

# 一种新的阵列误差有源校正算法

王 鼎, 吴 瑛

(解放军信息工程大学信息工程学院, 河南郑州 450002)

**摘 要:** 阵列互耦、幅相误差以及阵元位置误差的综合影响会严重影响阵列天线的测向性能. 针对均匀圆阵, 该文基于特征空间类方法给出了一种新的阵列误差有源校正算法. 新算法是以交替迭代的方式给出, 其目标函数建立在子空间基本原理的基础上, 并且适用于多个校正源同时存在的情况. 文中还给出了阵列误差参数估计唯一性的必要条件, 仿真实验验证了新算法的有效性.

**关键词:** 阵列校正; 互耦; 幅相误差; 阵元位置误差; 复对称循环 Toeplitz 矩阵

**中图分类号:** TN911.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2010) 03-0517-08

## A Novel Array Errors Active Calibration Algorithm

WANG Ding, WU Ying

(Institute of Information Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou, Henan 450002, China)

**Abstract:** The combined effects of mutual coupling, gain-phase errors and sensor position errors of an array degrade severely its performance of the direction finding. Aimed at the uniform circular array (UCA), a novel active calibration algorithm for array errors is presented based on the eigenstructure method. The algorithm is given in alternative iterative style, and its target function is built on the properties of signal subspace. It is suitable for the situation when the calibration sources exist at the same time. The necessary condition for uniqueness of the parameter estimation is also given in this paper. The simulation experiments show the effectiveness of the novel algorithm.

**Key words:** array calibration; mutual coupling; gain-phase errors; sensor position errors; complex symmetric circular Toeplitz matrix

### 1 引言

在高分辨阵列测向技术中, 以 MUSIC 算法<sup>[1]</sup>为代表的特征空间类算法引起了众多学者的广泛关注. 然而, 该类算法往往需要在阵列流型无误差的条件下才能取得较好的效果. 但在实际应用中, 天线阵的各个阵元之间难免会存在互耦效应, 各个通道之间存在幅度和相位的不一致性 (即幅相误差), 并且阵元的实际位置与标称位置之间也时常会存在一定扰动误差. 这三种阵列误差使得实际的阵列流型与理想阵列流型有所不同, 从而导致测向性能的急剧下降, 甚至失效<sup>[2~6]</sup>. 因此阵列误差校正成为超分辨测向能否投入实用的关键环节之一.

目前, 国内外相关研究人员正致力于阵列误差校正方法的研究, 现有的校正方法主要分为自校正<sup>[7~11]</sup>和有源校正<sup>[12~15]</sup>两大类. 有源校正是在空间设置方位已知的辅助信源来对阵列误差参数进行离线估计; 而自校正则给出了阵列误差参数和信源方位的联合估计

值, 通常自校正需要实时处理, 计算过程更加繁琐, 本文主要研究有源校正方法. 在现有的阵列误差校正方法中, 大都是针对一种或两种阵列误差参数进行讨论的, 例如, 文献[7]和文献[12]单独针对阵元位置误差进行了讨论, 文献[10, 11]单独针对阵列互耦效应进行了讨论, 而文献[8]和文献[14]同时针对阵列幅相误差和互耦效应进行了讨论, 文献[13]则同时针对阵元位置误差和幅相误差进行了讨论. 虽然以上算法都能取得较好的效果, 但在实际应用中, 这三种阵列误差往往会不同程度的同时出现, 因此需要研究它们同时存在时的校正问题. 文献[15]提出了一种针对三种阵列误差的有源校正最大似然算法, 虽然该算法能够取得较好的效果, 但是并没有利用互耦矩阵的任何性质, 当互耦矩阵具有某些特殊性质时, 其参数估计精度有待进一步改善, 而且该算法是针对校正源分时工作的情况进行讨论的. 本文则提出了一种针对多个校正源同时存在情况下的阵列误差有源校正新算法, 该算法充分利用均匀圆阵互耦矩阵

的特殊性质<sup>[8]</sup>,并以交替迭代的方式实现了各种未知参数的优化计算,其目标函数参照了文献[16]中的优化模型,仿真实验验证了新算法的有效性,并且具有较高的参数估计性能.

## 2 阵列信号模型与问题的提出

假设阵列是由  $M$  个无方向性天线构成的均匀圆阵,它的第  $l$  个阵元的理想位置为  $(x_l, y_l)$ ,现有  $D$  个窄带确定性校正源同时到达该阵列,其中第  $k$  个校正源的方位为  $\theta_k$ ,则在理想条件下,阵列的方向矩阵为

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{a}(\theta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{a}(\theta_D)] \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{a}(\theta_k) = [\exp\{i2\pi(x_1 \cos\theta_k + y_1 \sin\theta_k)/\lambda\} \cdots$

$\exp\{i2\pi(x_M \cos\theta_k + y_M \sin\theta_k)/\lambda\}]^T$  为阵列流型向量,  $\lambda$  为校正源波长.

当阵列存在互耦、幅相误差以及阵元位置误差时,阵列流型向量可表示为

$$\mathbf{b}(\theta_k) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{a}(\theta_k) = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}_k\mathbf{a}(\theta_k) \quad (2)$$

式中  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k) = \mathbf{\Lambda}_k\mathbf{a}(\theta_k)$ ,  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{M \times M}$  为互耦矩阵,对于均匀圆阵而言,该矩阵可建模为复对称循环 Toeplitz 矩阵<sup>[8]</sup>,并且这里假设阵元位置的扰动误差对互耦矩阵模型的影响忽略不计,  $\mathbf{\Gamma}$  为幅相误差对角矩阵,并且可令  $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}[g_1 e^{i\phi_1} \quad g_2 e^{i\phi_2} \cdots g_M e^{i\phi_M}]$ ,其中  $g_l$  为幅度因子,  $\phi_l$  为相位误差因子,  $\mathbf{\Lambda}_k$  是由阵元位置误差引起的方位依赖对角矩阵,并且可令  $\mathbf{\Lambda}_k = \text{diag}[w_{1k} \quad w_{2k} \cdots w_{Mk}]$ ,其中  $w_{lk} = \exp\{i2\pi\Delta\tau_{lk}/\lambda\}$ ,  $\Delta\tau_{lk}$  是由阵元位置误差导致的时延差,它可表示为  $\Delta\tau_{lk} = \Delta x_l \cos\theta_k + \Delta y_l \sin\theta_k$ ,若以第 1 个阵元为参考阵元,则应有  $x_1 = y_1 = 0$  和  $\Delta x_1 = \Delta y_1 = 0$ ,从而有  $w_{1k} = 1$ . 此外,为了避免参数估计的模糊性,还可令  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{\Gamma}$  的第一个对角元素为 1,即  $c_{11} = 1$  和  $g_1 e^{i\phi_1} = 1$ . 由式(2)可知此时的阵列方向矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= [\mathbf{b}(\theta_1) \quad \mathbf{b}(\theta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{b}(\theta_D)] \\ &= \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}[\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{a}(\theta_1) \quad \mathbf{\Lambda}_2\mathbf{a}(\theta_2) \quad \cdots \quad \mathbf{\Lambda}_D\mathbf{a}(\theta_D)] \\ &= \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (3)$$

假设校正源之间以及校正源与噪声之间是统计独立的,则阵列输出及其协方差矩阵可分别表示为

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t) = \mathbf{B}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t), \\ \mathbf{R} = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] = \mathbf{B}\mathbf{P}\mathbf{B}^H + \sigma^2\mathbf{I}_M \\ = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{\Gamma}^H\mathbf{C}^H + \sigma^2\mathbf{I}_M \end{cases} \quad (4)$$

式中  $\mathbf{s}(t)$  为校正源的复包络,  $\mathbf{n}(t)$  为零均值高斯白噪声,  $\mathbf{P} = \text{diag}[p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_D]$  为对角矩阵,其中  $p_k$  为第  $k$  个校正源的功率,  $\sigma^2$  为噪声功率.

下面将解决如何在已知校正源方位和协方差矩阵的基础上,估计阵列互耦、幅相误差和阵元位置误差,这里需要假设阵元位置的扰动幅度不能过大,以免出现  $2\pi$  模糊现象,这一条件在通常情况下不难满足.

## 3 阵列误差校正的交替迭代算法

### 3.1 阵列误差参数的优化计算

下面给出文中阵列误差校正算法的推导过程,首先对矩阵  $\mathbf{R}$  进行特征分解可得

$$\mathbf{R} = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{\Gamma}^H\mathbf{C}^H + \sigma^2\mathbf{I}_M = \mathbf{U}_S\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}_S^H + \sigma^2\mathbf{U}_N\mathbf{U}_N^H \quad (5)$$

式中  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_D]$ , 其中  $\lambda_k$  为第  $k$  个特征值,其大小顺序为  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_D$ ,  $\mathbf{U}_S$  为大特征值对应的特征向量,它张成了信号子空间,并且满足  $\text{span}\{\mathbf{U}_S\} = \text{span}\{\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\}$ ,  $\mathbf{U}_N$  为小特征值对应的特征向量,它张成了噪声子空间,并且满足  $\text{span}\{\mathbf{U}_N\} \perp \text{span}\{\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\}$ .

由式(5)进一步可得

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{A}}^H\mathbf{\Gamma}^H\mathbf{C}^H = \mathbf{U}_S(\mathbf{\Lambda} - \sigma^2\mathbf{I}_D)\mathbf{U}_S^H = \mathbf{U}_S\mathbf{\Sigma}_S\mathbf{U}_S^H \quad (6)$$

式中  $\mathbf{\Sigma}_S = \mathbf{\Lambda} - \sigma^2\mathbf{I}_D$ . 根据式(6)不难证明<sup>[16]</sup>存在酉矩阵  $\mathbf{Q}$  满足

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}}^{1/2} = \mathbf{E}\mathbf{Q} \quad (7)$$

式中  $\mathbf{E} = \mathbf{U}_S\mathbf{\Sigma}_S^{1/2}$ ,  $\mathbf{P}^{1/2}$  和  $\mathbf{\Sigma}_S^{1/2}$  分别为矩阵  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{\Sigma}_S$  的平方根,而  $\mathbf{Q}$  满足  $\mathbf{Q}^H\mathbf{Q} = \mathbf{I}_D$ .

在实际计算中,协方差矩阵  $\mathbf{R}$  是由有限次样本累积计算出的,因此只能得到矩阵  $\mathbf{U}_S$  和  $\mathbf{\Sigma}_S$  的近似估计值  $\hat{\mathbf{U}}_S$  和  $\hat{\mathbf{\Sigma}}_S$ ,若令  $\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{U}}_S\hat{\mathbf{\Sigma}}_S^{1/2}$ ,则根据式(7)可将参数估计问题转化为如下优化问题

$$\min_{\mathbf{C}, \mathbf{\Gamma}, \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}} J = \min_{\mathbf{C}, \mathbf{\Gamma}, \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}} \|\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{P}}^{1/2} - \hat{\mathbf{E}}\mathbf{Q}\|_F^2 \quad (8)$$

在式(8)中,已知的矩阵只有  $\hat{\mathbf{E}}$ ,而其余五个矩阵  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{\Gamma}$ 、 $\tilde{\mathbf{A}}$ 、 $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  都是未知的.

为求解式(8),需要分析其中含有的未知变量(矩阵)的数学性质.首先  $\mathbf{C}$  为互耦矩阵,对于均匀圆阵而言,它可以用一个复对称循环 Toeplitz 矩阵进行建模<sup>[8]</sup>,该矩阵可由它的第一行中的元素完全确定,并且当  $M$  为偶数时,其自由度为  $L = M/2 + 1$ ;而当  $M$  为奇数时,其自由度为  $L = (M + 1)/2$ ,例如,对于 5 元均匀圆阵和 6 元均匀圆阵而言,其互耦矩阵分别具有如下结构

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_2 & x_1 \\ x_1 & x_0 & x_1 & x_2 & x_2 \\ x_2 & x_1 & x_0 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_2 & x_1 & x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & x_1 & x_0 \end{bmatrix} \text{和} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_2 & y_1 \\ y_1 & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_2 \\ y_2 & y_1 & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_3 & y_2 & y_1 & y_0 & y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 & y_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中  $x_0 = y_0 = 1$ ;  $\mathbf{\Gamma}$  是复对角矩阵,并且其第一个对角元素为 1;对于矩阵  $\tilde{\mathbf{A}}$  而言,在校正源方位已知的条件

下,其中的未知变量只有阵元位置误差  $\Delta x_l$  和  $\Delta y_l$  ( $l = 2, 3, \dots, M$ ), 它们均为实数;  $\mathbf{P}$  是实对角矩阵, 并且每个对角元素大于 0; 最后  $\mathbf{Q}$  为酉矩阵, 即满足  $\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{I}_D$ .

在已知这五个矩阵各自数学性质的基础上, 可以通过交替迭代的方式求解式(8). 首先在已知  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{\Gamma}$ 、 $\tilde{\mathbf{A}}$  和  $\mathbf{P}$  的条件下, 可以给出  $\mathbf{Q}$  的最优解如下<sup>[16,17]</sup>

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{V}^H \quad (10)$$

式中  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  分别为矩阵  $\hat{\mathbf{E}}^H \mathbf{C} \tilde{\mathbf{\Gamma}} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{P}^{1/2}$  的左、右奇异矩阵, 即满足  $\hat{\mathbf{E}}^H \mathbf{C} \tilde{\mathbf{\Gamma}} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{P}^{1/2} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H$ .

下面考虑如何在已知  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{\Gamma}$ 、 $\tilde{\mathbf{A}}$  和  $\mathbf{Q}$  的条件下, 估计  $\mathbf{P}$ , 不妨设  $\mathbf{F} = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{\Gamma}} \tilde{\mathbf{A}}$  和  $\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{E}} \mathbf{Q}$ , 并将它们按列分块为  $\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1 \ \mathbf{f}_2 \ \dots \ \mathbf{f}_D]$  和  $\hat{\mathbf{Q}} = [\hat{\mathbf{q}}_1 \ \hat{\mathbf{q}}_2 \ \dots \ \hat{\mathbf{q}}_D]$ , 则可以将式(8) 转化为如下优化问题

$$\min_{\mathbf{P}} J = \min_{\mathbf{P}} \sum_{k=1}^D \|p_k^{1/2} \mathbf{f}_k - \hat{\mathbf{q}}_k\|_2^2 \quad (11)$$

由上式不难看出, 每一个  $p_k^{1/2}$  可以分别进行优化, 即考虑如下优化问题

$$\min_{p_k^{1/2}} h_k = \min_{p_k^{1/2}} \|p_k^{1/2} \mathbf{f}_k - \hat{\mathbf{q}}_k\|_2^2 \quad (12)$$

显然, 这是个单变量二次优化问题, 由于  $p_k^{1/2}$  的数值必须为正数, 所以不妨考虑如下带约束的优化问题

$$\begin{cases} \min_{p_k^{1/2}} h_k = \min_{p_k^{1/2}} \|p_k^{1/2} \mathbf{f}_k - \hat{\mathbf{q}}_k\|_2^2 \\ \text{s.t. } p_k^{1/2} \geq \epsilon \end{cases} \quad (13)$$

式中  $\epsilon$  是一个较小的正数. 不难证明,  $p_k^{1/2}$  的最优值应取为

$$p_k^{1/2} = \begin{cases} \bar{p}_k^{1/2} & , \text{ 若 } \bar{p}_k^{1/2} > \epsilon \\ \epsilon & , \text{ 若 } \bar{p}_k^{1/2} \leq \epsilon \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{其中 } \bar{p}_k^{1/2} = \frac{\text{Re}\{\mathbf{f}_k^H \hat{\mathbf{q}}_k\}}{\|\mathbf{f}_k\|_2^2}.$$

下面考虑如何在已知  $\mathbf{\Gamma}$ 、 $\tilde{\mathbf{A}}$ 、 $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  的条件下, 估计  $\mathbf{C}$ , 在给出其计算方法之前, 首先引入下面的定理, 它对于  $\mathbf{C}$  的求解起着非常关键的作用.

**定理 1** 若  $\mathbf{C} = (c_{ij})_{M \times M}$  为  $M$  阶复对称循环 Toeplitz 矩阵,  $\mathbf{a} = (a_i)_{M \times 1}$  为任意  $M$  维复列向量, 则有<sup>[8]</sup>

$$\mathbf{C}\mathbf{a} = \mathbf{T}(\mathbf{a})\mathbf{c} \quad (15)$$

式中  $\mathbf{c} = (c_i)_{L \times 1}$  为  $L \times 1$  维复列向量, 并满足  $c_i = c_{i+1}$ , 当  $M$  为偶数时,  $L = M/2 + 1$ ; 当  $M$  为奇数时,  $L = (M + 1)/2$ ,  $\mathbf{T}(\mathbf{a})$  是由向量  $\mathbf{a}$  确定的  $M \times L$  阶矩阵, 它是以下四个矩阵的和, 即有

$$\mathbf{T}(\mathbf{a}) = \mathbf{T}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{T}_2(\mathbf{a}) + \mathbf{T}_3(\mathbf{a}) + \mathbf{T}_4(\mathbf{a}) \quad (16)$$

式中,

$$[\mathbf{T}_1(\mathbf{a})]_{ij} = \begin{cases} a_{i+j-1}, & i+j \leq M+1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$[\mathbf{T}_2(\mathbf{a})]_{ij} = \begin{cases} a_{i-j+1}, & i \geq j \geq 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$[\mathbf{T}_3(\mathbf{a})]_{ij} = \begin{cases} a_{M+1+i-j}, & i < j \leq \bar{L} \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

$$[\mathbf{T}_4(\mathbf{a})]_{ij} = \begin{cases} a_{i+j-M-1}, & 2 \leq j \leq \bar{L}; i+j \geq M+2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中当  $M$  为偶数时,  $\bar{L} = M/2$ ; 当  $M$  为奇数时,  $\bar{L} = (M + 1)/2$ .

在定理 1 的基础上, 再令  $\mathbf{H} = \mathbf{\Gamma} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{P}^{1/2}$ , 并将它按列分块为  $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \dots \ \mathbf{h}_D]$ , 则可将式(8) 转化为如下形式

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{c}} J = \min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{C}\mathbf{H} - \hat{\mathbf{Q}}\|_F^2 = \min_{\mathbf{c}} \sum_{k=1}^D \|\mathbf{C}\mathbf{h}_k - \hat{\mathbf{q}}_k\|_2^2 \\ = \min_{\mathbf{c}} \sum_{k=1}^D \|\mathbf{T}(\mathbf{h}_k)\mathbf{c} - \hat{\mathbf{q}}_k\|_2^2, \\ \text{s.t. } \mathbf{e}_1^T \mathbf{c} = 1 \end{cases} \quad (17)$$

式中  $\mathbf{e}_1$  表示第一个元素为 1, 其余元素均为零的  $L$  维单位向量,  $\mathbf{T}(\mathbf{h}_k)$  和  $\mathbf{c}$  由定理 1 所确定. 若令  $\mathbf{T}(\mathbf{h}_k) = [\mathbf{w}_k \ \mathbf{W}_k]$ , 其中  $\mathbf{w}_k$  是  $\mathbf{T}(\mathbf{h}_k)$  的第一列,  $\mathbf{W}_k$  为  $\mathbf{T}(\mathbf{h}_k)$  的后  $L-1$  个列向量构成的矩阵, 则可以证明式(17) 的最优解为

$$\mathbf{c}_{\text{opt}} = \left[ \frac{1}{\left( \sum_{k=1}^D \mathbf{W}_k^H \mathbf{W}_k \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^D \mathbf{W}_k^H (\hat{\mathbf{q}}_k - \mathbf{w}_k) \right)} \right] \quad (18)$$

上式是在所有阵元之间都存在互耦效应的基础上进行讨论的, 若仅考虑左右相邻的  $N$  ( $N < L$ ) 个阵元的互耦效应, 此时定理 1 中的向量  $\mathbf{c}$  中仅有前  $N$  个元素非零, 而后面  $L-N$  个元素均为零元素, 于是可将式(17) 转化为如下带约束的优化问题

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{c}} J = \min_{\mathbf{c}} \sum_{k=1}^D \|\mathbf{T}(\mathbf{h}_k)\mathbf{c} - \hat{\mathbf{q}}_k\|_2^2, \\ \text{s.t. } \mathbf{F}^T \mathbf{c} = \mathbf{0}_{L-N}, \mathbf{e}_1^T \mathbf{c} = 1, \end{cases} \quad (19)$$

式中  $\mathbf{F} = [\mathbf{e}_{N+1} \ \mathbf{e}_{N+2} \ \dots \ \mathbf{e}_L]$ . 为了求解式(19), 可令  $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_1^T \ \mathbf{0}_{L-N}^T]^T$  和  $\mathbf{T}(\mathbf{h}_k) = [\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{h}_k) \ \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{h}_k)]$ , 其中  $\mathbf{c}_1$  是  $\mathbf{c}$  的前  $N$  个元素构成的列向量,  $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{h}_k)$  是  $\mathbf{T}(\mathbf{h}_k)$  的前  $N$  个列向量构成的矩阵,  $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{h}_k)$  是  $\mathbf{T}(\mathbf{h}_k)$  的后  $L-N$  个列向量构成的矩阵, 于是式(19) 可转化为如下形式

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{c}_1} J = \min_{\mathbf{c}_1} \sum_{k=1}^D \|\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{h}_k)\mathbf{c}_1 - \hat{\mathbf{q}}_k\|_2^2, \\ \text{s.t. } \mathbf{e}_1^T \mathbf{c}_1 = 1, \end{cases} \quad (20)$$

这里  $\mathbf{e}_1$  表示第一个元素为 1, 其余元素均为零的  $N$  维单位向量. 若再令  $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{h}_k) = [\hat{\mathbf{w}}_k \ \hat{\mathbf{W}}_k]$ , 其中  $\hat{\mathbf{w}}_k$  是  $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{h}_k)$  的第一列,  $\hat{\mathbf{W}}_k$  为  $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{h}_k)$  的后  $N-1$  个列向量构成的矩阵, 则可以证明式(20) 的最优解为

$$\mathbf{c}_{1\text{opt}} = \left[ \frac{1}{\left( \sum_{k=1}^D \hat{\mathbf{w}}_k^H \hat{\mathbf{w}}_k \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^D \hat{\mathbf{w}}_k^H (\hat{\mathbf{q}}_k - \hat{\mathbf{w}}_k) \right)} \right] \quad (21)$$

由此可得式(19)的最优解为  $\mathbf{c}_{\text{opt}} = [\mathbf{c}_{1\text{opt}}^T \quad \mathbf{0}_{L-N}^T]^T$ .

下面考虑如何在已知  $\mathbf{C}$ 、 $\tilde{\mathbf{A}}$ 、 $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  的条件下,估计  $\mathbf{\Gamma}$ ,不妨令  $\mathbf{t}$  是  $\mathbf{\Gamma}$  的对角元素构成的列向量,于是可将式(8)转化成如下形式

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{t}} J = \min_{\mathbf{t}} \sum_{k=1}^D \| p_k^{1/2} \mathbf{C} \cdot \text{diag}[\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k)] \cdot \mathbf{t} - \hat{\mathbf{q}}_k \|_2^2 \\ = \min_{\mathbf{t}} \sum_{k=1}^D \| \tilde{\mathbf{C}}_k \mathbf{t} - \hat{\mathbf{q}}_k \|_2^2, \\ \text{s.t. } \mathbf{e}_1^T \mathbf{t} = 1, \end{cases} \quad (22)$$

式中  $\tilde{\mathbf{C}}_k = p_k^{1/2} \mathbf{C} \cdot \text{diag}[\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k)]$ ,  $\text{diag}[\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k)]$  表示由向量  $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_k)$  构成的对角矩阵.若令  $\tilde{\mathbf{C}}_k = [\tilde{\mathbf{r}}_k \quad \tilde{\mathbf{R}}_k]$ , 其中  $\tilde{\mathbf{r}}_k$  是  $\tilde{\mathbf{C}}_k$  的第一列,  $\tilde{\mathbf{R}}_k$  为  $\tilde{\mathbf{C}}_k$  的后  $M-1$  个列向量构成的矩阵,则类似式(17)和式(18),可证明式(22)的最优解为

$$\mathbf{t}_{\text{opt}} = \left[ \frac{1}{\left( \sum_{k=1}^D \tilde{\mathbf{R}}_k^H \tilde{\mathbf{R}}_k \right)^{-1} \left( \sum_{k=1}^D \tilde{\mathbf{R}}_k^H (\hat{\mathbf{q}}_k - \tilde{\mathbf{r}}_k) \right)} \right] \quad (23)$$

下面考虑如何在已知  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{\Gamma}$ 、 $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  的条件下,估计  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,也即估计阵元位置误差  $\Delta x_l$  和  $\Delta y_l$  ( $l=2,3,\dots,M$ ).为了便于算法推导,这里不妨考虑如下代价函数

$$\text{ming} = \min_{\Delta x, \Delta y} \| \mathbf{I} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{P}^{1/2} - \mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{E}} \mathbf{Q} \|_F^2 \quad (24)$$

并设  $\mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{E}} \mathbf{Q}$  的第  $l$  行为  $\mathbf{z}_l$ ,  $\mathbf{\Gamma}$  的第  $l$  个对角元素为  $t_l$ ,则可以将式(8)转化为如下优化问题

$$\begin{aligned} \text{ming} = \min_{\Delta x, \Delta y} \sum_{l=2}^M \sum_{k=1}^D & |t_l p_k^{1/2} \\ & \cdot \exp\{i2\pi[(x_l + \Delta x_l) \cos \theta_k + (y_l + \Delta y_l) \sin \theta_k] / \lambda\} \\ & - z_l(k) \|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

式中累加下标从 2 开始的原因在于  $\Delta x_1 = \Delta y_1 = 0$ , 而  $z_l(k)$  表示向量  $\mathbf{z}_l$  的第  $k$  个元素.另一方面,由上式还可以看出,每一个  $\Delta x_l$  和  $\Delta y_l$  可以分别进行优化,即考虑如下优化问题

$$\begin{aligned} \min_{\Delta x_l, \Delta y_l} g_l &= \min_{\Delta x_l, \Delta y_l} \sum_{k=1}^D |t_l p_k^{1/2} \\ & \cdot \exp\{i2\pi[(x_l + \Delta x_l) \cos \theta_k + (y_l + \Delta y_l) \sin \theta_k] / \lambda\} \\ & - z_l(k) \|^2 \\ &= \min_{\Delta x_l, \Delta y_l} \sum_{k=1}^D |t_l p_k^{1/2} a_l(k) \\ & \cdot \exp\{i(m_k \Delta x_l + n_k \Delta y_l)\} - z_l(k) \|^2 \end{aligned} \quad (26)$$

式中,  $a_l(k) = \exp\{i2\pi(x_l \cos \theta_k + y_l \sin \theta_k) / \lambda\}$ ,  $m_k = 2\pi \cos \theta_k / \lambda$  和  $n_k = 2\pi \sin \theta_k / \lambda$ .

显然,式(26)是一个含有两变量的非线性优化问题,其求解方法很多,最直接的方法是通过二维搜索的方式获得,这里将给出两种求解方法:第一种方法给出

了一种近似闭式解;第二种方法则是一种 Gauss-Newton 迭代法,其中第一种方法的精度不如第二种方法,但是可以为第二种方法提供初始解.

首先推导第一种方法,当阵元位置误差扰动很小且满足  $m_k \Delta x_l + n_k \Delta y_l \ll 1$  时,可进行如下近似

$$\exp\{i(m_k \Delta x_l + n_k \Delta y_l)\} \approx 1 + i(m_k \Delta x_l + n_k \Delta y_l) \quad (27)$$

根据式(27),可将式(26)转化成如下优化问题

$$\begin{aligned} \min_{\Delta x_l, \Delta y_l} g_l &\approx \min_{\Delta x_l, \Delta y_l} \sum_{k=1}^D |t_l p_k^{1/2} a_l(k) \\ & \cdot [1 + i(m_k \Delta x_l + n_k \Delta y_l)] - z_l(k) \|^2 \\ &= \min_{\Delta x_l, \Delta y_l} \sum_{k=1}^D |i t_l p_k^{1/2} a_l(k) m_k \Delta x_l \\ & + i t_l p_k^{1/2} a_l(k) n_k \Delta y_l + t_l p_k^{1/2} a_l(k) - z_l(k) \|^2 \end{aligned} \quad (28)$$

不妨将式(28)写成如下矩阵向量的形式

$$\min_{\Delta x_l, \Delta y_l} g_l \approx \min_{\Delta x_l, \Delta y_l} \left\| \mathbf{B}_l \begin{bmatrix} \Delta x_l \\ \Delta y_l \end{bmatrix} - \mathbf{b}_l \right\|_2^2 \quad (29)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{b}_l = [z_l(1) - t_l p_1^{1/2} a_l(1) & z_l(2) - t_l p_2^{1/2} a_l(2) \\ \dots & z_l(D) - t_l p_D^{1/2} a_l(D)]^T, \\ \mathbf{B}_l = i t_l \begin{bmatrix} p_1^{1/2} a_l(1) m_1 & p_2^{1/2} a_l(2) m_2 & \dots & p_D^{1/2} a_l(D) m_D \\ p_1^{1/2} a_l(1) n_1 & p_2^{1/2} a_l(2) n_2 & \dots & p_D^{1/2} a_l(D) n_D \end{bmatrix} \end{cases}^T \quad (30)$$

不难证明,式(29)的最优解为

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{x}_l \\ \Delta \hat{y}_l \end{bmatrix}_{\text{opt}} = [\text{Re}(\mathbf{B}_l^H \mathbf{B}_l)]^{-1} \text{Re}(\mathbf{B}_l^H \mathbf{b}_l) \quad (31)$$

下面再推导一种求解式(26)的 Gauss-Newton 迭代法,不妨将式(26)修改为

$$\begin{aligned} g_l &= \sum_{k=1}^D \{ \bar{z}_l(k) - p_k^{1/2} [\bar{\gamma}_l(k) c_l(k) - \tilde{\gamma}_l(k) s_l(k)] \|^2 \\ & + \sum_{k=1}^D \{ \tilde{z}_l(k) - p_k^{1/2} [\tilde{\gamma}_l(k) s_l(k) + \bar{\gamma}_l(k) c_l(k)] \|^2 \end{aligned} \quad (32)$$

式中  $\gamma_l(k) = t_l a_l(k)$ ,  $c_l(k) = \cos(m_k \Delta x_l + n_k \Delta y_l)$ ,  $s_l(k) = \sin(m_k \Delta x_l + n_k \Delta y_l)$ ,  $\bar{z}_l(k)$  和  $\tilde{z}_l(k)$  分别表示  $z_l(k)$  的实部和虚部,  $\bar{\gamma}_l(k)$  和  $\tilde{\gamma}_l(k)$  分别表示  $\gamma_l(k)$  的实部和虚部.

若记  $\mathbf{s}_{l1} = [\bar{z}_l(1) \quad \bar{z}_l(2) \quad \dots \quad \bar{z}_l(D)]^T$ ,

$\mathbf{s}_{l2} = [\tilde{z}_l(1) \quad \tilde{z}_l(2) \quad \dots \quad \tilde{z}_l(D)]^T$  和

$\mathbf{s}_l = [\mathbf{s}_{l1}^T \quad \mathbf{s}_{l2}^T]^T$ , 则式(32)又可改写为

$$\begin{aligned} g_l &= \|\mathbf{s}_{l1} - \mathbf{g}_{l1}(\boldsymbol{\Theta}_l)\|_2^2 + \|\mathbf{s}_{l2} - \mathbf{g}_{l2}(\boldsymbol{\Theta}_l)\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{l1} \\ \mathbf{s}_{l2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{l1}(\boldsymbol{\Theta}_l) \\ \mathbf{g}_{l2}(\boldsymbol{\Theta}_l) \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|\mathbf{s}_l - \mathbf{g}_l(\boldsymbol{\Theta}_l)\|_2^2 \end{aligned} \quad (33)$$

式中  $\boldsymbol{\Theta}_l$  表示二维参数向量  $\boldsymbol{\Theta}_l = [\Delta x_l \quad \Delta y_l]^T$ ,  $\mathbf{g}_l(\boldsymbol{\Theta}_l) = [\mathbf{g}_{l1}^T(\boldsymbol{\Theta}_l) \quad \mathbf{g}_{l2}^T(\boldsymbol{\Theta}_l)]^T$  是关于参数向量  $\boldsymbol{\Theta}_l$  的非线性函数向量,其表达式可从式(32)中获得.于是最小化  $g_l$

的过程可近似认为是求解实的非线性方程组  $s_l = g_l(\Theta_l)$  的过程,若利用 Gauss-Newton 法进行求解可得其迭代公式如下

$$\Theta_l^{(n+1)} = \Theta_l^{(n)} + (\mathbf{G}_l^{(n)\text{T}}\mathbf{G}_l^{(n)})^{-1}\mathbf{G}_l^{(n)\text{T}}(s_l - g_l(\Theta_l^{(n)})) \quad (34)$$

式中  $\mathbf{G}_l^{(n)} = \left. \frac{\partial g_l(\Theta)}{\partial \Theta} \right|_{\Theta = \Theta_l^{(n)}}$  为非线性函数  $g_l(\cdot)$  在  $\Theta_l^{(n)}$  处的 Jacobi 矩阵,它可写为

$$\mathbf{G}_l^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{l1}^{(n)} \\ \mathbf{G}_{l2}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\text{其中 } \begin{cases} \mathbf{G}_{l1}^{(n)}(k,1) = -p_k^{1/2}m_k(\bar{\gamma}_l(k)s_l(k) + \tilde{\gamma}_l(k)c_l(k)), \\ \mathbf{G}_{l1}^{(n)}(k,2) = -p_k^{1/2}n_k(\bar{\gamma}_l(k)s_l(k) + \tilde{\gamma}_l(k)c_l(k)), \\ \mathbf{G}_{l2}^{(n)}(k,1) = p_k^{1/2}m_k(\bar{\gamma}_l(k)c_l(k) - \tilde{\gamma}_l(k)s_l(k)), \\ \mathbf{G}_{l2}^{(n)}(k,2) = p_k^{1/2}n_k(\bar{\gamma}_l(k)c_l(k) - \tilde{\gamma}_l(k)s_l(k)), \\ k = 1, 2, \dots, D \end{cases} \quad (36)$$

由于 Gauss-Newton 法需要迭代进行,因此可将第一种方法得到的近似闭式解(式(31))作为它的初始解进行迭代.仿真结果表明,Gauss-Newton 法的参数估计精度要高于第一种方法,这也是可以直观理解的,因为式(27)只有在阵元位置误差扰动很小的条件下才近似相等.因此,为提高参数估计精度,在下文的仿真中都只采用 Gauss-Newton 法,并且以第一种方法的结果作为初始解.

至此文中已经给出了针对每一个变量(矩阵)的优化方法,由于算法是迭代进行的,因此还需要给出每一个变量(矩阵)的初始值.其中矩阵  $\mathbf{Q}$  的初值可以选择单位矩阵  $\mathbf{I}$ ;  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{\Gamma}$  的初值也可以选择单位矩阵  $\mathbf{I}$ ;而在阵元位置误差扰动较小的条件下,  $\Delta\mathbf{x}$  和  $\Delta\mathbf{y}$  的初值可以设为  $\mathbf{0}$ ;最后矩阵  $\mathbf{P}$  的初值可以根据式(14)确定.

### 3.2 交替迭代算法的基本步骤

下面给出文中算法的全部计算步骤:

**步骤 1** 初始化:设置  $\epsilon$  为一个很小的正数和  $k = 0$ ,令  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}$  和  $\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ,利用式(14)计算矩阵  $\mathbf{P}$ ,利用式(8)计算目标函数  $J_0$ ;

**步骤 2** 利用最新的  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{\Gamma}$ 、 $\tilde{\mathbf{A}}$  和  $\mathbf{P}$ ,根据式(10)计算  $\mathbf{Q}$ ;

**步骤 3** 利用最新的  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{\Gamma}$ 、 $\tilde{\mathbf{A}}$  和  $\mathbf{Q}$ ,根据式(14)计算  $\mathbf{P}$ ;

**步骤 4** 利用最新的  $\mathbf{\Gamma}$ 、 $\tilde{\mathbf{A}}$ 、 $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$ ,根据式(21)计算  $\mathbf{C}$ ;

**步骤 5** 利用最新的  $\mathbf{C}$ 、 $\tilde{\mathbf{A}}$ 、 $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$ ,根据式(23)计算  $\mathbf{\Gamma}$ ;

**步骤 6** 利用最新的  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{\Gamma}$ 、 $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$ ,根据式(34)计算  $\Delta x_l$  和  $\Delta y_l (l = 2, 3, \dots, M)$ ,从而确定出  $\tilde{\mathbf{A}}$ ;

**步骤 7** 令  $k = k + 1$ ,并计算此时的目标函数  $J_k$ ;

**步骤 8** 计算  $\Delta_k = |J_k - J_{k-1}|$ ,若  $\Delta_k \leq \epsilon$ ,则停止计算;否则转至步骤 2.

由于算法的每一步迭代都会使目标函数减少,并且目标函数总是非负的,所以算法的收敛性是可以保证的,但能否达到全局最优解尚无有效证明,但是仿真实验表明,算法能够收敛到较优的解.另一方面,虽然文中的算法需要交替迭代,但是在优化每个参数时,基本上可以得到其最优闭式解,只是在估计阵元位置误差时需要迭代,但由于已经为其提供了一个相对较好的初始解,因此其迭代次数也是较少的,所以文中算法的计算量并不很大.此外,文中的算法也可以应用于校正其中某一种或两种阵列误差参数的情况,此时只需要忽略不需要考虑的阵列误差参数的校正步骤即可.

## 4 参数估计的必要条件

本节将简单讨论参数估计唯一性的必要条件,这里讨论的参数均是指实参数,下面主要从两个方面进行讨论.首先根据文献[8]中的方法进行计算,由于矩阵  $\mathbf{R}$  可由  $2MD - D^2 + 1$  个参数确定,其中包括  $D + 1$  个实特征值和  $2(MD - D(D + 1)/2)$  信号子空间  $\mathbf{U}_s$  中的自由参数,而  $\mathbf{R}$  中未知的参数包括:信源协方差矩阵  $\mathbf{P}$  中的  $D$  个参数,1 个未知的噪声功率,矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  中的  $2(M - 1)$  个参数,矩阵  $\mathbf{C}$  中的  $2(N - 1)$  个参数,  $\Delta\mathbf{x}$  和  $\Delta\mathbf{y}$  中含有的  $2(M - 1)$  个参数,因此必须满足

$$2(MD - D(D + 1)/2) + D + 1 \geq D + 1 + 2(N - 1) + 4(M - 1) \Leftrightarrow M \geq \frac{D^2 + D + 2N - 6}{2D - 4} \text{ 且 } D > 2 \quad (37)$$

另一方面,由式(8)确定的独立实方程个数为  $2MD$ ,而其中未知的参数包括:信源协方差矩阵  $\mathbf{P}$  中的  $D$  个参数,矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  中的  $2(M - 1)$  个参数,矩阵  $\mathbf{C}$  中的  $2(N - 1)$  个参数,  $\Delta\mathbf{x}$  和  $\Delta\mathbf{y}$  中含有的  $2(M - 1)$  个参数,矩阵  $\mathbf{Q}$  中的  $2(D^2 - D(D + 1)/2)$  个自由参数,因此必须满足

$$2MD \geq D + 2(N - 1) + 4(M - 1) + 2(D^2 - D(D + 1)/2) \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq \frac{D^2 + 2N - 6}{2D - 4}, & \text{当 } D > 2 \text{ 时,} \\ N = 1, & \text{当 } D = 2 \text{ 时} \end{cases} \quad (38)$$

结合式(37)和式(38)可得必要条件为

$$M \geq \max \left\{ \frac{D^2 + D + 2N - 6}{2D - 4}, \frac{D^2 + 2N - 6}{2D - 4} \right\} = \frac{D^2 + D + 2N - 6}{2D - 4}, D > 2 \quad (39)$$

## 5 实验结果与分析

### 5.1 验证算法有效性的仿真实验

设阵列流型为 12 元均匀圆阵,孔径比为 1.5,现有

4个校正源同时到达该阵列,其方位间隔为 $60^\circ$ ,相应方位分别为 $0^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $120^\circ$ 和 $180^\circ$ ,信噪比均为10dB,快拍数为500.图1给出了文中算法的迭代收敛曲线;图2给出了阵元理想位置、实际位置和估计位置示意图.表1给

出了阵元理想位置、实际位置和估计位置的数值;表2给出了互耦因子的真实值和估计值(这里仅考虑相邻3个阵元之间的互耦效应,即 $N=3$ );表3和表4分别给出了幅度因子和相位误差因子的真实值和估计值.

表1 阵元理想位置、实际位置和估计位置的数值(单位: $\lambda$ )

坐标	理想值	实际值	估计值	估计偏差	坐标	理想值	实际值	估计值	估计偏差
$X_1$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	$Y_1$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$X_2$	-0.2010	-0.1224	-0.1216	0.0008	$Y_2$	0.7500	0.8154	0.8113	0.0041
$X_3$	-0.7500	-0.7870	-0.7847	0.0023	$Y_3$	1.2990	1.3589	1.3558	0.0031
$X_4$	-1.5000	-1.4429	-1.4421	0.0008	$Y_4$	1.5000	1.5219	1.5217	0.0002
$X_5$	-2.2500	-2.3277	-2.3276	0.0001	$Y_5$	1.2990	1.2620	1.2584	0.0036
$X_6$	-2.7990	-2.8257	-2.8245	0.0012	$Y_6$	0.7500	0.7048	0.7071	0.0023
$X_7$	-3.0000	-3.0762	-3.0756	0.0006	$Y_7$	0.0000	-0.0871	-0.0908	0.0037
$X_8$	-2.7990	-2.7410	-2.7393	0.0017	$Y_8$	-0.7500	-0.7674	-0.7715	0.0041
$X_9$	-2.2500	-2.1665	-2.1644	0.0021	$Y_9$	-1.2990	-1.3307	-1.3334	0.0027
$X_{10}$	-1.5000	-1.5336	-1.5320	0.0016	$Y_{10}$	-1.5000	-1.4295	-1.4320	0.0025
$X_{11}$	-0.7500	-0.7083	-0.7065	0.0018	$Y_{11}$	-1.2990	-1.2444	-1.2463	0.0019
$X_{12}$	-0.2010	-0.2473	-0.2480	0.0007	$Y_{12}$	-0.7500	-0.7670	-0.7712	0.0042

表2 互耦因子的真实值和估计值

阵元	1	2	3
实际值	1.0000	0.1831 - 0.1747i	0.0321 + 0.0218i
估计值	1.0000	0.1832 - 0.1728i	0.0318 + 0.0223i
估计相对误差	0.00%	0.73%	1.50%

表3 幅度因子的真实值和估计值

阵元	1	2	3	4	5	6
实际值	1.0000	0.8978	1.0598	0.7627	1.3240	1.2999
估计值	1.0000	0.8940	1.0512	0.7631	1.3191	1.2933
估计偏差	0.0000	0.0038	0.0086	0.0004	0.0049	0.0066

阵元	7	8	9	10	11	12
实际值	1.2455	0.8477	1.0674	0.7190	0.9497	0.8786
估计值	1.2412	0.8467	1.0652	0.7111	0.9450	0.8710
估计偏差	0.0043	0.0010	0.0022	0.0079	0.0047	0.0076

表4 相位误差因子的真实值和估计值

阵元	1	2	3	4	5	6
实际值( $^\circ$ )	0.0000	-22.7633	5.3704	-16.4287	-6.9229	4.9792
估计值( $^\circ$ )	0.0000	-21.6261	5.8978	-16.0990	-5.7811	6.1149
估计偏差( $^\circ$ )	0.0000	1.1372	0.5274	0.3297	1.1418	1.1357

阵元	7	8	9	10	11	12
实际值( $^\circ$ )	-14.8916	-12.5736	7.0255	-14.0831	19.4626	28.9598
估计值( $^\circ$ )	-14.2356	-11.7566	8.2096	-12.4911	20.5116	30.2825
估计偏差( $^\circ$ )	0.6560	0.8170	1.1841	1.5920	1.0490	1.3227

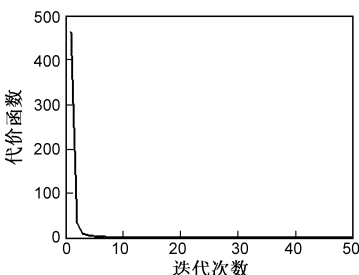


图1 算法迭代收敛曲线

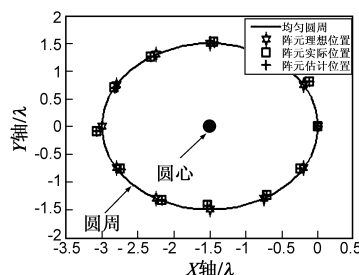


图2 阵元理想位置、实际位置和估计位置示意图

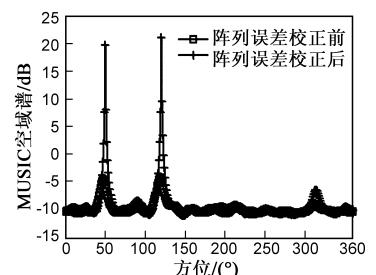


图3 阵列误差校正前后的空域谱图

## 5.2 验证算法参数估计性能的仿真实验

为了进一步验证文中算法的性能,这里将文中的算法与其它算法进行比较,首先与文献[8]中的算法进行比较,由于文献[8]中仅考虑了阵列互耦和幅相误差的校正,因此,为了便于比较,这里不考虑阵元位置误差,并省略文中算法中关于阵元位置误差的校正环节.另一方面,虽然文献[8]中的算法是一种自校正方法,但同样可将其应用于有源校正,只是省略其中关于信源方位估计这一环节即可,此时需要考虑的优化问题为<sup>[8]</sup>

$$\min_{C, \Gamma} J = \min_{C, \Gamma} \sum_{k=1}^D \|U_N^H C \Gamma a(\theta_k)\|_2^2 \quad (40)$$

上式同样可通过交替迭代的方式进行求解,文献

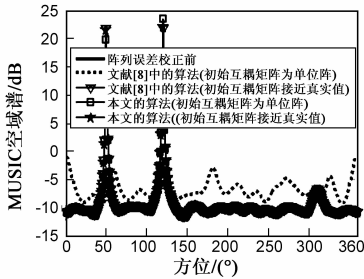


图4 阵列误差校正前后的空域谱图

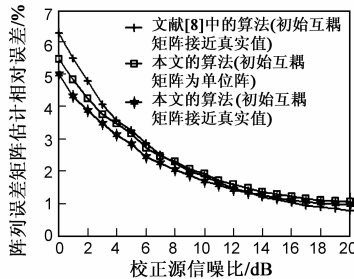


图5 阵列误差矩阵估计相对误差随着校正源信噪比的变化曲线

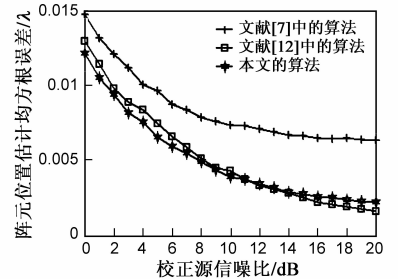


图6 阵元位置估计均方根误差随着校正源信噪比的变化曲线

从图4中可以看出,当初始互耦矩阵接近真实值时,文献[8]中的算法可以有效的估计出阵列误差;但是当初始互耦矩阵设为单位阵时(此时初始误差较大),文献[8]中的算法已经失效了,而本文的算法则受其影响较小.另一方面,从图5中可以看出,相比文献[8]中的算法,当信噪比较小时,文中算法的参数估计精度要略高些,但是当信噪比较大时,文中算法的参数估计精度又要略差些.此外,从计算量的角度来看,由于两种算法都是基于交替迭代的思想给出的,只是优化的目标函数不同,因此两者的计算量相当.

下面再将文中的算法与文献[7]和[12]中的算法进行比较,由于它们都是阵元位置误差校正算法,因此为了便于比较,这里不考虑阵列互耦和幅相误差的影响,并省略文中算法中关于阵列互耦和幅相误差的校正环节,其余仿真条件同5.1小节.再定义阵元位置估计的均方根误差 $e_r$ 如下:独立进行200次实验,设第 $k$ 次实验估计出第 $l$ 个阵元的 $X$ 轴方向和 $Y$ 轴方向的坐标分别为 $\hat{x}_{kl}$ 和 $\hat{y}_{kl}$ ,则 $e_r$ 定义为

$$e_r = \sqrt{\frac{1}{200} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{200} \sum_{l=1}^M [(x_l - \hat{x}_{kl})^2 + (y_l - \hat{y}_{kl})^2]} \quad (42)$$

图6给出了阵元位置估计均方根误差随着校正源信噪比的变化曲线.

[8]中已经分别给出了单独优化 $C$ 和 $\Gamma$ 时的最优闭式解.仿真条件基本同图3,只是这里没有阵元位置误差,并且为了比较两种算法受初始误差影响的大小,这里把互耦因子增大为 $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0.2831 - 0.2747i$ 和 $c_3 = 0.0821 + 0.0718i$ .图4给出了阵列误差校正前后的空域谱图.再定义阵列误差矩阵 $M = C\Gamma$ 的估计相对误差 $e_M$ 如下:独立进行200次实验,设第 $k$ 次实验估计的阵列互耦矩阵和幅相误差矩阵分别为 $\hat{C}_k$ 和 $\hat{\Gamma}_k$ ,于是阵列误差矩阵为 $\hat{M}_k = \hat{C}_k \hat{\Gamma}_k$ ,则 $e_M$ 定义为

$$e_M = \sqrt{\left( \frac{1}{200} \sum_{k=1}^{200} \|M - \hat{M}_k\|_F^2 \right) / \|M\|_F^2} \quad (41)$$

图5给出了阵列误差矩阵估计相对误差随着校正源信噪比的变化曲线.

从图6中可以看出,本文的算法和文献[12]中的算法精度均明显高于文献[7]中的算法,这是因为文献[7]中的算法进行了一阶Taylor级数展开,因此在阵元位置误差不是很小的情况下,其精度不如其余两种,而相比文献[12]而言,当信噪比较小时,文中算法的精度要略高些,但是当信噪比较大时,文中算法的精度仍然要略差些.此外,从计算量的角度来看,文献[7]中的算法最少,而其余两种算法稍大.从以上两个仿真结果可知,文中算法的性能基本上是能够令人满意的.

## 6 结论

本文针对均匀圆阵,基于特征结构类方法提出了一种新的阵列互耦、幅相误差以及阵元位置误差有源校正算法.该算法以交替迭代的形式给出,其目标函数参照了文献[16]中的优化模型,适用于多个校正源同时存在的情况.此外,文中还给出了阵列误差参数估计唯一性的必要条件.仿真实验验证了新算法的有效性,并且该算法还可推广应用于校正某一种或两种阵列误差参数的情况,其计算量也比较适中,性能也是基本令人满意的,只是当校正源信噪比较大时,其精度有待进一步提高,这也是今后需要研究并加以改进的地方.

参考文献:

- [1] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propaga-

- tion, 1986, 34(3):267 – 280.
- [2] FRIEDLANDER B. A sensitivity analysis of the MUSIC algorithm[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1990, 38(10):1740 – 1751.
- [3] SWINDLEHURST A, KAILATH T. A performance analysis of subspace-based methods in the presence of model error: Part I — The MUSIC algorithm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(7):1758 – 1774.
- [4] HAMZA R, BUCKLEY K. An analysis of weighted eigenspace methods in the presence of sensor errors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(5):1140 – 1150.
- [5] FERRÉOL A, LARZABAL P, VIBERG M. On the asymptotic performance analysis of subspace DOA estimation in the presence of modeling errors: case of MUSIC[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(3):907 – 920.
- [6] FERRÉOL A, LARZABAL P, VIBERG M. On the resolution probability of MUSIC in presence of modeling errors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(5):1945 – 1953.
- [7] WEISS A J, FRIEDLANDER B. Array shape calibration using eigenstructure methods[A]. 23rd Conference on Signals, Systems and Computers [C]. Asilomar; Aviv University Press, 1989. 2:925 – 929.
- [8] FRIEDLANDER B, WEISS A J. Direction finding in the presence of mutual coupling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1991, 39(3):273 – 284.
- [9] VIBERG M, SWINDLEHURST A L. A Bayesian approach to auto-calibration for parametric array signal processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(12):3495 – 3507.
- [10] SELONE F, SERRA A. A novel mutual coupling compensation algorithm for uniform and linear arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(2):560 – 573.
- [11] 刘章孟, 黄知涛, 周一宇. 线性阵列互耦矩阵和波达方向的联合估计[J]. 电子学报, 2008, 36(12):2458 – 2463.  
LIU Zhang-meng, HUANG Zhi-tao, ZHOU Yi-yu. Joint estimation of mutual coupling matrix and direction-of-arrival in linear arrays[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(12):2458 – 2463. (in Chinese)
- [12] NG B C, SER W. Array shape calibration using sources in known locations[A]. Singapore ICCS/ISITA'92'. Communications on the Moveapos' [C]. Singapore: Piscataway NJ Press, 1992. 2:836 – 840.
- [13] 贾永康, 保铮, 吴涸. 一种阵列天线阵元位置、幅度及相位误差的有源校正方法[J]. 电子学报, 1996, 24(3):47 – 52.  
JIA Yong-kang, BAO Zheng, WU Huan. A new calibration technique with signal sources for position, gain and phase uncertainty of sensor array[J]. Acta Electronica Sinica, 1996, 24(3):47 – 52. (in Chinese)
- [14] 王鼎, 李长胜, 吴瑛. 基于特征向量的阵列误差矩阵最优闭式解[J]. 应用科学学报, 2009, 27(6):592 – 600.  
WANG Ding, LI Chang-sheng, WU Ying. Optimal closed-form solution to array error matrix based on eigenvector[J]. Journal of Applied Sciences, 2009, 31(1):64 – 69. (in Chinese)
- [15] NG B C, SEE C M S. Sensor array calibration using a maximum-likelihood approach[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1996, 44(6):827 – 835.
- [16] WEISS A J, FRIEDLANDER B. “Almost Blind” steering vector estimation using second-order moments[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(4):1024 – 1027.
- [17] 胡茂林. 矩阵计算与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008. 130 – 138.

#### 作者简介:



王 鼎 男, 1982 年 10 月出生于安徽省芜湖市. 博士研究生, 主要研究方向为阵列信号处理.

E-mail: wang\_ding814@yahoo.com.cn

吴 瑛 女, 1960 年 8 月出生于河南省郑州市. 现为解放军信息工程大学教授和博导, 主要从事现代信号处理方面的研究工作.

E-mail: hnwuying22@163.com