

# 基于信赖域的序贯拟蒙特卡洛滤波算法

徐立中<sup>1,2</sup>, 丁晓峰<sup>1</sup>, 王 鑫<sup>1,2</sup>, 吕国芳<sup>1</sup>, 黄凤辰<sup>1,2</sup>

(1. 河海大学计算机与信息学院, 江苏南京 210098; 2. 河海大学通信与信息系统研究所, 江苏南京 210098)

**摘 要:** 针对系统状态估计、目标跟踪等是包含多源不确定性信息的非线性非高斯随机过程, 提出了一种基于信赖域的序贯拟蒙特卡洛(Sequential Quasi-Monte Carlo, SQMC)滤波算法. 该算法利用拟蒙特卡洛积分技术优化采样粒子在状态空间的分布特性, 降低了滤波过程中的积分误差, 提高了状态估计精度; 同时, 利用信赖域(Trust Region, TR)方法将采样粒子向高似然区域移动, 减少了所需采样粒子的数目, 降低了算法复杂度. 实验结果表明: 该算法有效克服了粒子贫乏和拟蒙特卡洛滤波计算复杂度高的问题, 且在非线性系统状态估计精度以及目标跟踪的准确性上要优于粒子滤波和拟蒙特卡洛滤波等现有算法.

**关键词:** 拟蒙特卡洛滤波; 信赖域; 状态估计; 目标跟踪

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 3A-024-07

## Trust Region Based Sequential Quasi-Monte Carlo Filter

XU Li-zhong<sup>1,2</sup>, DING Xiao-feng<sup>1</sup>, WANG Xin<sup>1,2</sup>, LV Guo-fang<sup>1</sup>, HUANG Feng-chen<sup>1,2</sup>

(1. College of Computer and Information Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China;

2. Institute of Communication and Information System Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China)

**Abstract:** A trust region based sequential quasi-Monte Carlo filter is proposed for system state estimation and object tracking which are the non-linear and non-Gaussian random procedures with multi-source uncertain information. In the proposed algorithm, the quasi-Monte Carlo (QMC) technique is used to optimize the distribution of the sampling particles in the state space, which can obtain a small error of the integration in the filtering process and a better accuracy of the state estimation. Furthermore, a trust region (TR) procedure is used to move particles to regions of high likelihood, which results in a fewer particle selection and lower computational cost. Experimental results show that the proposed algorithm overcomes the particle impoverishment, reduces the computational complexity of the QMC filter, and gets a more accuracy estimation than existing algorithms such as particle filter and QMC filter in system state estimation and object tracking.

**Key words:** Quasi-Monte filter; trust region; state estimation; object tracking

## 1 引言

对于许多实际应用领域, 如系统状态估计、目标跟踪、故障诊断、模型辨识等, 越来越多的多源不确定性信息需要在系统建模时被考虑<sup>[15]</sup>. 由于目标的属性或特征、以及背景或环境信息的不确定性, 导致了状态估计、目标跟踪、模型辨识等通常是包含多源不确定性信息的非线性非高斯随机过程.

对于非线性非高斯模型, 粒子滤波(Particle Filter, PF)算法因为能灵活适应非线性动态模型和多模态观测模型, 被认为是目前解决非线性非高斯模型最成功的方法. PF算法是一种基于蒙特卡洛(Monte Carlo, MC)技术求解贝叶斯概率的实用算法, 它的核心思想是通过重要

函数产生带权值样本(粒子)来逼近系统状态的真实后验概率分布. 近年来, 随着计算机的计算成本的不断下降以及计算能力的不断提高, 以非参数化的蒙特卡洛模拟为特色的粒子滤波方法逐渐成为非线性、非高斯随机系统估计问题的研究热点和有效方法<sup>[1~9]</sup>, 且在一些领域<sup>[1,6~8]</sup>用传统分析方法解决不了的问题, 如模型选择/变化检测, 参数估计/系统辨识和故障检测等方面, 现在也可以借助基于粒子仿真的方法来解决. 然而粒子退化、粒子多样性贫乏是粒子滤波中不可避免的、同时又严重影响粒子滤波器性能的现象, 粒子滤波器经过几次迭代之后, 经常只有少数粒子分布在目标真实状态附件, 对目标状态的估计起着作用, 而其余粒子对目标状态的估计几乎不起作用, 由于产生了大量无用粒子从而

大大浪费了计算资源,同时又降低了对目标状态估计的精度.针对粒子退化现象,Gordon 等<sup>[4]</sup>提出了重采样算法但是重采样算法仅复制大权值样本,可能导致采样枯竭,当系统噪音较小时,易造成样本的聚集.为解决这一问题,提高粒子滤波中的采样效率,一些学者提出:(1)通过选取更好的提议分布(Proposal Distribution, PD)来减少粒子数目<sup>[2,3]</sup>;(2)通过利用优化算法来将粒子移向高似然区域<sup>[10,13]</sup>.然而通常情况下很难找到适合系统的提议分布;且在优化过程中,粒子不再服从后验概率分布,所以这些方法不能产生一个近似准确的期望后验分布.

粒子滤波中,基于 MC 的随机采样过程获得的粒子具有随意性,这会造成粒子集合在状态空间积聚在一起或形成空隙,从而不能充分描述分布函数降低估计的精度.拟蒙特卡洛(Quasi-Monte Carlo, QMC)方法可以看作是 MC 方法相对应的确定性方法,该方法通过确定性采样产生的低差异序列比 MC 方法产生的随机序列分布更加均匀,从而获得比 MC 方法更高的估计精度.Guo 和 Wang<sup>[12]</sup>将 QMC 方法引入到非线性动态系统的估计中,提出了序贯拟蒙特卡洛(Sequential Quasi-Monte Carlo, SQMC)滤波算法,该算法利用拟蒙特卡洛采样产生的低差异确定性序列来替代蒙特卡洛采样中的随机序列,使采样粒子的分布更加均匀,从而提高了估计的精度.由于拟蒙特卡洛滤波中单个粒子权值的计算依赖于前一时间所有粒子的分布,导致了该算法计算复杂度与粒子个数的平方成正比,算法存在计算量过大的缺点.

针对上述问题,本文提出了一种基于信赖域(Trust-region, TR)的序贯拟蒙特卡洛(TR-SQMC)滤波算法.该算法在每次迭代后,没有直接估计系统的状态,而是通过信赖域方法来调整采样粒子的位置,将粒子向高似然区域移动,提高采样粒子对概率密度函数的表示能力,降低粒子退化问题,从而减少了计算所需的粒子数目,一定程度上降低了计算复杂度.

## 2 序贯拟蒙特卡洛滤波算法

粒子滤波(Particle Filter, PF)是基于概率密度粒子表示的序贯蒙特卡洛方法,采用蒙特卡洛仿真来完成递归贝叶斯滤波过程<sup>[2]</sup>.序贯拟蒙特卡洛滤波可以看作是粒子滤波的拟蒙特卡洛实现,即利用拟蒙特卡洛仿真来完成递归贝叶斯滤波过程.由于拟蒙特卡洛方法拥有比蒙特卡洛方法更快的收敛速度和更高的精度,从而使得拟蒙特卡洛滤波相较于一般粒子滤波有更高的精度.

### 2.1 粒子滤波算法

非线性动态系统一般可以用下述状态方程和观测

方程来表示

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

其中  $k \in N$  是时间指标,  $\mathbf{x}_k \in R^n$  是  $k$  时刻的系统状态向量,  $\mathbf{f}_k: R^n \times R^n \rightarrow R^n$  是状态演化映射,  $\{\mathbf{w}_k\}_{k \in N}$  是独立同分布(i. i. d)的过程噪音序列,  $\mathbf{g}_k: R^n \times R^m \rightarrow R^m$  是观测映射,  $\{\mathbf{v}_k\}_{k \in N}$  是 i. i. d 观测噪音序列,  $\mathbf{z}_k \in R^m$  是  $k$  时刻的观测量.令  $\mathbf{x}_0 \in R^n$  为系统初始状态,  $\mathbf{z}_{1:k} \doteq \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k\}$  为从 1 时刻到  $k$  时刻的观测集合.通过观测集合  $\mathbf{z}_{1:k}$  估计对应时刻的状态  $\mathbf{x}_{1:k} \doteq \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$  是滤波的目的.

贝叶斯滤波根据观测样本  $\mathbf{z}_{1:k}$  递推估计系统状态的后验概率密度  $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{z}_{1:k})$ , 然后计算当前状态  $\mathbf{z}_k$  在最小均方误差准则下的最优估计.后验概率密度的估计可以通过预测和更新两个步骤获得.在预测阶段,  $k$  时刻的先验后验密度(prior posterior density)  $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{z}_{1:k-1})$  可以通过查普曼-柯尔莫科洛夫(Chapman-Kolmogorov)方程计算得到

$$p(\mathbf{x}_k/\mathbf{z}_{1:k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}/\mathbf{z}_{1:k-1}) \quad (3)$$

在更新阶段,利用贝叶斯准则和观测量  $\mathbf{z}_k$  可以计算得到后验概率密度函数

$$p(\mathbf{x}_k/\mathbf{z}_{1:k}) = \frac{p(\mathbf{z}_k/\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k/\mathbf{z}_{1:k-1})}{c_k} \quad (4)$$

其中  $c_k = \int p(\mathbf{z}_k/\mathbf{x}_k)p(\mathbf{x}_k/\mathbf{z}_{1:k-1})d\mathbf{x}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $p(\mathbf{z}_k/\mathbf{x}_k)$  和  $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{x}_{k-1})$  分别对应观测模型和动态模型.

粒子滤波通过选取一个重要性概率密度并从中进行随机抽样,得到一些带有相应权值的随机样本后,在状态观测的基础上调节权值大小和粒子位置,再使用这些样本来逼近状态后验分布,最后通过这组样本的加权求和作为状态的估计值.

### 2.2 序贯拟蒙特卡洛滤波算法

粒子滤波主要通过蒙特卡洛技术近似计算式(3)和(4)中的积分.由于 MC 积分中采用的随机采样序列容易发生采样点聚集,从而影响采样点对于采样空间的描述不充分.QMC 方法的提出很好的解决了 MC 采样对于采样空间的描述不充分问题,它通过确定性采样方法获得了比 MC 采样更加均匀的采样序列,一般称为低差异序列.典型的低差异序列有 Halton 序列、Sobol 序列、Niederreiter 序列、LHS(Latin hypercube sampling)序列等.特别地,对一个给定的  $d$  维积分,如果采样点个数为  $N$ ,则根据 Koksma-Hlawka 不等式有 QMC 方法的收敛速度是  $O(\log_d N/N)$  高于 MC 方法的收敛速度  $O(1/\sqrt{N})$ .

为了说明 MC 方法和 QMC 方法的区别,考虑定义在  $d$  维单位超体  $C^d: [0, 1]^d$  上的实值函数  $f(\mathbf{x})$  的积分  $I = \int_{C^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . MC 和 QMC 方法均是:先在积分区域上选取  $N$  个采样点  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ , 然后通过式(5)计算得到积分的近似估计.

$$\hat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i) \quad (5)$$

MC 方法和 QMC 方法的区别在于, MC 方法中点  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  为  $C^d$  上的  $N$  个相互独立且服从  $U[0, 1]^d$  分布的点, 而 QMC 方法中点  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  来自  $C^d$  上的一个低差异序列.

以 Halton 序列为例, 说明低差异序列的生成方法. 给定素数  $b$ , 则以  $b$  为基数的 Halton 序列的构造可以通过式(6)和(7)递归计算得到.

$$\begin{cases} j = d_m d_{m-1} \dots, d_0 = \sum_{k=0}^m d_k b^k \\ H_b(j) = 0. d_0 \dots, d_m = \sum_{k=0}^m d_k b^{-k-1}, j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6)$$

其中  $d_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ ,  $H_b(j)$  为以  $b$  为基数的 Halton 序列的第  $j$  个元素. 以不同的素数  $b_1, b_2, \dots, b_d$  为基, 就能得到  $d$  维 Halton 序列. 给定基数  $b_0$ ,

令  $n_0$  为  $[0, 1]$  上的随机数, 则有  $n_0 = H_{b_0}(j_0) = \sum_{k=0}^m d_k b_0^{-k-1}$  成立, 其中  $j_0$  为整数, 此时序列  $\{H_{b_0}(j_0 + i)\}_{i=0, 1, \dots}$  为以  $b_0$  为基数的随机 Halton 序列.

将 QMC 方法引入到式(3)和(4)中, 即可以通过式(7)和(8)估计得到后验概率密度.

$$p(\mathbf{x}_k / \mathbf{z}_{1:k-1}) \cong \sum_{j=1}^N w_{k-1}^{(j)} p(\mathbf{x}_k / x_k^{(j)}) \quad (7)$$

$$w_k^{(j)} \triangleq p(\mathbf{x}_k^{(j)} / \mathbf{z}_{1:k}) \propto \frac{1}{\hat{c}_k} p(\mathbf{z}_k / \mathbf{x}_k^{(j)}) p(\mathbf{x}_k^{(j)} / \mathbf{z}_{1:k-1}) \quad (8)$$

其中  $\hat{c}_k = \sum_{j=1}^N p(\mathbf{z}_k / \mathbf{x}_k^{(j)}) p(\mathbf{x}_k^{(j)} / \mathbf{z}_{1:k-1})$ . SQMC 算法与 PF 算法的主要区别在于 SQMC 算法用 QMC 采样代替了 PF 算法中 MC 采样. Guo 和 Wang<sup>[12]</sup> 将 QMC 方法引入到了非线性系统的状态估计中, 得到了 SQMC 算法.

### 3 基于信赖域的序贯拟蒙特卡洛滤波算法

序贯拟蒙特卡洛滤波由于采用了 QMC 方法相较于传统的 PF 滤波算法, 在一定程度上提高了粒子使用的效率, 但是 SQMC 滤波算法的计算复杂度为  $O(N^2)$  高于 PF 滤波算法的计算复杂度  $O(N)$ . 为了降低算法复杂度, 提高采样粒子的表示能力, 本文给出了基于信赖域的序贯拟蒙特卡洛(TR-SQMC)滤波算法.

### 3.1 信赖域方法

信赖域方法的研究始于 20 世纪六十年代的 Powell<sup>[14]</sup>, 在一定意义下信赖域方法等价于求解非线性最小二乘问题的 Levenberg-Marquardt 算法. 信赖域方法具有很好的可靠性和强适性, 以及很强的收敛性. 一个完整的信赖域方法主要包括三个部分: (1) 信赖域半径; (2) 信赖域子问题; (3) 信赖域近似度.

考虑一个典型的无约束优化问题

$$\min_{\mathbf{x} \in V} f(\mathbf{x}) \quad (9)$$

其中  $V$  为一个向量空间,  $f$  为最小化目标函数.

信赖域方法的基本思想是假设目标函数在迭代点附近与二次函数的性质相似, 因此对每一个迭代点  $\mathbf{x}_k$  确定一个步长上界为  $\Delta_k$ , 定义  $\mathbf{x}_k$  的领域为  $\Omega_k = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \leq \Delta_k\}$ , 又称为信赖域. 假定该领域内函数  $q_k(\mathbf{x}_k + \mathbf{s})$  与目标函数  $f(\mathbf{x}_k + \mathbf{s})$  一致, 然后用二次模型确定试验步长  $\mathbf{s}_k$ . 二次模型(又称为信赖域子模型)为:

$$\begin{cases} \min q_k(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_k^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{G}_k \mathbf{s} \\ \text{s.t.} \quad \|\mathbf{s}\| \leq \Delta_k \end{cases} \quad (10)$$

其中  $\|\cdot\|$  为  $V$  中某一范数, 一般为二范数,  $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$ ,  $\mathbf{G}_k$  为  $f$  在  $\mathbf{x}_k$  的 Hessian 矩阵.

一般可以通过折线法、二维搜索法或截断共轭梯度法直接计算信赖域子问题的近似解. 假设信赖域子模型的解为  $\mathbf{s}_k$ , 定义  $\Delta f_k$  为  $f$  在第  $k$  步的实际下降量:

$$\Delta f_k = f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k) \quad (11)$$

$\Delta q_k$  为对应的预测下降量:

$$\Delta q_k = f(\mathbf{x}_k) - q(\mathbf{s}_k) \quad (12)$$

定义比值

$$r_k = \frac{\Delta f_k}{\Delta q_k} \quad (13)$$

$r_k$  反映了信赖域子模型在  $\Omega_k$  上与目标函数的近似程度. 若  $r_k$  接近 1, 则可以认为子模型  $q(\mathbf{s}_k)$  在信赖域  $\Omega_k$  上与目标函数  $f(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k)$  的近似程度很好. 因而, 此时可以扩大信赖域半径. 反之, 若  $r_k$  远离 1, 则可以认为子模型  $q(\mathbf{s}_k)$  在信赖域  $\Omega_k$  上与目标函数  $f(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k)$  的近似程度不好. 因而, 此时应缩小信赖域半径, 以提高  $q(\mathbf{s}_k)$  在信赖域  $\Omega_k$  上与目标函数  $f(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k)$  的近似程度. 若  $r_k \geq \eta_1$ , 则令  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k$ , 否则令  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$ , 一般  $\eta_1 = 0.05$ . 确定了  $\mathbf{x}_{k+1}$  后, 信赖域半径  $\Delta_k$  可通过式(14)更新.

$$\Delta_{k+1} = \begin{cases} \max\{\alpha_1 \|\mathbf{s}_k\|, \Delta_k\}, & r_k \geq \eta_2 \\ \Delta_k, & r_k \in [\eta_1, \eta_2) \\ \alpha_2 \|\mathbf{s}_k\|, & r_k < \eta_1 \end{cases} \quad (14)$$

其中  $\eta_2 = 0.9$ ,  $\alpha_1 = 2.5$ ,  $\alpha_2 = 0.25$ ,  $\Delta_0 = \frac{1}{10} \|g_0\|$ . 当

$\|\Delta f(\mathbf{x}_k)\| \leq \epsilon$  时迭代终止。

信赖域方法可以看作是迭代优化算法的一种,相比于线性搜索迭代优化算法,信赖域方法在确定了方向的同时确定步长.由于信赖域方法是通过迭代求解有界区域内的对应优化问题求解原问题的最优解,从而使得信赖域方法比线性搜索有更多的迭代选择,且有优于线性搜索的收敛速度和最优解,线性搜索方法有时又可以看作是信赖域方法的一种特例.

### 3.2 基于信赖域的拟蒙特卡洛滤波算法

针对拟蒙特卡洛滤波算法中,粒子采样效率低以及计算复杂度高的问题,将信赖域方法引入到 QMC 滤波算法中,提出了基于信赖域的序贯拟蒙特卡洛滤波算法.该算法在每次迭代后没有直接估计系统状态,而是通过信赖域方法来调整采样粒子的位置来提高采样粒子对后验概率密度函数的表示能力,从而提高了算法精度,减少了采样粒子个数,降低了计算复杂度.相较于一般基于梯度下降优化算法,如:均值漂移(Mean Shift, MS)方法,的粒子滤波方法<sup>[10,13]</sup>,本文利用信赖域方法在优化求解时通过迭代求解对应应有界区域内优化问题的思想,针对每一个粒子建立对应的信赖域子问题,通过求解每一个子问题将粒子向高似然区域移动,然后再更新对应粒子的权重即可.相较于文献<sup>[10,13]</sup>中基于均值漂移的算法,本文算法的优势有:(1)搜索效率更高,更容易达到局部权值最大;(2)通过控制信赖域子问题的有界区域及迭代次数,避免了信赖域优化方法将粒子移向高似然区域后,粒子在采样空间中不规则分布,从而避免了文献<sup>[13]</sup>中基于均值漂移后的粒子在空间中易形成不规则分布,为了补偿这种不规则分布需要与基于  $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{z}_{1:k-1})$  采样的粒子相结合计算后验概率密度.

假设算法迭代之后的离散点及其对应权值为  $\{\mathbf{x}_k^{(j)}, w_k^{(j)}\}_{j=1}^N$ ,则后验概率密度函数的连续形式可以用核函数  $K_\lambda$  表示为<sup>[16]</sup>:

$$p(\mathbf{x}/\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^N h w_k^{(j)} K_\lambda(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(j)}) \quad (15)$$

其中  $K_\lambda(\cdot)$  是窗宽  $\lambda$  标度的核函数,即  $K_\lambda(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(j)}) = \frac{1}{\lambda^d} K\left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(j)}}{\lambda}\right)$ . 当核函数为高斯核,后验概率服从高

斯分布时,最优窗宽  $\lambda$  为  $\lambda_{opt} = \left(\frac{4}{(d+2)N}\right)^{\frac{1}{d+4}}$ . 由于实际应用中,密度函数通常为多模态的,一般令  $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{2} \lambda_{opt}$ <sup>[16]</sup>. 本文及后面的实验中,我们选用  $K(\mathbf{x})$  为高斯

核,即  $K(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2}\right)$ . 得到核概率密度核函数后,利用信赖域方法来调整每一个粒子的位置,使

其向高似然区域移动,记移动后的每一个粒子的新位置为  $m(\mathbf{x}_k^{(j)})$ . 由于移动后的粒子不是直接从  $p(\mathbf{x}_k/\mathbf{z}_{1:k-1})$  采样得到,破坏了贝叶斯方法的原理,为了能继续使用移动后的新粒子,当每一个采样粒子的位置发生变化后其权值也要做相应的变化才能描述其概率密度函数.每一个新粒子的权重通过式(16)进行更新.

$$w_k^{(j)} = \frac{p(\mathbf{x}_k^{(j)}/\mathbf{z}_{1:k})}{h(\mathbf{x}_k^{(j)})} \quad (16)$$

其中  $h(\mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^N K_\lambda(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(j)})$  为平衡因子,  $p(\mathbf{x}_k^{(j)}/\mathbf{z}_{1:k})$  可以通过式(8)计算得到.

通过将信赖域优化方法应用到序贯拟蒙特卡洛滤波中,使迭代后的粒子在保证其满足规则分布的前提下向高似然区域移动,加强了粒子对于后验概率的描述能力,提高了算法的估计精度,减少了粒子使用个数,降低了计算复杂度.基于信赖域的序贯拟蒙特卡洛滤波算法具体步骤见算法 1.

#### 算法 1 基于信赖域的序贯拟蒙特卡洛滤波算法

**步骤 1** 初始化:在区间  $[0,1]^d$  上生成 QMC 点集  $\{\mathbf{u}^{(j)}\}_{j=1}^N$ ,通过  $\mathbf{x}^{(j)} = [a + (b-a) \cdot \mathbf{u}^{(j)}]$ ,其中  $\cdot$  表示向量点乘,将其转换为  $[a_0, b_0]$  上的点集  $\{\mathbf{x}_0^{(j)}\}_{j=1}^N$ ,然后计算先验密度  $p(\mathbf{x}_0^{(j)})$ .

**步骤 2** 预测:预测  $\mathbf{x}_k$  的支撑区间  $[a_k, b_k]$ ;生成  $[0,1]^d$  上的 QMC 点集  $\{\mathbf{u}^{(j)}\}_{j=1}^N$ ,通过  $\mathbf{x}^{(j)} = [a + (b-a) \cdot \mathbf{u}^{(j)}]$ ,其中  $\cdot$  表示向量点乘,将其转换为  $[a_k, b_k]$  上的点集  $\{\mathbf{x}_k^{(j)}\}_{j=1}^N$ ;通过式(7)计算预测概率密度  $p(\mathbf{x}_k^{(j)}/\mathbf{z}_{1:k-1})$ ,  $j=1, \dots, N$ .

**步骤 3** 滤波:通过式(8)计算后验概率密度  $p(\mathbf{x}_k^{(j)}/\mathbf{z}_{1:k})$ ,  $j=1, \dots, N$ .

**步骤 4** 信赖域优化:通过建立  $p(\mathbf{x}_k^{(j)}/\mathbf{z}_{1:k})$ ,  $j=1, \dots, N$  的连续形式,利用信赖域优化算法更新粒子的位置和权值,将得到的新的样本集  $\{\hat{\mathbf{x}}_k^{(j)}, \hat{w}_k^{(j)}\}_{j=1}^N$  代替原样本集  $\{\mathbf{x}_k^{(j)}, w_k^{(j)}\}_{j=1}^N$ .

## 4 仿真实验与分析

为了验证提出的 TR-SQMC 算法的性能,本文将基于均值漂移的粒子滤波 (MS-PF) 算法<sup>[13]</sup>、SQMC 算法<sup>[12]</sup>、基于均值漂移的序贯拟蒙特卡洛滤波 (MS-SQMC) 算法<sup>[10]</sup> 和 TR-SQMC 算法分别应用于非线性动态模型状态估计和二维空间中的目标跟踪,比较了算法的估计精度和计算效率等.其中 SQMC 算法为采用文献<sup>[12]</sup>中利用无迹卡尔曼滤波 (Unscented Kalman Filter) 预测采样区间的 SQMC 算法.

### 4.1 非线性动态模型

为了验证 TR-SQMC 算法在非线性动态模型状态估计时的性能,我们采用了两种典型的一维非线性系统模型:非线性非高斯模型<sup>[9]</sup> 和单变量非静态增长模型<sup>[4]</sup>,来验证本算法的有效性.

#### 4.1.1 非线性非高斯模型

该模型的状态方程为:

$$\mathbf{x}_k = 0.5\mathbf{x}_{k-1} + \sin(0.04\pi k) + 1 + \mathbf{w}_{k-1} \quad (17)$$

$$z_k = \frac{\mathbf{x}_k^2}{2} + v_k \quad (18)$$

其中  $x_0 \sim N(0,5)$ ;  $\mathbf{w}_k \sim \Gamma(3,2)$ ;  $v_k \sim N(0,1)$ . 数据点数  $K = 100$ . 分别利用 MS-PF、SQMC、MS-SQMC 和 TR-SQMC 对模型状态进行估计, 计算估计值和真值之间的均方根误差 (RMSE),  $RMSE(\hat{x}) = [\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (x_k - \hat{x}_k)^2]^{\frac{1}{2}}$ . 仿真实验进行 100 次, 每一次仿真的 RMSE 与仿真次数的关系见图 1, 100 次仿真实验的平均 RMSE (RMSE mean)、协方差 (RMSE variance) 和平均运行时间见表 1 所示. TR-SQMC 算法中, 将采样区域  $N$  等分, 每一个子区域的大小即为粒子所在位置处信赖域子问题的取值范围, 为了降低信赖域优化算法带来的计算复杂度, 规定信赖域只迭代 5 次.

由于系统状态方程非线性特征不是较强, 每一种算法在进行估计的时候都可以得到较好的估计精度, 在相同的粒子数下, TR-SQMC 精度比其它算法要高, 比较 RMSE 的协方差可以得到, TR-SQMC 算法的拥有比其它算法更好的稳定性. 使用 TR-SQMC 算法时, 可以通过减少使用粒子的数目仍能达到原 SQMC 算法的精度.

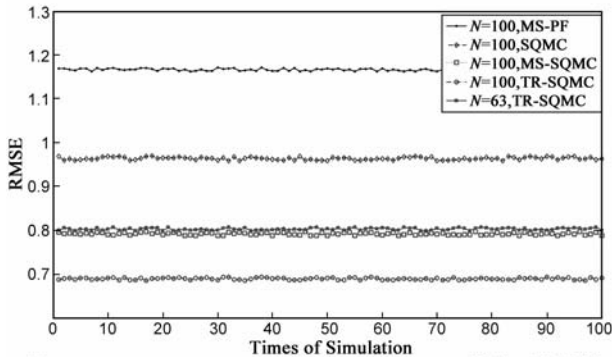


图1 MS-PF、SQMC、MS-SQMC和TR-SQMC算法对非线性非高斯模型100次仿真的RMSE

表1 MS-PF、SQMC、MS-SQMC 和 TR-SQMC 对模型的估计误差和运行时间

| 算法                  | RMSE mean | RMSE variance | 运行时间(秒)  |
|---------------------|-----------|---------------|----------|
| $N = 100$ , MS-PF   | 1.1673    | 0.0049        | 86.3616  |
| $N = 100$ , SQMC    | 0.9638    | 0.0056        | 100.6185 |
| $N = 100$ , MS-SQMC | 0.7925    | 0.0045        | 110.3598 |
| $N = 100$ , TR-SQMC | 0.6897    | 0.0038        | 123.5671 |
| $N = 63$ , TR-SQMC  | 0.8037    | 0.0043        | 79.1392  |

#### 4.1.2 单变量非静态增长模型

单变量非静态增长模型具有典型的非线性特征, 其状态空间方程为:

$$x_k = 0.5x_{k-1} + 25 \frac{x_{k-1}}{1 + x_{k-1}^2} + 8\cos(1.2k) + w_{k-1} \quad (19)$$

$$z_k = \frac{x_k^2}{20} + v_k \quad (20)$$

其中  $x_0 \sim N(0,5)$ ;  $\mathbf{w}_k \sim N(0,10)$ ;  $v_k \sim N(0,1)$ . 数据点数  $K = 100$ . 该模型中各种噪声均服从高斯分布, 可以利用改进的卡尔曼滤波算法对模型进行估计, 如扩展卡尔曼滤波 (EKF)、无迹卡尔曼滤波 (UKF) 等, 具体实验结果可以见文献 [12].

为了验证本文提出信赖域优化算法的优点, 我们分别利用 MS-PF、SQMC、MS-SQMC 和 TR-SQMC 对模型进行估计, 仿真实验分别进行 100 次, 计算估计值和真值之间的 RMSE, 每一次仿真的 RMSE 与仿真次数的关系见图 2, 100 次仿真实验的平均 RMSE、协方差和平均运行时间见表 2. 由表 1 可以看出在粒子数相同的情况下 MS-PF、SQMC、MS-SQMC 以及 TR-SQMC 算法的估计精度越来越高, 使用时间方面也越来越多; 但是当 TR-SQMC 中的粒子数  $N = 70$  时, 算法的估计精度均好于  $N = 100$  时的 MS-PF、SQMC、MS-SQMC, 且计算效率高于 MS-PF 和 SQMC 算法.

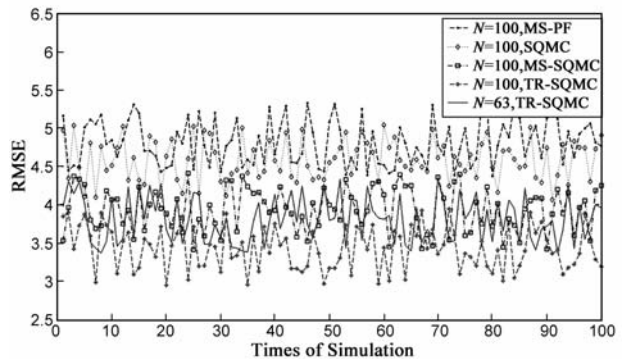


图2 MS-PF、SQMC、MS-SQMC和TR-SQMC算法对单变量非静态增长模型100次仿真的RMSE

表2 MS-PF、SQMC、MS-SQMC 和 TR-SQMC 算法对单变量非静态增长模型的估计误差和运行时间

| 算法                  | RMSE mean | RMSE variance | 运行时间(秒)  |
|---------------------|-----------|---------------|----------|
| $N = 100$ , MS-PF   | 4.8496    | 1.2698        | 75.3175  |
| $N = 100$ , SQMC    | 4.5619    | 0.9658        | 87.2798  |
| $N = 100$ , MS-SQMC | 3.9137    | 0.8695        | 106.3698 |
| $N = 100$ , TR-SQMC | 3.4395    | 0.8269        | 119.5913 |
| $N = 70$ , TR-SQMC  | 3.8395    | 0.9163        | 85.7139  |

通过上述两个典型的非线性状态估计实验, 我们可以得到: 本文提出的算法通过信赖域方法将粒子向高似然区域移动后, 提高了采样粒子的表示能力减少了粒子的数目, 一定程度上降低了算法的计算量, 提高了算法的计算效率.

## 4.2 二维目标跟踪中的应用

一般目标跟踪模型可以表示如下:

$$\mathbf{x}_k = F\mathbf{x}_{k-1} + G\mathbf{u}_k \quad (21)$$

$$z_k = g(\mathbf{x}_k) + v_k \quad (22)$$

其中式(21)是状态方程,状态噪声  $\mathbf{u}_k \sim N(0, Q)$ ;式(22)是观测模型,  $g(\cdot)$  为非线性观测模型,  $v_k \sim N(0, R)$ ,且  $v_k$  与  $\mathbf{u}_k$  相互独立.本文考虑一个点目标在二维平面上的运动<sup>[4]</sup>,即纯角度跟踪模型,传感器只能观测目标的方位角.则  $\mathbf{x}_k$  表示目标在二维平面上的位置和速度  $\mathbf{x}_k \triangleq [x_k, y_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k]^T$ .则模型关于时间常数  $\Delta k$  的离散状态方程为:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} I_2 & \Delta I_2 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{pmatrix} \frac{\Delta k^2}{2} I_2 \\ \Delta I_2 \end{pmatrix} \mathbf{u}_k \quad (23)$$

其中  $I_2$  为  $2 \times 2$  的单位矩阵,  $\mathbf{u}_k$  为均值为  $[0, 0]$  协方差矩阵为  $Q = \text{diag}(\sigma_x^2, \sigma_y^2)$  的高斯向量.

$$g(\mathbf{x}_k) = \arctan\left(\frac{y_k}{x_k}\right) \quad (24)$$

在仿真实验中,令  $\sigma_x = \sigma_y = 0.5$ ,  $\sigma_v = 0.1$ .假设目标的初始状态  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} + [10, 10]^T$ ,其中  $\mathbf{x}$  为服从均值为  $[0, 0]^T$ ,方差为  $\Sigma_0 = \text{diag}(10^2, 10^2)$  的二维高斯分布.

我们分别采用 MS-PF, SQMC, MS-SQMC 和 TR-SQMC 来估计目标的位置.数据点数  $K = 100$ ,粒子数  $N = 100$ ,仿真实验 100 次.实验结果见表 3.实验结果表明相同粒子条件下 TR-SQMC 算法的估计精度最高.

表 3 MS-PF, SQMC, MS-SQMC 和 TR-SQMC 算法对目标跟踪模型的估计误差和运行时间

| 算法                  | $\hat{x}$ RMSE | $\hat{y}$ RMSE | $\dot{x}$ RMSE | $\dot{y}$ RMSE | 运行时间(秒)  |
|---------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|
| $N = 100$ , MS-PF   | 3.5352         | 1.9648         | 3.8519         | 1.5692         | 99.6891  |
| $N = 100$ , SQMC    | 2.9667         | 1.0623         | 3.0258         | 1.1394         | 147.5391 |
| $N = 100$ , MS-SQMC | 2.1652         | 0.8326         | 2.3681         | 0.8697         | 178.5929 |
| $N = 100$ , TR-SQMC | 1.9624         | 0.7162         | 2.1365         | 0.7459         | 203.9138 |

## 5 结论

本文提出了一种基于信赖域的拟蒙特卡洛滤波方法.该算法利用确定性采样方法代替了粒子滤波中的随机采样,使采样粒子分布更加均匀,提高了采样粒子的表示能力;同时采用了信赖域方法来调整粒子位置,在保证粒子分布均匀的基础上,使其向权值较大的高似然区域移动,增加了有效采样粒子的个数.本文算法,拥有比基于均值漂移的粒子优化方法更高的搜索效率,且避免了基于均值漂移的粒子优化方法中,粒子沿梯度方向向高似然区域移动后会导致粒子的分布不规则,为了避免粒子分布的不规则导致的粒子描述性不充分,基于均值漂移的粒子优化方法还要再结合基

于先验概率( $p(\mathbf{x}_k/z_{1:k-1})$ )采样的粒子对后验概率进行估计.仿真实验表明,本文算法能够得到更高的估计精度,且算法有较好的稳定性,通过增强粒子的描述能力,减少了粒子的使用数目,在一定程度上降低了计算复杂度.

## 参考文献

- [1] Andrieu C, Doucet A, Singh S S, et al. Particle methods for change detection, system identification, and control [J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92(3): 423 - 438.
- [2] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(2): 174 - 188.
- [3] Doucet A, Godsill S, et al. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering [J]. Statistics and Computing, 2000, 10(3): 197 - 208.
- [4] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation [J]. IEE Proceedings, 1993, 140(2): 107 - 113.
- [5] Liu J, Chen R. Sequential Monte-Carlo methods for dynamic systems [J]. Journal of the American Statistical Association, 1998, 93(443): 1032 - 1044.
- [6] 莫以为, 萧德云. 基于粒子滤波算法的混合系统监测与诊断(英文) [J]. 自动化学报, 2003, 29(5): 641 - 648.  
Mo Yi-Wei, Xiao De-Yun. Hybrid system monitoring and diagnosing based on particle filter algorithm [J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(5): 641 - 648. (in Chinese)
- [7] Campillo F, Rossi V. Convolution particle filter for parameter estimation in general state-space models [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2009, 45(3): 1063 - 1072.
- [8] Polson N G, Stroud J R, Muller P. Practical filtering with sequential parameter learning [J]. Journal of the Royal Statistical Society Series B-Statistical Methodology, 2008, 70(2): 413 - 428.
- [9] 刘先省, 胡振涛, 等. 基于粒子优化的多粒子滤波算法 [J]. 电子学报, 2010, 38(2): 301 - 306.  
Liu Xian-xin, Hu Zhen-tao, et al. A novel multiple model particle filter algorithm based on particle optimization [J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(2): 302 - 306. (in Chinese)
- [10] 侯代文, 殷福亮, 等. 基于拟蒙特卡洛滤波的说话人跟踪方法 [J]. 自动化学报, 2009, 35(7): 1016 - 1021.  
Hou Daiwen, Yin Fuliang, Chen Zhe. Quasi-Monte Carlo filtering for speaker tracking [J]. Acta Automatic Sinica, 2009, 35(7): 1016 - 1021. (in Chinese)
- [11] Djuric P M, Kotecha J H, and Zhang J, et al. Particle filtering [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, 20(9): 19 - 38.
- [12] Guo D, Wang X D. Quasi-Monte Carlo filtering in nonlinear

dynamic systems[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(6): 2087 – 2098.

- [13] Shan C, Tan T, Wei Y. Real-time hand tracking using a mean shift embedded particle filter[J]. Pattern Recognition, 2007, (40): 1958 – 1970.
- [14] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 科学出版社, 北京, 2001.
- [15] 徐晓滨, 文成林, 刘荣利. 基于随机集理论的多源信息统一表示与建模方法[J]. 电子学报, 2008, 36(6): 1174 – 1181.  
XU Xiao-bin, WEN Cheng-lin, LIU Rong-li. The unified method of describing and modeling multisource information based on random set theory[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(6): 1174 – 1181. (in Chinese)
- [16] Chang C, Ansari R. Kernel particle filter for visual tracking[J]. IEEE Transaction on Signal Processing Letters, 2005, 12(3): 242 – 245.

## 作者简介



徐立中 男, 博士, 教授, 博士生导师, 河海大学计算机与信息学院副院长, 研究方向: 遥感遥测信息处理、信息融合、复杂系统建模与优化.



丁晓峰(通信作者) 男, 河海大学计算机与信息学院博士研究生, 主要研究方向: 信息融合、计算机视觉、数值 Henstock-Kurzweil 积分.

E-mail: xiaofeng.ding@foxmail.com.