第3A期
2011年3月

电　子　学　报
ACTA ELECTRONICA SINICA

Vol.39　No.3A
Mar.　2011

脉冲束六维非线性动力学方程级数解

曹少中,李　旸
(北京印刷学院信息与机电工程学院,北京 102600)

摘　要: 针对脉冲束六维非线性动力学方程被积函数的不可积性,首先将方程的被积函数展为自变量的 Taylor 级数,通过直接积分获得方程关于自变量的一般级数解,然后进一步将自变量各阶项的系数对初值作 Taylor 展开,从而获得方程关于自变量及初值的级数解.对于脉冲束中任意粒子相对于参考粒子的相对运动动力学方程的求解问题,在方程的被积函数展为自变量的 Taylor 级数的基础上,将自变量的各阶项的系数进一步相对于参考粒子展开,得到了相对运动方程,经直接积分获得了方程关于自变量及相对运动初值的级数解.

关键词: 脉冲束;六维非线性动力学方程;级数解

中图分类号: TP273　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 0372-2112 (2011) 3A-057-04

Series Solution for the Nonlinear Dynamic Equation of Pulsed Beams in Six Dimensional Phase Spaces

CAO Shao-zhong, LI Yang
(*College of Information and Mechanical Engineering*, *Beijing Institute of Graphic Communication*, *Beijing* 102600, *China*)

Abstract: To unintegrable function for the nonlinear dynamic equations of pulsed beams in six dimensional phase spaces, first of all, the integrated functions of the equations are expanded as Taylor series in independent variable, the general series solution of the independent variable for the equation can be obtained by direct integration. Then the coefficients for different order items of independent variable can be expanded as Taylor series in initial value, next series solution of the independent variable and initial value for the equation can be obtained. In order to solve the dynamic equation for relative motion of any particle to reference particle, first of all expanding the integrated function as Taylor series in independent variable, then the coefficients for difference order items of independent variable can be expanded as the series of reference particle initial value, the relative motion equation can be obtained, and series solution for the independent variable and relative motion initial value of the equation can be obtained by direct integration.

Key words: pulsed beams; six dimensional nonlinear dynamic equation; series solution

1　引言

脉冲束的加速、传输和储存过程既包含横向运动又包含纵向运动以及横向、纵向运动之间的耦合作用,是一个典型的六维非线性动力学问题.在六维非线性束流动力学发展的过程中,K.L.Brown 利用带电粒子在静磁场中动量守恒定律,建立了$\{x,x',y,y',s,\delta\}$六维传输理论,并求得了二阶近似解[1],文献[2]建立了$\{x,x',y,y',z,z'\}$六维非线性动力学方程.为了直接描述脉冲宽度的变化规律,文献[3~5]直接从带电粒子的相对论运动方程出发经变量变换导出了严格的$\{x,x',y,y',t,t'\}$及其他形式的六维非线性动力学方程,并对各种六维理论进行了评论,但没有给出非线性解.文献[6~10]利用直接试探法和积分方程法求得了六维非线性动力学方程的任意阶近似解,建立了相空间非线性正向传输理论,并成功地用于传输系统高阶象差计算.但是,由于该理论中任意阶象差系数的表达式是以自变量的积分形式出现的,因此当被积函数对自变量呈非线性时,仍可能出现不可积性.

由上述可见,求解脉冲束六维非线性动力学方程普适的任意阶近似解仍是一个尚待进一步研究的课题.为了彻底克服由非线性引起的不可积性,本文采取将方程的被积函数展为自变量 Taylor 级数而后直接积分的方法进行求解,从而获得了原方程及相对运动方程关于自变量及初值的无穷级数解析解.

收稿日期:2010-11-10;修回日期:2011-02-15
基金项目:北京市自然科学基金项目(No.4092013);北京市自然科学基金项目(No.4112019);北京市教育委员会科技计划重点项目(No.KZ201110015017)

2 $\{X, X', Y, Y', t, t'\}$六维非线性动力学方程关于自变量及初值的级数解

为讨论方便起见,从具体的六维相空间状态方程出发,假定实空间选择直角坐标系($\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$),$\boldsymbol{Z}$ 轴与系统轴线重合,并且脉冲束团沿 $\boldsymbol{Z}$ 轴方向运动,选择 $\boldsymbol{Z}$ 为自变量,则脉冲束中任意粒子在$\{X, X', Y, Y', t, t'\}$六维相空间中的相对论性非线性动力学方程为[3~5]:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}Z}=X'\\ \dfrac{\mathrm{d}X'}{\mathrm{d}Z}=(F_X-X'F_Z)t'^2/m\\ \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}Z}=Y'\\ \dfrac{\mathrm{d}Y'}{\mathrm{d}Z}=(F_Y-Y'F_Z)t'^2/m\\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}Z}=t'\\ \dfrac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}Z}=-\{F_Z-\gamma^2[X'(F_X-X'F_Z)+Y'(F_Y-Y'F_Z)]/\\ \qquad C^2t'^2\}t'^3/\gamma^3m\end{cases} \tag{1}$$

式中,t 为带电粒子的飞行时间,F_X、F_Y、F_Z 为粒子所受作用力的三个分量,在电磁场中其一般表达式为:

$$\begin{cases}F_X=q\{E_X(X,Y,Z,t)\\ \qquad +[B_Z(X,Y,Z,t)Y'-B_Y(X,Y,Z,t)]/t'\}\\ F_Y=q\{E_Y(X,Y,Z,t)\\ \qquad +[B_X(X,Y,Z,t)-B_Z(X,Y,Z,t)X']/t'\}\\ F_Z=q\{E_Z(X,Y,Z,t)\\ \qquad +[B_Y(X,Y,Z,t)X'-B_X(X,Y,Z,t)Y']/t'\}\end{cases} \tag{2}$$

其中,q 为粒子的电荷量,E 为电场强度,B 为磁场强度,m 为粒子的质量,在相对论情况下其表达式为

$$\begin{cases}m=\gamma m_0\\ \gamma=1\Big/\sqrt{1-\beta^2}\\ \beta=\sqrt{\left(\dfrac{X'}{t'}\right)^2+\left(\dfrac{Y'}{t'}\right)^2+\left(\dfrac{1}{t'}\right)^2}\Big/C=\sqrt{X'^2+Y'^2+1}\Big/Ct'\end{cases} \tag{3}$$

m_0 为粒子的静止质量,C 为光在真空中的速度.

为了讨论方便起见,我们令 $\hat{X}_1=X, \hat{X}_2=X', \hat{X}_3=Y, \hat{X}_4=Y', \hat{X}_5=t, \hat{X}_6=t'$,则方程(1)可以概括为如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{X}_i(Z)}{\mathrm{d}Z}=f_i(\hat{\boldsymbol{X}}(Z),Z),\ i=1,2,\cdots,6 \tag{4}$$

写为向量形式为:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}}(Z)}{\mathrm{d}Z}=\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{X}}(Z),Z) \tag{5}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{X}}(Z)=(\hat{X}_1(Z),\hat{X}_2(Z),\cdots,\hat{X}_6(Z))^{\mathrm{T}}$ 为六维状态向量,$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots f_6)^{\mathrm{T}}$.

现求解脉冲束六维非线性动力学方程,为了获得紧凑而简洁的结果,我们求解方程(5).为此,我们假设系统于广义相空间($Z,\hat{\boldsymbol{X}}(Z)$)中的初始状态为($Z=0$, $\hat{\boldsymbol{X}}(0)$),$\boldsymbol{f}(Z,\hat{\boldsymbol{X}}(Z))$对自变量 Z 的任意阶导数存在且有界,则可在($Z=0,\hat{\boldsymbol{X}}(0)$)处将 $\boldsymbol{f}(Z,\hat{\boldsymbol{X}}(Z))$展为自变量 Z 收敛的 Taylor 级数[11]:

$$\boldsymbol{f}(Z,\hat{\boldsymbol{X}}(Z))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))Z^n \tag{6}$$

将式(6)代入式(5),则有:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}}(Z)}{\mathrm{d}Z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))Z^n \tag{7}$$

方程(7)两边同乘以 $\mathrm{d}Z$,从 $0\sim Z$ 积分,则得方程关于自变量的无穷级数解为:

$$\hat{\boldsymbol{X}}(Z)=\hat{\boldsymbol{X}}(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))Z^{n+1} \tag{8}$$

式中,$\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))$为 $\boldsymbol{f}(Z,\hat{\boldsymbol{X}}(Z))$在初态($Z=0,\hat{\boldsymbol{X}}(0)$)处关于自变量 Z 的 n 阶导数,当 n 取不同值时的具体表达式分别为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}^{(0)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))=\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{X}}(Z),Z)\Big|_{\substack{Z=0\\ \hat{X}(0)}}=\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))\\ \boldsymbol{f}^{(1)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))=\left[\dfrac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial Z}\right]_{\substack{Z=0\\ \hat{X}(0)}}+\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left[\dfrac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\hat{X}_i}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\hat{X}_i}{\mathrm{d}Z}\right]_{\substack{Z=0\\ \hat{X}(0)}}\\ \qquad\qquad\quad=\left[\dfrac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial Z}\right]_{\substack{Z=0\\ \hat{X}(0)}}+\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left[\dfrac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\hat{X}_i}f_i\right]_{\substack{Z=0\\ \hat{X}(0)}}\\ \boldsymbol{f}^{(2)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))=\left[\dfrac{\partial\boldsymbol{f}^{(1)}}{\partial Z}\right]_{\substack{Z=0\\ \hat{X}(0)}}+\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left[\dfrac{\partial\boldsymbol{f}^{(1)}}{\partial\hat{X}_i}\cdot f_i\right]_{\substack{Z=0\\ \hat{X}(0)}}\\ \cdots\\ \boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))=\left[\dfrac{\partial\boldsymbol{f}^{(n-1)}}{\partial Z}\right]_{\substack{Z=0\\ \hat{X}(0)}}+\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left[\dfrac{\partial\boldsymbol{f}^{(n-1)}}{\partial\hat{X}_i}\cdot f_i\right]_{\substack{Z=0\\ \hat{X}(0)}}\end{cases} \tag{9}$$

在实际理论计算中,往往需了解初值各阶项对解的影响,为此需进一步将方程的解式(8)展为初值的级数形式.为此,设 D 是 $\mathscr{R}$ 中的一个开集,如果 $\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))\in C^{\infty}(D)$,$[0,0+\hat{\boldsymbol{X}}(0)]\subset D$,则可将 $\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))$在 $\hat{\boldsymbol{X}}(0)=0$ 处展为 $\hat{\boldsymbol{X}}(0)$的 Taylor 级数[11]:

$$\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}\partial^{\alpha}\boldsymbol{f}^{(n)}(0)\hat{\boldsymbol{X}}^{\alpha}(0) \tag{10}$$

式中,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N$ 是非负整数,$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)$为以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N$ 为分量的一个重指标,$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N$,$\alpha!=\alpha_1!\ \alpha_2!\cdots\alpha_N!$,$\hat{X}^{\alpha}(0)=\hat{X}_1^{\alpha_1}(0)\hat{X}_2^{\alpha_2}(0)\cdots\hat{X}_N^{\alpha_N}(0)$,$\partial^{\alpha}=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial\hat{X}_1^{\alpha_1}(0)\partial\hat{X}_2^{\alpha_2}(0)\cdots\partial\hat{X}_N^{\alpha_N}(0)}$,$N=6$.

将式(10)代入式(8),则方程的解式(8)可改写为如下形式:

$$\hat{\boldsymbol{X}}(Z)=\hat{\boldsymbol{X}}(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}\partial^{\alpha}\boldsymbol{f}^{(n)}(0)\hat{\boldsymbol{X}}^{\alpha}(0) \tag{11}$$

由于 n 和 $|\alpha|$ 求和独立无关,故上式又可整理为如下形式:

$$\hat{\boldsymbol{X}}(Z)=\hat{\boldsymbol{X}}(0)+\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^{n+1}}{\alpha!\ (n+1)!}\partial^{\alpha}\boldsymbol{f}^{(n)}(0)\hat{\boldsymbol{X}}^{\alpha}(0) \tag{12}$$

式(11)及式(12)即为脉冲束六维非线性动力学方程关于自变量 Z 及初值 $\boldsymbol{X}(0)$ 的无穷级数解.显然,式(8)便于轨迹计算,而式(11)及式(12)便于分析各阶初值项对轨迹的影响.

3 相对参考粒子的六维非线性动力学方程的无穷级数解

对于脉冲束来说,更有意义的是任意粒子相对于参考粒子的相对运动,下面我们首先建立相对运动的动力学方程,而后直接积分求其解.

设系统的初始状态为 $(Z=0,\hat{\boldsymbol{X}}(0))$,参考粒子的初态为 $(Z=0,\hat{\boldsymbol{X}}_C(0))$,则脉冲束中任意粒子与参考粒子的动力学方程分别为:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}}(Z)}{\mathrm{d}Z}=f(Z,\hat{\boldsymbol{X}}(Z)) \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}}_C(Z)}{\mathrm{d}Z}=f(Z,\hat{\boldsymbol{X}}_C(Z)) \tag{14}$$

将式(13)和式(14)的右端分别在 $(Z=0,\hat{\boldsymbol{X}}(0))$ 及 $(Z=0,\hat{\boldsymbol{X}}_C(0))$ 处展为自变量的 Taylor 级数,则上述方程变为如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}}(Z)}{\mathrm{d}Z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))Z^{n} \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}}_C(Z)}{\mathrm{d}Z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}_C(0))Z^{n} \tag{16}$$

将式(15)中的 $\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))$ 相对于参考粒子的初值 $\hat{\boldsymbol{X}}_C(0)$ 作 Taylor 展开,有:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))&=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}\partial^{\alpha}\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}_C(0))\boldsymbol{x}^{\alpha}(0)\\&=\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}_C(0))+\sum_{|\alpha|=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}\partial^{\alpha}\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}_C(0))\boldsymbol{x}^{\alpha}(0)\end{aligned} \tag{17}$$

式中,$\boldsymbol{x}(0)=\hat{\boldsymbol{X}}(0)-\hat{\boldsymbol{X}}_C(0)$,其他符号定义与前面相同.

将式(17)代入到式(15),则有:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{X}}(Z)}{\mathrm{d}Z}=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^{n}}{n!}\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}_C(0))\\&+\sum_{|\alpha|=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^{n}}{\alpha!\ (n+1)!}\partial^{\alpha}\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}_C(0))\boldsymbol{x}^{\alpha}(0)\end{aligned}$$

利用式(16),经整理,则有:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(Z)}{\mathrm{d}Z}=\sum_{|\alpha|=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^{n}}{\alpha!\ (n+1)!}\partial^{\alpha}\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}_C(0))\boldsymbol{x}^{\alpha}(0) \tag{18}$$

式中,$\boldsymbol{x}(Z)=\hat{\boldsymbol{X}}(Z)-\hat{\boldsymbol{X}}_C(Z)$ 为相对运动向量.

式(18)即为级数形式的相对运动非线性六维动力学方程,并可直接积分求解.式(18)两边同乘以 $\mathrm{d}Z$,从 $0\sim Z$ 对 Z 积分,则得:

$$\boldsymbol{x}(Z)=\boldsymbol{x}(0)+\sum_{|\alpha|=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^{n+1}}{\alpha!\ (n+1)!}\partial^{\alpha}\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}_C(0))\boldsymbol{x}^{\alpha}(0) \tag{19}$$

式(19)即为脉冲束六维非线性相对运动动力学方程普适、规范、统一而简洁的无穷级数解,只要知道粒子的动力学方程及初值 $\hat{\boldsymbol{X}}(0)$ 和 $\hat{\boldsymbol{X}}_C(0)$ 即可由式(19)求得任意阶近似解.显然,将式(12)直接相对参考粒子的初态展开也可直接得到式(19).

如果系统的初态是 $(Z_k,\hat{\boldsymbol{X}}(k))$ 及 $(Z_k,\hat{\boldsymbol{X}}_C(k))$,则式(19)可改写为如下形式:

$$\boldsymbol{x}(Z)=\boldsymbol{x}(k)+\sum_{|\alpha|=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{l^{n+1}}{\alpha!\ (n+1)!}\partial^{\alpha}\boldsymbol{f}^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}_C(k))\boldsymbol{x}^{\alpha}(k) \tag{20}$$

式中,$l=Z-Z_k$.

4 解的收敛性证明

现证明脉冲束六维非线性动力学方程解的收敛性,为此,我们只需证明解式(8)的分量收敛即可.由式(8)可知:

$$\hat{X}_i(Z)=\hat{X}_i(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\boldsymbol{f}_i^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))Z^{n+1} \tag{21}$$

欲证式(21)收敛,只需证明下式

$$\hat{X}_i(Z)-\hat{X}_i(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\boldsymbol{f}_i^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))Z^{n+1} \tag{22}$$

收敛即可.为此,我们作如下假定[12]:

设 $f_i(Z,\hat{\boldsymbol{X}}(Z))$ 在区域 $R:|Z-0|\leqslant a,|\hat{X}_i(Z)-\hat{X}_i(0)|\leqslant b_i,(i=1,2,\cdots,6)$ 中连续且在区间 $I=[Z-h,Z+h]$(式中常数 $h=\min\{a,\frac{d}{M}\}$,$M>|f_i(Z_0,\hat{\boldsymbol{X}}(Z_0))|$,$d=\min\{b_i\}$)中具有任意多次导数且有界,即 $|\boldsymbol{f}_i^{(n)}(Z,\hat{\boldsymbol{X}}(Z))|\leqslant H,\forall Z\in I,n>N$.

根据上述假设及式(22),有

$$\begin{aligned}\left|\hat{X}_i(Z)-\hat{X}_i(0)\right|&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{(n+1)!}\boldsymbol{f}_i^{(n)}(\hat{\boldsymbol{X}}(0))Z^{n+1}\right|\\&\leqslant H\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

因为式中

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=a+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots+\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots$$

$$= \left[1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right] - 1$$
$$= e^a - 1$$

所以有：

$$\left|\hat{X}_i(Z) - \hat{X}_i(0)\right| \leqslant H(e^a - 1) \tag{23}$$

由此得出结论，在上述假设下，脉冲束六维非线性动力学方程的无穷级数解式(8)收敛且一致收敛，而本文中获得的其他形式的解均是由此解派生的，因此也是收敛且一致收敛的.

5 结论

由本文以上讨论可见，通过将被积函数展为自变量的 Taylor 级数而后直接积分是求解非线性动态系统状态(相空间)方程最简洁的方法.本文所得结果虽然是从具体的相空间状态方程出发，但其形式解具有普适性，因而为计算脉冲束单粒子状态非线性传输及整体非线性逆向传输提供了统一而简洁的理论基础.

参考文献

[1] K L Brown. A first and second order matrix theory for the design of beam transport system and charge particle spectrometers [R]. SLAC Report No.75, USA, 1971.

[2] 魏开煜.带电粒子束传输理论[M].北京：科学出版社，1986.
Wei Kaiyu. Transmission Theory of Charged Particle[M]. Science Press, Beijing, 1986. (in Chinese)

[3] 曹清喜，关遐令.串列加速器脉冲束的六维传输理论[A].全国加速器技术交流会论文集[C]，成都，1979.
Cao Qingxi, Guan Xialing. Six-dimesional transmission theory of series accelerator pulse beam[A]. Conference Proceedings of Accelerator Techniques in China[C]. Chengdu, 1979. (in Chinese)

[4] 曹清喜，关遐令.六维相空间粒子动力学[J].原子核物理，1980，1：167－176.
Cao Qingxi, Guan Xialing. Particle dynamics in six dimensional phase spaces[J]. Chinese Journal of Nuclear Physics, 1980, 1: 167－176. (in Chinese)

[5] 曹清喜，关遐令.六维相空间物理模型及其动力学方程的适用范围(中国核科技报告)[R].北京：原子能出版社，1991.
Cao Qingxi, Guan Xialing. Physical Model of Six-Dimension Phase Space and Application Range of Related Dynamics Equation [R]. Atomic Energy Press, Beijing, 1991. (in Chinese)

[6] Xie Xi, Liu Chunliang. Any order approximate analytical solution of nonlinear dynamic system equation for accelerators [J]. Chin J Nucl Phys, 1990, 12(4): 283－286.

[7] Liu Chunliang, Xie Xi, Chen Yinbao. Any order approximate analytical solution of the nonlinear volterra's integral equation for accelerator dynamic systems[J]. Chin J Nucl Phys, 1991, 13(4): 261－264.

[8] Xia Jiawen, Xie Xi. Nonlinear transport of accelerator beam phase space[A]. 13th International Conference on Cyclotrons and their Applications[C], Chongqing, China, 1992.

[9] Xie Xi, Xia Jiawen. Brown's transport up to third order aberration by artificial intelligence[A]. Proceedings of 1991 IEEE International Conference on Particle Accelerator[C], Beijing, China, 1991: 1887－1880.

[10] 曹少中.电子束六维随机非线性状态方程及其任意阶近似解[J].电子学报，2007，12A：95－98.
Cao Shaozhong. Any order approximate solution state equation of stochastic of the six dimensional nonlinear systems for electron beam[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 12A: 95－98. (in Chinese)

[11] 张筑生.数学分析新讲(第二册)[M].北京：北京大学出版社，1990.
Zhang Zhusheng. Mathematical Analysis [M]. Peking University Press, Beijing, 1990. (in Chinese)

[12] 丁同仁，李承治.常微分方程教程[M].北京：高等教育出版社，2006.
Ding Tongren, Li Chengzhi. Ordinary Differential Equation [M]. High Education Press, Beijing, 2006. (in Chinese)

作者简介

曹少中 男，1965 年生于保定，博士，教授.主要从事信号检测与处理、非线性系统理论、智能控制方面的研究工作.
E-mail：caoshaozhong@bigc.edu.cn

李 旸 男，1982 年生于哈尔滨，硕士，讲师.主要从事信号与信息处理、无线通讯等方面的研究工作.
E-mail：yangli@bigc.edu.cn