

基于卡尔曼滤波的压缩感知弱匹配去噪重构

田文彪, 康健, 张洋, 芮国胜, 张海波

(海军航空工程学院信号与信息处理山东省重点实验室, 山东烟台 264001)

摘要: 现有的贪婪迭代类压缩感知重构算法均基于最小二乘对信号进行波形估计, 未考虑到可能将量测噪声引入信号估计的情况. 针对以上不足, 提出了一种基于线性 Kalman 滤波的压缩感知弱匹配去噪重构算法. 该算法不需已知稀疏度先验, 通过引入 Kalman 滤波, 在最小均方误差准则下, 每次迭代都获得最佳信号估计; 并以弱匹配的方式同时筛选出有效的原子, 并剔除冗余原子进而重构原信号. 新算法继承了现有贪婪迭代类算法的有效性, 同时避免了因噪声干扰或稀疏度未知导致的重构失败. 理论分析和实验表明, 新算法在同等条件下, 重构性能优于现有典型贪婪迭代类算法, 且其运算时间低于 BPDN 算法和同类的 KFCS 算法.

关键词: 压缩感知; 去噪; 自适应重构; 卡尔曼滤波

中图分类号: TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2014)06-1061-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.06.004

Weakly Matching Pursuit Denoising Recovery for Compressed Sensing Based on Kalman Filtering

TIAN Wen-biao, KANG Jian, ZHANG Yang, RUI Guo-sheng, ZHANG Hai-bo

(Signal and Information Processing Provincial Key Laboratory in Shandong, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai, Shandong 264001, China)

Abstract: Almost all of the existing greedy iterative compressed sensing reconstruction algorithms estimate the signal by the method of least squares, which introduces the measure noise into the signal estimation. Aiming at this problem, a new weakly matching pursuit denoising recovery for compressed sensing based on Kalman filtering is proposed. The new algorithm does not need the sparse prior while it estimates the signal best for each iteration according to the minimum mean-square error criterion by Kalman filtering. Meanwhile, weakly matching pursuit is used to sift the effective support set and pick out the redundancy to recover the original signal. The new algorithm is as effective as other greedy ones and is able to avoid recovery failure due to noise interference or unknown sparsity as well. The theoretical analysis and experimental simulation prove that the performance of the new algorithm is better than that of the existing greedy iterative reconstruction algorithms in the same condition. The operation time of the new algorithm is shorter than that of BPDN and the similar KFCS algorithm.

Key words: compressed sensing; denoising; adaptive reconstruction; Kalman filter

1 引言

近年来, 压缩感知^[1~3] (Compressed Sensing, CS) 理论的出现引发了信号采集处理领域的广泛关注, 其指出可远低于 Nyquist 频率对信号进行随机观测, 革命性地将数据采集与压缩同时进行, 实现从信号采样到信息采样的转变. 这样“少采样, 巧计算”的 CS 技术重点都落在了如何从仅有的少量观测数据中最大程度地恢复原信号上.

现有压缩感知重构算法均可归为三大类: (1) 凸松弛法: 将信号稀疏度约束优化等非凸问题转化为凸优化

问题来处理. 如基追踪 (Basis Pursuit, BP) 算法^[4], 内点法^[5], 梯度投影法^[6]等; (2) 贪婪追踪算法: 通过迭代的手段, 每次选取一个局部最优解来逐步逼近原信号. 如正交匹配追踪^[7] (Orthogonal Matching Pursuit, OMP), 子空间追踪^[8] (Subspace Pursuit, SP), 压缩采样匹配追踪^[9] (Compressive Sampling Matching Pursuit, CoSaMP), 稀疏度自适应匹配追踪^[10] (Sparsity Adaptive Matching Pursuit, SAMP), 正则化的自适应匹配追踪算法^[11] (Regularized Adaptive Matching Pursuit, RAMP), 回溯自适应 OMP^[12] (Backtracking-based Adaptive OMP, BAOMP) 等等; (3) 组合算法: 这类算法要求对信号高度结构化地采样, 经由分

组测试快速恢复支撑. 由于凸优化算法复杂度普遍较大, 而匹配追踪类贪婪算法因其实现简单受到了广泛的重视. 现有贪婪算法中均采用最小二乘来求取每次迭代的信号估计, 该方法在未知任何信号先验的情况下能够取得良好的效果. 然而, 该方法未考虑实际环境下存在的噪声对信号估计的影响; 再者, 部分回溯贪婪算法如 SP、CoSaMP 等假设信号稀疏度已知, 而实际情况下, 信号稀疏度可能时变且难以确知.

2008 年 Namrata Vaswani^[13]首次将 Kalman 滤波应用于压缩感知, 着重研究稀疏模式变化缓慢的稀疏信号序列, 且将其支撑集的变化规律作为先验, 并据此建立状态方程, 提出了 KFCS (Kalman Filtered Compressive Sensing) 算法. 该算法性能较好但是复杂度较高. Avishy Carmi^[14]另辟蹊径, 利用伪量测 (Pseudo-Measurement, PM) 将信号 ℓ_p ($0 < p \leq 1$) 范数约束在一个常区间内. 由于 ℓ_p 范数无法约束支撑集的势, 因此重构信号尽管在欧氏距离上逼近原信号, 但存在信号能量被分散至整个空间的情况, 且容易面临与 BP 重构一致的稀疏系数尺度搬移现象, 进而产生人工效应, 如一维信号出现高频振荡等.

立足于贪婪迭代, 本文提出了卡尔曼滤波匹配追踪 (Kalman Filtered Matching Pursuit, KFMP) 算法, 利用 Kalman 滤波得到信号在每次迭代下的最优估计, 通过弱匹配约束信号的稀疏度, 从而在稀疏度未知且有噪声污染的条件下重构原信号. 仿真结果表明: 在相同实验条件下, 与传统贪婪算法相比该算法抗噪声能力更强, 重构信噪比更大. 尽管算法复杂度比 OMP 等算法复杂度有所增加, 但其运算时间仍低于 BPDN 等典型凸优化算法和与之同类的 KFCS 算法.

2 卡尔曼滤波匹配追踪算法

2.1 问题描述

假设长度为 N 的信号 \mathbf{x} 是 K 项稀疏的, 若用一个非自适应感知矩阵 $\Phi: M \times N$ 对信号 \mathbf{x} 进行观测, 进而得到观测值向量 $\mathbf{y}: M \times 1$,

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (1)$$

定义 1 若信号 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 在时域或某变换域的变换系数呈幂指数规律衰减, 即将 \mathbf{x} 元素从大到小排序后: $|x_1| \geq |x_2| \geq \dots \geq |x_N|$, 存在 C_r, r 满足:

$$|x_k| \leq C_r \cdot k^{-r} \quad (2)$$

其中 $r \geq 1$, C_r 为常数, 则将 \mathbf{x} 称为可压缩信号 (compressible signal). 例如, 已有研究表明分段光滑信号的小波系数满足该模型. $k=1$ 时, $|x_1| = \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i \in [1, N]} |x_i|$, 因此 $C_r = \|\mathbf{x}\|_\infty$ 满足定义, 本文将信号 \mathbf{x} 中幅值大于 $\mu \|\mathbf{x}\|_\infty$ ($\mu \in (0, 1]$) 的元素所构成子集的势 K 定义为

可压缩信号 \mathbf{x} 的稀疏度.

Dror Baron 等^[15]证明, 若 $M \geq 2K$, 则可经由求解一个 ℓ_0 范数优化问题重构信号; 若 $K < M < 2K$, 则有部分信号不能被重构. 这是一个理想条件, 因为求解 ℓ_0 范数优化属于非多项式复杂度问题 (即 NP 难问题), 实际中要保证重构往往采用其它等效方法并需要增加观测数. 所以本文假设 $M \geq 2K$.

假设式 (1) 中噪声向量 \mathbf{e} 服从高斯分布 $N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ (\mathbf{I} 为单位阵). 以贪婪算法中典型的 SP 为例说明. 由于每次迭代中算法均在最小误差平方和 (即 $\|\mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}\|_2^2$ 最小) 准则下, 以最小二乘法得到信号估计 $\hat{\mathbf{x}}$, 且以稀疏度真实值 K 作为约束, 因此算法实际求解的问题是:

$$\min \|\mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}}\|_2 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{x}\|_0 = K \quad (3)$$

其中, $\|\cdot\|_0$ 表示矢量 ℓ_0 范数即信号支撑集的势. 其它贪婪算法稀疏度约束条件各有不同, 但目标函数与此一致. 随着迭代的进行, 误差平方和最终趋于 0, 即 $\Phi \hat{\mathbf{x}}$ 趋于 \mathbf{y} , 对照式 (1) 可知, 此时噪声 \mathbf{e} 完全被引入到信号估计 $\hat{\mathbf{x}}$ 中, 原信号不可能被精确重构. 因此, 为减小噪声的干扰, 目标函数应选为信号估计均方误差最小, 等效为 $\min \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2$. 在噪声分布已知的条件下, 考虑引入 Kalman 滤波.

在讨论具体重构算法之前, 还需要讨论分析有限等距性质^[16] (Restricted Isometry Property, RIP), 它是重建信号的重要基础, 其定义为: 若对所有 K 项稀疏信号 \mathbf{x} , 矩 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 都满足式 (4)

$$(1 - \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\Phi \mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (4)$$

其中 $K \leq M$, $0 < \delta_K < 1$, 则称 Φ 满足参数为 (K, δ_K) 的 RIP 性质. δ_K 具有单调性, 对任意两个整数 $K \leq K'$, 则有 $\delta_K \leq \delta_{K'}$.

引理 1^[9] (列近似正交性质) 设矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 满足参数为 (K, δ_K) 的 RIP 性质, 索引集 T 的势为 K , 对于任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$

$$\|\Phi_T^T \Phi_T \mathbf{x}\|_2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2$$

$$\|\Phi_T^T \Phi_T \mathbf{x}\|_2 \geq (1 - \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2$$

$$\|(\Phi_T^T \Phi_T)^{-1} \mathbf{x}\|_2 \leq \frac{1}{1 - \delta_K} \|\mathbf{x}\|_2$$

$$\|(\Phi_T^T \Phi_T)^{-1} \mathbf{x}\|_2 \geq \frac{1}{1 + \delta_K} \|\mathbf{x}\|_2$$

成立, 其中 Φ_T 代表以 T 为索引的 Φ 中的列构成的 Φ 的子集.

2.2 滤波方程组

现有结论表明^[17], 在最小均方误差准则下, Kalman 滤波作用于给定有用信号与加性噪声的混合信号后, 能够将信号与噪声最佳分离. 首先量测方程已由式 (1) 给出.

将信号 \mathbf{x} 看做是一组不随时间转移的状态构成的矢量,若从目标跟踪的角度来看,其物理意义为一个静止点的状态矢量.即

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}(n-1) \quad (5)$$

则式(5)给出了状态方程.在确定量测方程与状态方程后,给出适用于该模型的卡尔曼方程组:

信号估计

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \hat{\mathbf{x}}(n-1) + \mathbf{K}(n)[\mathbf{y} - \Phi\hat{\mathbf{x}}(n-1)] \quad (6)$$

滤波增益

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n|n-1)\Phi^T[\Phi\mathbf{P}(n|n-1)\Phi^T + \sigma_e^2\mathbf{I}]^{-1} \quad (7)$$

一步预测均方误差

$$\mathbf{P}(n|n-1) = \mathbf{P}(n-1) \quad (8)$$

滤波均方误差

$$\mathbf{P}(n) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(n)\Phi]\mathbf{P}(n|n-1) \quad (9)$$

KFMP 算法以信号最小二乘估计为初值,利用公式(6)~(9)描述的 Kalman 滤波过程,在每次迭代时对信号进行最小均方误差准则下的最优估计.

2.3 弱匹配

已有成果^[12]表明,在稀疏度不确知的条件下,将弱匹配应用于贪婪算法中的原子扩充和剔除过程能够起到增强重构性能的效果.具体来说,弱匹配就是在原子扩充时通过弱匹配参数 $\mu_1 \in (0, 1]$ 调节扩充的规模,设第 l 次迭代时,重构信号支撑集为 Γ^l , $\mathbf{v} = \Phi^T \mathbf{r}^l$, \mathbf{v} 中第 i 个元素 v_i 是原子向量 ϕ_i 与残差 \mathbf{r}^l 的内积,即 $\langle \phi_i, \mathbf{r}^l \rangle$,则第 $l+1$ 次迭代时支撑集更新可表示为

$$\Gamma^{l+1} = \Gamma^l \cup \{i \mid |v_i| \geq \mu_1 \cdot \max_{j \in [1, N]} |v_j|\} \quad (10)$$

该扩充过程可以看作选取相关系数大于一定阈值的原子,该阈值与相关系数最大值有关. $\mu_1 = 1$ 时,与 OMP 一致,每次迭代只选取与残差最匹配的单个原子,估计支撑集中每次增加一个元素.当 μ_1 较小时,每次迭代则选取多个原子.

在原子剔除时,弱匹配也采取类似的策略,以弱匹配参数 $\mu_2 \in (0, 1]$ 调节剔除的规模.每次仅保留信号估计 $\hat{\mathbf{x}}$ 中大于 $\mu_2 \cdot \|\hat{\mathbf{x}}\|_\infty$ 的元素.根据论文假设 $M \geq 2K$,因此,如经过弱匹配剔除后,剩余原子数大于 $M/2$ 则仅保留值最大的前 $M/2$ 个.

Honglin Huang 等人^[12]通过实验验证,参数 μ_1, μ_2 取值 $0.4 \sim 0.8$ 之间可以兼顾算法性能和运算速度.

2.4 算法步骤

具体步骤如算法 1 描述.每次迭代以信号的最小二乘估计 $\Phi_{\Gamma^l}^\dagger \mathbf{y} = (\Phi_{\Gamma^l}^T \Phi_{\Gamma^l})^{-1} \Phi_{\Gamma^l}^T \mathbf{y}$ 作为 Kalman 滤波的信号初值.由迭代停止条件($\|\mathbf{r}^l\|_2 > \|\mathbf{r}^{l-1}\|_2$)可知,迭代过程中 \mathbf{r}^l 能量单调递减,算法至少收敛到一个局部最小点.

算法的 Kalman 滤波过程(即步骤 4)选择 Kalman 增益 $\mathbf{K}(n)$ 作为迭代控制条件,这是因为 $\mathbf{K}(n)$ 随着迭代的进行将趋于 0,标志着滤波过程收敛.该结论将在下一节中证明.

算法 1 卡尔曼滤波匹配追踪(KFMP)算法

输入:观测值向量 $\mathbf{y}_{M \times 1}$,感知矩阵 $\Phi_{M \times N}$

输出:重构信号 $\hat{\mathbf{x}}_{N \times 1}$

步骤 1 (初始化) $\mathbf{r}^0 = \mathbf{y}$, $l = 0$, $\Gamma^0 = \emptyset$;

步骤 2 (计算相关系数) $\mathbf{v} = \Phi^T \mathbf{r}^l$, $l = l + 1$;

步骤 3 (原子扩充) $\Omega = \{i \mid |v_i| \geq \mu_1 \cdot \|\mathbf{v}\|_\infty\}$, $\Gamma^l = \Omega \cup \Gamma^{l-1}$;

步骤 4 (Kalman 滤波) $\hat{\mathbf{x}}(0) = \Phi_{\Gamma^0}^\dagger \mathbf{y}$, $\mathbf{P}(0) = \alpha \mathbf{I}$ (α 可取一个很大的正数^[18]), $n = 1$

i. $\mathbf{P}(n|n-1) = \mathbf{P}(n-1)$;

ii. $\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}(n|n-1)\Phi^T[\Phi\mathbf{P}(n|n-1)\Phi^T + \sigma_e^2\mathbf{I}]^{-1}$;

iii. $\hat{\mathbf{x}}(n) = \hat{\mathbf{x}}(n-1) + \mathbf{K}(n)[\mathbf{y} - \Phi\hat{\mathbf{x}}(n-1)]$;

iv. $\mathbf{P}(n) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(n)\Phi]\mathbf{P}(n|n-1)$;

v. 若 $\|\mathbf{K}(n)\|_2 \leq \xi$ 则令 $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(n)$,进入步骤 5,否则 $n = n + 1$,重复执行 i~iv;

步骤 5 (原子剔除) $\Gamma^l = \{i \mid |\hat{x}_i| \geq \mu_2 \cdot \|\hat{\mathbf{x}}\|_\infty\} \cap \{\hat{\mathbf{x}} \text{ 前 } M/2 \text{ 个最大系数的索引}\}$;

步骤 6 (更新)残差 $\mathbf{r}^l = \mathbf{y} - \Phi_{\Gamma^l} \hat{\mathbf{x}}_{\Gamma^l}$,若 $\|\mathbf{r}^l\|_2 > \|\mathbf{r}^{l-1}\|_2$,令 $\Gamma^l = \Gamma^{l-1}$,输出 $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_{\Gamma^l}^{-1}$,否则返回步骤 2 进行下一步迭代.

算法复杂度集中在 Kalman 滤波过程上:式(6)乘加运算次数均为 $2MN$,因此其运算复杂度为 $O(MN)$;式(7)、式(9)描述的滤波增益及均方误差计算包含了矩阵的乘法和求逆运算,若应用 Strassen 算法则复杂度为 $O(N^{2.81})$ ^[19];式(8)赋值运算复杂度忽略不计.与之对照,以简单快捷著称的 OMP 类贪婪算法复杂度大致为 $O(KMN)$,KFMP 算法复杂度略高,原因是其以复杂度较大的 Kalman 滤波过程替代最小二乘,换取了重构性能的提高.但是这部分运算复杂度的提高是能够接受的,新算法复杂度仍低于 BPDN 算法的 $O(N^3)$ 复杂度.同类的 KFCS 算法在一次迭代内最多要执行三个 Kalman 滤波过程,因此相较之下 KFMP 算法复杂度会低于 KFCS 的相应值.

3 算法收敛性及误差分析

首先声明几个符号记法:

\mathbf{x}^K : \mathbf{x} 的 K 项近似信号,即只保留 \mathbf{x} 前 K 个最大系数,其余系数置零的稀疏化信号;

$\hat{\mathbf{x}}^l$: 算法第 l 次迭代输出;

$\hat{\mathbf{x}}$: 每次重构迭代的 Kalman 过程输出;

\mathbf{x}_T : 以 T 为索引的 \mathbf{x} 中元素构成的矢量;

$\mathbf{K}_{T, \cdot}(n)$: 以 T 为索引的 $\mathbf{K}(n)$ 中各行构成的子矩阵;

$\Phi_{\cdot, T}$:以 T 为索引的 Φ 中各列构成的子矩阵;

Γ :信号真实支撑集;

Γ^l :输出信号 \hat{x}^l 的支撑集;

I :恰当维数的单位阵.

信号与重构信号的误差为 $\|x - \hat{x}\|_2$, 以 $K = |\Gamma^l|$ 稀疏化得到近似信号 x^K , 其与重构信号的误差为 $\|x^K - \hat{x}^l\|_2$, 其支撑集 $T = \Gamma \cup \Gamma^l$, 因此

$$\|x - \hat{x}^l\|_2 \leq \|x_T^K - \hat{x}_T^l\|_2 + \|\hat{x}_T^l - \hat{x}_T^l\|_2 + \|x - x_T^K\|_2 \quad (11)$$

由于 \hat{x}^l 保留了 \hat{x} 中最大的 Γ^l 个系数, 因此

$$\|\hat{x}_T^l - \hat{x}_T^l\|_2 \leq \|x_T^K - \hat{x}_T^l\|_2 \quad (12)$$

信号观测可写作 $y = \Phi x^K + e'$, 结合式(6)得

$$\begin{aligned} x_T^K - \hat{x}_T(n) &= x_T^K - \hat{x}_T(n-1) - K_{T, \cdot}(n) \Phi x^K \\ &\quad - K_{T, \cdot}(n) e' + K_{T, \cdot}(n) \Phi \hat{x}(n-1) \end{aligned}$$

令 $R^n = x^K - \hat{x}(n)$, 衡量 Kalman 滤波误差, 则

$$R_T^n = R_T^{n-1} - K_{T, \cdot}(n) \Phi R^{n-1} - K_{T, \cdot}(n) e' \quad (13)$$

由于 $\Phi R^{n-1} = [\Phi_{\cdot, T} \quad \Phi_{\cdot, T^c}] \cdot \begin{bmatrix} R_T^{n-1} \\ R_{T^c}^{n-1} \end{bmatrix}$, 其中 T^c 为 T 的补集, 则

$$\begin{aligned} R_T^n &= [I - K_{T, \cdot}(n) \Phi_{\cdot, T}] R_T^{n-1} \\ &\quad - K_{T, \cdot}(n) \Phi_{\cdot, T^c} R_{T^c}^{n-1} - K_{T, \cdot}(n) e' \end{aligned} \quad (14)$$

结合滤波增益公式(7)和一步预测均方误差公式(8)知

$$\begin{aligned} K(n) [\Phi P(n-1) \Phi^T + \sigma_e^2 I] &= P(n-1) \Phi^T \\ \Rightarrow [I - K(n) \Phi] P(n-1) \Phi^T &= \sigma_e^2 K(n) \end{aligned}$$

结合滤波均方误差公式(9)知

$$P(n) \Phi^T = \sigma_e^2 K(n)$$

因此

$$K(n) = \frac{P(n) \Phi^T}{\sigma_e^2} \quad (15)$$

将式(15)、式(8)代入式(9)可得

$$P(n) = P(n-1) - \frac{P(n) \Phi^T \Phi P(n-1)}{\sigma_e^2} \quad (16)$$

由于误差方差矩阵 P 正定, 故可逆. 式(16)左乘 $P^{-1}(n)$, 右乘 $P^{-1}(n-1)$ 得

$$P^{-1}(n-1) = P^{-1}(n) - \frac{\Phi^T \Phi}{\sigma_e^2}$$

$$\Rightarrow P^{-1}(n) = P^{-1}(n-1) + \frac{\Phi^T \Phi}{\sigma_e^2} = \cdots = P^{-1}(0) + \frac{n \Phi^T \Phi}{\sigma_e^2}$$

$$\Rightarrow P(n) = [P^{-1}(0) + \frac{n \Phi^T \Phi}{\sigma_e^2}]^{-1}$$

而 $P(0)$ 中的 α 常被赋值为一个很大的正数, 这里为简化分析过程, 考虑 α 趋于无穷大, 因此将 $P^{-1}(0)$ 视作 $\mathbf{0}$ (零矩阵).

将 $P(n) = \sigma_e^2 (n \Phi^T \Phi)^{-1}$ 代入式(15)得

$$K(n) = (n \Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \quad (17)$$

显然 $K_{T, \cdot}(n) \Phi_{\cdot, T} = [(n \Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T]_{T, \cdot} \Phi_{\cdot, T} = I/n$, $K_{T, \cdot}(n) \Phi_{\cdot, T^c} = [(n \Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T]_{T, \cdot} \Phi_{\cdot, T^c} = 0$ 因此式(14)可化简为

$$R_T^n = \frac{n-1}{n} R_T^{n-1} - K_{T, \cdot}(n) e' \quad (18)$$

因为一个矩阵的谱范数(矩阵最大奇异值)不小于其子阵谱范数, 所以

$$\begin{aligned} \|K_{T, \cdot}(n)\|_{\text{spec}} &\leq \|K(n)\|_{\text{spec}} \leq \frac{1}{n} \|(\Phi^T \Phi)^{-1}\|_{\text{spec}} \\ \|\Phi^T\|_{\text{spec}} & \end{aligned}$$

又由 RIP 性质以及引理 1, 且 $M \geq 2K$, 因此索引集 T 的势 $|T| = |\Gamma \cup \Gamma^l| \leq M$

$$\|K_{T, \cdot}(n)\|_{\text{spec}} \leq \frac{\sqrt{1 + \delta_M}}{n(1 - \delta_M)}$$

结合式(18)

$$\begin{aligned} \|R_T^n\|_2 &\leq \frac{n-1}{n} \|R_T^{n-1}\|_2 + \frac{\sqrt{1 + \delta_M}}{n(1 - \delta_M)} \|e'\|_2 \\ &\leq \frac{n-2}{n} \|R_T^{n-2}\|_2 + \frac{2\sqrt{1 + \delta_M}}{n(1 - \delta_M)} \|e'\|_2 \\ &\leq \cdots \leq \frac{\sqrt{1 + \delta_M}}{(1 - \delta_M)} \|e'\|_2 \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)说明重构时的 Kalman 过程收敛.

由式(17)知

$$K^T(n) K(n) = (\Phi \Phi^T)^{-1} / n^2$$

又由引理 1 知, $\lambda_{\Phi \Phi^T} = 1/(1 - \delta_K)$, 其中 $\lambda_{\Phi \Phi^T}$ 表示 $\Phi \Phi^T$ 的最大特征值, 因此 $\|K(n)\|_2 = \sqrt{\lambda_{K^T K}} = 1/(n \sqrt{1 - \delta_K})$ 随迭代次数 n 增加而递减, 滤波过程同时趋于稳定, 算法中 Kalman 滤波迭代停止条件参数 ξ 可权衡迭代次数和 Kalman 增益收敛情况设置.

引理 2^[9,20] 对任意 x, x^K 为其 K 项近似信号, Φ 满足 RIP 性质的感知矩阵, 参数为 (K, δ_K) , 令

$$y = \Phi x + e = \Phi x^K + e'$$

则误差满足

$$\|e'\|_2 \leq \|x - x^K\|_2 + \frac{1}{\sqrt{K}} \|x - x^K\|_1 + \|e\|_2 \quad (20)$$

证明详见文献[20]引理 4.

根据论文假设, 信号满足式(2)描述的衰减模型, $C_r = \|x\|_\infty$, 则有如下结果成立^[21]

$$\frac{\|x - x^K\|_1}{\sqrt{K}} \leq C_r' \cdot K^{-r+1/2} \quad (21)$$

$$\|x - x^K\|_2 \leq C_r'' \cdot K^{-r+1/2} \quad (22)$$

结合式(12)、式(19)~式(22), 式(11)可化为

$$\begin{aligned} \| \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_T^i \|_2 &\leq 2 \| \mathbf{x}_T^k - \hat{\mathbf{x}}_T \|_2 + \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_T^k \|_2 \\ &\leq \epsilon \end{aligned} \quad (23)$$

即误差上界由 ϵ 给出,且

$$\begin{aligned} \epsilon = \frac{2\sqrt{1+\delta_M}}{(1-\delta_M)} &[(C'_r + C''_r) \cdot \mathbf{K}^{-r+1/2} + \| \mathbf{e} \|_2] \quad (24) \\ &+ C'_r \cdot \mathbf{K}^{-r+1/2} \end{aligned}$$

C'_r, C''_r 是只与信号衰减指数 r 有关的常数. 举例来说,当 $\delta_M = 0.06$ 、稀疏度 $K = 35$ 、最大幅值归一化信号满足二次衰减时,式(24)描述的上界不大于 $0.02 + 2.19 \| \mathbf{e} \|_2$.

上述分析给出了每次迭代输出重构信号与原信号误差的上界,结果由式(23)、式(24)描述. 从结果可知,重构迭代中的 Kalman 过程对初值不敏感且收敛,经过 Kalman 迭代,最小二乘估计误差被逐次削减. 在误差上界中包含了量测误差 $\| \mathbf{e} \|_2$ 的影响,即 Kalman 过程在估计信号时还是不可避免地可能会引入部分量测误差,但在实验中发现,弱匹配过程恰好能够将部分被引入的噪声剔除,从而达到良好的重构效果. 由于已有成果对弱匹配进行论述^[12],限于篇幅这里不再专门分析弱匹配对稀疏重构的影响.

4 仿真实验

4.1 抗噪声性能比较

选取长度为 $N = 200$ 的一维稀疏测试信号,稀疏度 K 分别取 10 和 35,观测数满足 $M = c \cdot K \log_2(N/K)$ ^[12],这里 c 取 1.67. 含噪信号(所含噪声为高斯白噪声)信噪比 SNR 从 5dB 至 30dB 以步长 5dB 变化. 考察 KFMP 和典型算法如 OMP、RAMP、SAMP、BAOMP、BP 去噪算法(即 BPDN^[4])以及与其同类的 KFCS 算法的抗噪性能. KFMP 中 μ_1, μ_2 分别取 0.6 和 0.4, Kalman 滤波迭代停止条件参数 ξ 设为 0.1, RAMP 算法中,迭代停止与阶段转换阈值 ϵ_1, ϵ_2 均取 10^{-4} ,稀疏度递增步长为 10, SAMP 中步长设为 3,噪声水平代入真值 $\| \mathbf{e} \|_2$, BAOMP 中两个弱匹配参数分别选取文献中给出的最佳值 0.4 和 0.6. BPDN 利用 CVX 工具箱^[22]实现. KFCS 参数依照文献^[13]设定. 重构信噪比(RSNR)定义为

$$\text{RSNR} = 20 \lg \frac{\| \mathbf{x} \|_2}{\| \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \|_2}$$

仿真 2000 次统计的重构信号 RSNR 随输入信号 SNR 变化曲线对比如图 1,在相同信号条件下,与同类算法相比 KFMP 的重构信噪比最大,即 KFMP 的抗噪声性能最好. 各算法重构信噪比随着输入信号信噪比增大而增大,特别当 $K = 35$,输入信号信噪比不小于 10dB 时, KFMP 算法的重构信噪比明显大于 BAOMP 和 RAMP. 另外,还注意到 KFCS 算法在稀疏度 $K = 10$ 时,

RSNR 性能与 KFMP 性能相当,但当 $K = 35$ 时 KFMP 几乎完全失效.

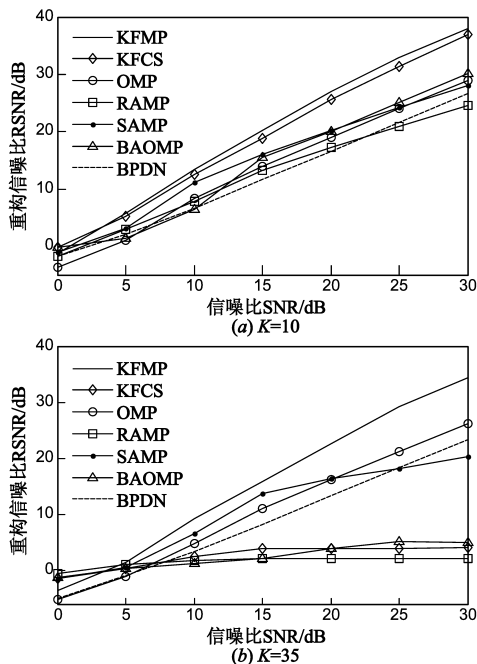


图1 不同稀疏度下各算法RSNR与SNR关系曲线

4.2 不同算法对稀疏信号重构的比较

将输入信号信噪比分别设为 10dB 和 30dB 进行实验,图 2 中表示的是迭代 2000 次统计的多种算法重构信噪比随稀疏度 K 变化的曲线. 一维稀疏测试信号长度 $N = 200$,令稀疏度 K 从 10 至 35 变化. 为适应不同稀

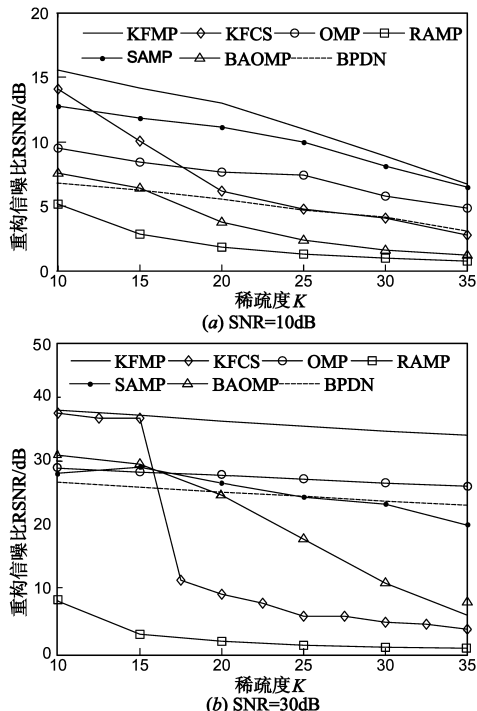


图2 不同SNR下各算法RSNR与稀疏度关系曲线

疏度, RAMP 算法稀疏度递增步长设为 1, 其它参数设置与 4.1 节实验设置相同. 从图 2 中可看出, 随着稀疏度的增大, 信号重构信噪比有减小趋势. 在高、低两种信噪比条件下, 无论稀疏度 K 取多大, KFMP 重构信噪比均最大, 即重构性能最好. 图 2(b) 中 KFCS 性能曲线出现陡降, 这与 KFCS 中筛选原子所利用的 Dantzig Selector 有关, 稀疏度稍大时, 一旦无法准确筛选出真实支撑集就会造成后续 Kalman 更新过程不断在支撑集外“费力”寻找最优解, 最终重构失败.

比较图 1 和图 2 可知, 各算法重构信噪比随输入信号信噪比增大而增大, 随信号稀疏度增大而减小. 如 $K = 35$, $\text{SNR} = 30\text{dB}$ 时, 与采用弱匹配的 BAOMP 算法相比, 正是 KFMP 中引入的 Kalman 滤波过程使其 RSNR 获得了 30dB 的增益. KFMP 在自适应约束稀疏度的重构过程中也规避了部分算法迭代停止与阶段转换双阈值设置的难题.

比较图 1 和图 2, 以性能较好的 SAMP 算法为例, 进行分析对比. 文献[10]指出感知矩阵 Φ 在满足参数 $\delta_{3K} < 0.06$ 的 RIP 特性下, 通过 SAMP 算法重构信号误差满足 $\|x - \hat{x}\|_2 \leq (1 + \delta_{3K}) / [\delta_{3K}(1 - \delta_{3K})] \|e\|_2$, 当 $\delta_{3K} < 0.06$, $(1 + \delta_{3K}) / [\delta_{3K}(1 - \delta_{3K})] > 18$, 且随 δ_{3K} 减小而迅速增大. SAMP 实际还蕴含了一个隐藏限制条件, 根据 RIP 的定义, 观测数 M 应当不小于稀疏度参数 $3K$. 由于 δ 随 K 增大逐渐增大, 当稀疏度 K 较大时, 仍要求 δ_{3K} 保持小于 0.06, 这样的感知矩阵 Φ 可能需要特别设计. 而 KFMP 中没有如此苛刻的 RIP 参数以及观测数限制, 这也是同等条件下 KFMP 信号重构性能较高的原因之一.

4.3 不同算法运算时间的比较

分别考察各种算法运算时间随信号稀疏度 K 和观测数 M 的变化规律, 如图 3 所示, SNR 均设置为 30dB. 考察时间随观测数变化时, 信号稀疏度设为 35. 其余设置参照与 4.1 节仿真. 从图 3 中看出各算法运算时间均有随信号稀疏度、观测数上升而增加的趋势. 在仿真各算法中, KFCS 的运算时间最长, 原因有两点, 第一是其原子筛选不准确导致的 Kalman 反复迭代; 第二是算法流程中设计了三次 Kalman 滤波过程, 复杂度过高. BPDN 的运算时间次长, 这是由凸优化类算法复杂度本身较高引起的. OMP 类的贪婪算法运算时间较短, 在 10^{-2}s 量级, 这类算法就是以简单、易于实现而著称. 本文提出的 KFMP 算法运算时间比贪婪迭代类算法运算时间稍长, 比 KFCS 和 BPDN 算法运算时间均短. 前面已经说明, KFMP 利用复杂度较大的 Kalman 滤波来减小最小二乘可能给重构引入的干扰, 且仿真结果也表明其 RSNR 性能比其余算法高. 因此, 可以认为 KFMP 算法在

可接受范围内增加复杂度来提升了对含噪信号的重构能力. 从另一角度来看, KFMP 算法降低了同类的 KFCS 算法复杂度, 且较之性能有所提高.

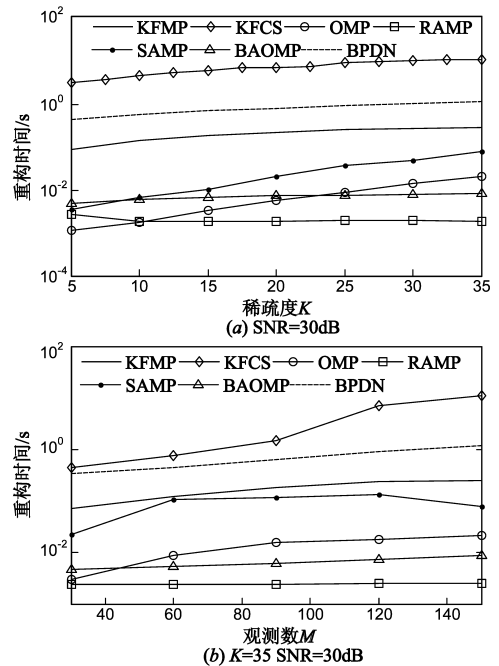


图3 不同算法运算时间比较

5 结论

在压缩感知理论框架下, 针对目前现有重构速度快、实现容易的贪婪迭代算法抗噪声性能不足的缺陷, 提出了一种基于卡尔曼滤波的压缩感知弱匹配去噪重构, 首先依据压缩感知信号模型, 给出 Kalman 滤波方程组的具体形式, 再将其引入重构迭代, 在最小均方误差准则下, 最优地估计重构信号, 基于弱匹配筛选出有效的原子, 并剔除冗余原子, 进而重构原信号. 仿真结果表明, KFMP 算法抗噪声性能优于现有典型的贪婪算法, 尽管其复杂度略有提高, 但是仍低于 BPDN 等典型凸优化算法和与之同类的 KFCS 算法.

下一步可致力于进一步提高含噪信号, 尤其是信噪比在 0dB 以下的含噪信号重构信噪比.

参考文献

- [1] E J Candès, M B Wakin. An introduction to compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21 - 30.
- [2] D L Donoho. Compressed sensing[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
- [3] R G Baraniuk. Compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118 - 121.
- [4] S S Chen, D L Donoho, M A Saunders. Atomic decomposition

- by basis pursuit [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, 20(1): 33 – 61.
- [5] S J Kim, K Koh, M Lustig. An interior-point method for large-scale ℓ_1 regularized least squares [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4): 606 – 617.
- [6] A T Mario, R D Nowak, S J Wright. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4): 586 – 597.
- [7] J A Tropp, A C Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655 – 4666.
- [8] W Dai, O Milenkovic. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 2009, 55(5): 2230 – 2249.
- [9] D Needell, J A Tropp. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples [J]. *Communications of the ACM*, 2010, 53(12): 93 – 100.
- [10] T T Do, L Gan, N S Nguyen. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing [A]. *Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers [C]* Pacific Grove, California; IEEE, 2008. 581 – 587.
- [11] 刘亚新, 赵瑞珍, 胡绍海, 等. 用于压缩感知信号重建的正则化自适应匹配追踪算法 [J]. *电子与信息学报*. 2010, 32(11): 2713 – 2717.
Y Liu, R Zhao, S Hu, et al. Regularized adaptive matching pursuit algorithm for signal reconstruction based on compressive sensing [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(11): 2713 – 2717. (in Chinese)
- [12] H Huang, A Makur. Backtracking-based matching pursuit method for sparse signal reconstruction [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(7): 391 – 394.
- [13] N Vaswani. Kalman filtered compressed sensing [A]. *Image Processing, 2008. ICIP 2008. 15th IEEE International Conference on [C]*. San Diego, California; IEEE, 2008. 893 – 896.
- [14] A Carmi, P Gurfil, D Kanevsky. Methods for sparse signal recovery using Kalman filtering with embedded pseudo-measurement norms [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(4): 2405 – 2409.
- [15] D Baron, M F Duarte, M B Wakin, et al. Distributed Compressive Sensing [DB/OL]. <http://arxiv.org/abs/0901.3403>, 2009.
- [16] E J Candès. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing [J]. *Compte Rendus de l'Academie des Sciences*, 2008, Series I(346): 589 – 592.
- [17] 张明友, 吕明. 信号检测与估计 [M]. 第二版. 北京: 电子工业出版社, 2005.
- [18] 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998.
- [19] Cormen Thomas H, Leiserson Charles E, Rivest Ronald L, 等. 算法导论 [M]. 潘金贵, 顾铁成, 李成法, 等, 译. 北京: 机械工业出版社, 2006. 451 – 465.
- [20] T Blumensath, M E Davies. Iterative Hard Thresholding for Compressed Sensing [EB/OL]. <http://arxiv.org/pdf/0805.0510v1.pdf>, 2008.
- [21] E Candès, J Romberg, T Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. *Commun Pure Appl Math*, 2006, 59(8): 1207 – 1223.
- [22] M Grant, S Boyd. cvx Users' Guide for cvx Version 1.2 [EB/OL]. <http://www.stanford.edu/~boyd/cvx>, 2009.

作者简介



田文彪 男, 1987 年 9 月出生, 江西南昌人. 海军航空工程学院信息与通信工程学科博士研究生, 主要研究方向为压缩感知、蒸发波导反演.

E-mail: twbi5si@gmail.com



康健 女, 1971 年 12 月出生, 黑龙江哈尔滨人. 海军航空工程学院电子信息工程系副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为信号处理及现代滤波理论.

E-mail: kang88jian@sina.com