\frac{1}{\|R(m)\|_2^2}$ 取全局极大值. 估计结果正确.

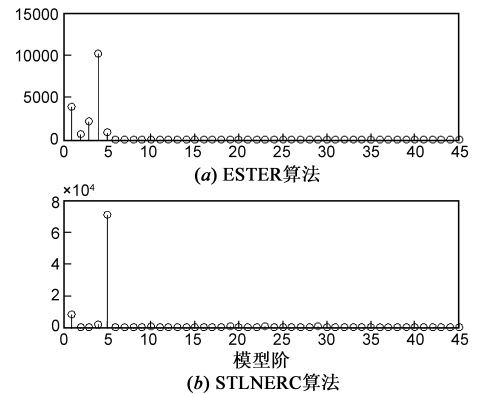


图 1 信号的模型阶选择

第 2 个实验比较临近极点频率对两种算法鲁棒性的影响. 我们让第 2 个极点频率 f_2 在 0.19 ~ 0.21Hz 内

变动,变化步长为 0.002Hz,注意 $f_2 \neq f_1 = 0.2$,其他实验参数不变.每次频率改变时,均采用 150 次 Monte Carlo 实验比较两种算法正确估计模型阶的次数.图 2 为比较结果.在 $0.21 \geq f_2 > 0.204$ 和 $0.194 > f_2 \geq 0.19$ 区间,STLNERC 具有较高的正确率.在接近 0.2Hz 的区域,性能改善不显著,两种算法的估计正确率都很低.

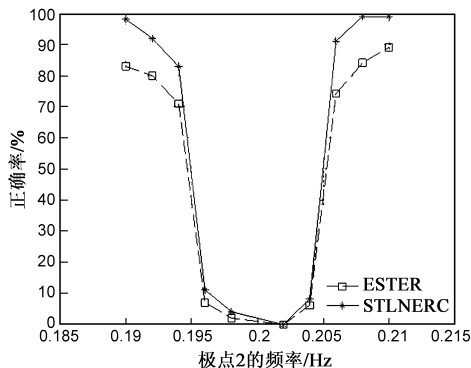


图2 算法鲁棒性比较

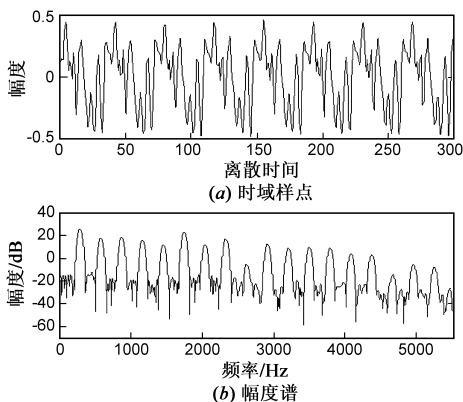


图3 小提琴音符D4

下面是 ESTER, STLNERC 用于音频信号阶估计的性能对比.实验采用无噪声的单声道 11025Hz 采样 16 位 PCM 编码的小提琴音符 D4 信号(基频 293.7Hz).由于信号带宽 5512Hz,处于小提琴的泛音(谐波)域(196 ~ 15kHz),因此带宽内共有 $5512/293.7 \approx 18$ 条谐波.图 3 是帧长 300 个样点的小提琴 D4 信号的时域波形和相应的幅度谱.

表 2 小提琴信号的阶选择对比

从幅度谱中可	加性高斯白噪声	无	SNR = 45dB
以清晰看到 18	ESTER	18	16
个泛音谱峰.	STLNERC	18	18

图 4 为信号数据的 Hankel 阵的奇异值.图中 18 处奇异值有明显转折,表明信号子空间和噪声子空间隔离较好,信号存在 18 个极点.表 2 为两种算法在无噪声情况下和加性高斯白噪声(信噪比等于 45dB)情况下的性能对比.在无噪声情况下,两种算法均得到了正确的估计结果.在 45dB 的加性高斯白噪声情况下,第 8 和第 15 次泛音被噪声模糊. ESTER 估计阶数为 16,而 STLNERC

仍然能作出正确的阶选择,实验再次表明,STLNERC 的噪声鲁棒性要优于 ESTER.

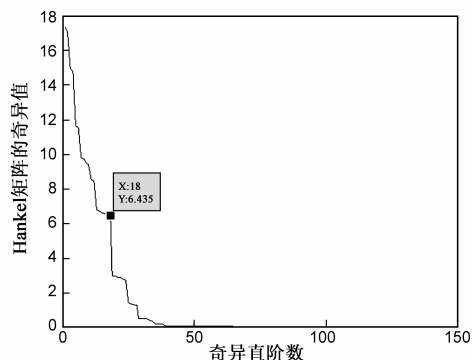


图4 小提琴信号的Hankel矩阵的奇异值,图中标注为奇异值转折点

5 总结

本文提出了基于子空间和结构总体最小范数的用于 EDS 模型阶估计的 STLNERC 算法.与 ESTER 相比估计精度更高.实验中我们发现,在更低信噪比(< 25 dB)下,除极点频率变化对估计精度有显著影响外,衰减因子,正弦幅度变化也会影响估计结果.这是由于信号的 Hankel 矩阵的奇异阵受强噪声影响,移不变性被完全破坏,算法不再适用了.另外,考虑到感觉加权的阶估计对于低比特率音频编码的重要意义,我们将就这一问题展开进一步研究.

参考文献:

- [1] W B Kleijn, K K Paliwal. Speech Coding and Synthesis[M]. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 1995. 121 - 173.
- [2] C Roads, et al. X Serra. musical sound modeling with sinusoids plus noise [A]. Musical Signal Processing[C]. Lisse, Netherlands: Swets & Zeitlinger Publishers, 1997. 91 - 122.
- [3] R Kumaresan, D Tufts. Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1982, 30(6): 833 - 840.
- [4] R Boyer, K Abed-Meraim. Audio transients modeling by damped and delayed sinusoids (DDS)[A]. Proceedings of ICASSP'02 [C]. Orlando, USA: IEEE Signal Processing Society, 2002. 1729 - 1732.
- [5] J Jensen, R Heusdens, S H Jensen. A perceptual subspace approach for modeling of speech and audio signals with damped sinusoids[J]. IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, 2004, 12(2): 121 - 132.
- [6] R Badeau, B David, et al. A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(2): 450 - 458.
- [7] P Stoica, Y Selen. Model - order selection: a review of infor-

- mation criterion rules[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2004, 21(4): 36 – 47.
- [8] R Roy, A Paulraj, T Kailath. ESPRIT-a subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1986, 34(5): 1340 – 1342.
- [9] S Van Huffel, J Vandewalle. The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis[M]. Philadelphia, USA: SIAM, 1991. 27 – 95, 213 – 220.
- [10] T J Abatzoglou, J M Mendel, et al. The constrained total least squares technique and its applications to harmonic superresolution[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(5): 1070 – 1087.
- [11] J B Rosen, H Park, et al. Total least norm formulation and solution for structured problems[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1996, 17(1): 110 – 126.
- [12] P Lemmerling, B De Moor, S Van Huffel. On the equivalence of constrained total least squares and structured total least squares[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(11): 2908 – 2911.
- [13] P Lemmerling, I Dologlou, S Van Huffel. Speech compression based on exact modeling and structured total least norm optimization[A]. Proceedings of ICASSP '98[C]. Seattle, USA: IEEE Signal Processing Society, 1998. 353 – 356.
- [14] M Haardt, J A Nossek. Structured least squares to improve the performance of ESPRIT-type high-resolution techniques[A]. Proceedings of ICASSP '96[C]. Atlanta, USA: IEEE Signal Processing Society, 1996. 2805 – 2808.
- [15] P Matsoms. Sparse QR factorization in MATLAB[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 1994, 20(1): 136 – 159.
- [16] G H Golub, C F van Loan. Matrix Computations[M]. 3rd ed. Baltimore, USA: The Johns Hopkins University Press, 1996. 89 – 90.

作者简介:



王 嵩 男, 1972 年 10 月生于四川省南部县, 北京工业大学博士研究生, 北京石油化学学院讲师, 研究方向为信号的参数建模方法、低比特率音频编码。

E-mail: s. wang@emails. bjut. edu. cn



鲍长春 男, 1965 年 6 月出生于内蒙古赤峰市, 博士, 教授, 博士生导师, 国际语音通信学会 (ISCA) 会员, 中国电子学会理事, 信号处理分会委员, 《通信学报》编委会副主任委员, 《信号处理》和《数据采集与处理》学报编委。主要研究领域为语音与音频信号处理及编码。

E-mail: chchbao@bjut. edu. cn