

改进的迭代算法在图像恢复正则化模型中的应用

李旭超¹, 宋 博², 甘良志²

(1. 赤峰学院计算机与信息工程学院, 内蒙古赤峰 024000; 2. 江苏师范大学电气工程及自动化学院, 江苏徐州 21116)

摘 要: 根据图像成像过程容易受泊松噪声的影响, 提出用 Kullback-Leibler 距离描述保真项, 用平方根复合函数描述正则项, 建立具有自适应权系数的能量泛函正则化模型. 由于模型的梯度退化和海森矩阵的规模较大, 使得无法应用牛顿迭代算法. 本文利用退化梯度幅值作为约束集, 建立可对角化和容易求逆的海森矩阵, 提出改进的牛顿投影迭代算法. 仿真表明, 该方法取得较小的相对误差、偏差, 较高的信噪比和良好的视觉效果.

关键词: 正则化; 图像恢复; 海森矩阵; 活跃集

中图分类号: TP302.7

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2015)06-1152-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.06.017

The Application of Improved Iterative Algorithm to Regularization Model of Image Restoration

LI Xu-chao¹, SONG Bo², GAN Liang-zhi²

(1. College of Computer and Information Engineering, Chifeng University, Chifeng, Inner Mongolia 024000, China;

2. College of Electrical Engineering and Automation, Xuzhou, Jiangsu 221116, China)

Abstract: According to the imaging process is easily affected by Poisson noise, the image restoration regularization model that fidelity term is described by Kullback-Leibler Euclidean and the regularization term is established by the square root compound function, with adaptive weight coefficients, is proposed. For the gradient degeneration and the large scale Hessian matrix, it is unable to apply the Newton iterative algorithm to the model. In this paper, constraint set is introduced by the magnitude value of degeneration gradient, the diagonal and easily computed Hessian matrix is established, and the improved Newton iterative projection algorithm is proposed. Simulation results show the proposed can effectively restore image, such as the lower relative error and deviation, the higher peak signal to noise ratio, and better visual effect.

Key words: regularization; image restoration; Hessian matrix; active set

1 引言

原子显微镜成像、X 射线断层扫描成像以及雷达成像等^[1]可表述为 Fredholm 积分方程, 离散后得到方程往往是不适定的^[2], 无法直接得到理想图像. 为获得理想图像, 目前最好的办法是建立由保真项和正则项组成的能量泛函^[1].

对于保真项, 拟合形式必须与成像过程相吻合. 若受高斯噪声影响, 需采用 L_2 范数进行拟合; 若受椒盐噪声影响, 常采用 L_1 范数进行拟合^[3]; 若成像过程的统计分布已知, 常采用合适的概率分布函数进行拟合. 正则项的函数空间对解的性能产生至关重要的影响, 如 $BV(\Omega)$ 空间能表征图像的边缘特征^[4], $BV^2(\Omega)$ 空间能消除在平坦区域产生的阶梯效应^[5], 小波域 Besov 函数空间能准确描述图像的特征等. 在正则化模型的求解上, 主要有矩阵分解法^[6]和能量泛函迭代法^[7]. 矩阵分解法

如奇异值分解(SVD)、广义 SVD 和 QR 分解等, 但在实际应用中, 保真项与正则项的矩阵不具有特殊结构, 限制矩阵分解法应用. 迭代法如 Landweber 算法^[1], 最陡下降算法, 梯度投影算法^[8], 但此类算法收敛速度较慢. 为加快算法收敛, 常采用拟牛顿算法^[1], BFGS 算法等^[9], 但是, 由于海森矩阵的维数较高, 直接计算逆矩阵非常困难, 若梯度幅值较小, 导致海森矩阵是非满秩的, 限制牛顿迭代算法的应用. 正则项的权重确定方法主要有 Discrepancy 准则、L-曲线法和广义交叉验证法等^[1], 但这些方法得到的权重是固定的, 不能随着迭代算法的进行自适应地改变, 从而影响解的准确性.

鉴于正则化模型的建立、求解及参数确定存在的问题, 本文主要做以下工作: 在模型的建立上, 用 Kullback-Leibler 函数对容易受泊松噪声降质的图像进行拟合, 用平方根复合函数描述正则项; 在模型的求解上, 对退化的梯度引入约束集, 构建可对角化和容易求逆的海森矩

阵,提出一种改进的牛顿迭代投影算法,并证明算法的收敛性;在正则项参数的确定上,提出一种基于不动点的自适应权重确定方法;最后将提出算法与已有算法进行实验对比.

2 能量泛函模型建立、求解算法及参数确定

2.1 能量泛函正则化模型

由于成像是放射线扫描,放射线可以看成由无数光子组成,即点扩散函数 \mathbf{A} ,而每个光子经真实物体获得的图像 \mathbf{u} 看作是期望值为 $(\mathbf{A}\mathbf{u})_{ij}$ 的泊松随机变量, $(\mathbf{A}\mathbf{u})_{ij}$ 为 $\mathbf{A}\mathbf{u}$ 中的元素.假定 \mathbf{u} 与采集图像 \mathbf{g} 是独立的且服从泊松分布,给定 \mathbf{u}, \mathbf{g} 的条件概率为

$$p(\mathbf{g} | \mathbf{u}) = \prod_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^n \frac{(\mathbf{A}\mathbf{u})_{ij}^{g_{ij}}}{g_{ij}!} \exp[-(\mathbf{A}\mathbf{u})_{ij}] \right) \quad (1)$$

式中, i, j 为图像像素的下标, m, n 为图像尺寸.若已知理想图像的先验概率

$$p(\mathbf{u}) = \exp[-\alpha R(\mathbf{u})] \quad (2)$$

根据贝叶斯准则,理想图像的最大后验概率为

$$\mathbf{u} = \operatorname{argmax} p(\mathbf{g} | \mathbf{u}) p(\mathbf{u}) \quad (3)$$

若 $(\mathbf{A}\mathbf{u})_{ij} - g_{ij} \ln(\mathbf{A}\mathbf{u})_{ij} > 0$, \mathbf{u} 几乎处处 Lebesgue 可积,将式(1)、(2)代入式(3),然后两边取负的 \ln -似然函数,则有

$$\mathbf{u} = \operatorname{argmin} \{ \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{g} \ln(\mathbf{A}\mathbf{u})\|_{L_1(\Omega)} + \alpha R(\mathbf{u}) \} \quad (4)$$

为即体现图像的不连续特性,又能应用牛顿投影算法,正则项表达式为

$$R(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla \mathbf{u}|^2 + \beta} \mathrm{d}\mathbf{x} \quad (5)$$

式中, β 为很小的正数, ∇ 表示梯度.当 $\beta = 0$ 时,式(5)变为 ROF 模型的正则项^[3].将式(5)代入式(4),获得能量泛函表达式为

$$E(\mathbf{u}) = \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{g} \ln(\mathbf{A}\mathbf{u})\|_{L_1(\Omega)} + \alpha \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla \mathbf{u}|^2 + \beta} \mathrm{d}\mathbf{x} \quad (6)$$

式(6)的保真项与正则项是 \mathbf{u} 的凸函数,且是强制的(coercive),由直接变分原理^[3],其解一定存在.由于式(6)的二阶导数是正定的,因此,式(6)的解唯一.

2.2 模型求解算法设计

2.2.1 经典的牛顿迭代算法

能量泛函式(6)具有连续的二阶导数,对式(6)进行二阶泰勒展开,表达式为

$$Q(\mathbf{s}) = E(\mathbf{u}) + \langle \nabla E(\mathbf{u}), \mathbf{s} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{Hess} E(\mathbf{u}) \mathbf{s}, \mathbf{s} \rangle + o(\|\mathbf{s}\|^2) \quad (7)$$

式中, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积, $o(\|\mathbf{s}\|^2)$ 表示无穷小量, \mathbf{Hess} 表示海森矩阵.

由于能量泛函式(6)有唯一最小值,因此式(7)满足下列关系

$$\nabla E(\mathbf{u}_{\tau}) + \mathbf{Hess} E(\mathbf{u}_{\tau}) \mathbf{s} = 0 \quad (8)$$

式中, τ 为迭代次数.取 $\mathbf{u}_{\tau+1} = \mathbf{u}_{\tau} + \nu \mathbf{s}$ 作为 $\tau+1$ 次能量泛函的最小值,则牛顿迭代算法为

$$\mathbf{u}_{\tau+1} = \mathbf{u}_{\tau} - \nu [\mathbf{Hess} E(\mathbf{u}_{\tau})]^{-1} \nabla E(\mathbf{u}_{\tau}) \quad (9)$$

式中, ν 为步长.若式(9)中的 $\mathbf{Hess} E(\mathbf{u}_{\tau})$ 为单位阵,则式(9)变为 Landweber 算法;若选取海森矩阵为单位阵, $\nu_{\tau} = \operatorname{argmin} E(\mathbf{u}_{\tau} + \nu \mathbf{s})$, 式(9)变为最速下降算法;若用前后两次迭代残差构造海森矩阵,式(9)变为 BFGS 算法,但是,如果梯度退化,该算法将失效^[9].

2.2.2 正则化模型最优解满足的条件

由于像素幅值大于等于零,将式(6)转化为具有非负条件约束的最优化问题,表达式为

$$\min E(\mathbf{u}), u_{ij} \geq 0 \quad (10)$$

由式(10)可知,限制条件 $c(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, 其导数为

$$\nabla c_k = \mathbf{e}_k \quad (11)$$

式中 $k = m \times n$, \mathbf{e}_k 表示第 k 个单位矢量.式(11)表明,式(10)可行解的限制条件是相互独立的,若式(10)具有最优解,则必须满足 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件^[10], 即

$$\frac{\partial E}{\partial u_{ij}}(\mathbf{u}_*) \geq 0, \lambda_* \geq 0, u_{ij}^* \geq 0 \quad (12)$$

$$u_{ij}^* \frac{\partial E}{\partial u_{ij}}(\mathbf{u}_*) = 0 \quad (13)$$

式中, λ_* 为拉格朗日乘子,式(13)为互补条件.若 $u_{ij}^* = 0$, 则 $\frac{\partial E}{\partial u_{ij}}(\mathbf{u}_*) > 0$; 若 $u_{ij}^* > 0$, 则 $\frac{\partial E}{\partial u_{ij}}(\mathbf{u}_*) = 0$, 导致式(8)的海森矩阵是非满秩的,造成式(9)无法更新迭代算法的解.

2.2.3 改进的牛顿迭代算法

为将梯度退化和海森矩阵的构造有机地联系在一起,用投影表示式(9),表达式为

$$\mathbf{u}_{\tau+1} = P(\mathbf{u}_{\tau} - \nu \mathbf{D}_{\tau} \nabla E(\mathbf{u}_{\tau})) \quad (14)$$

式中, $P(\cdot)$ 表示式(10)的解在 $C = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d | u_{ij} \geq 0\}$ 的投影, \mathbf{D}_{τ} 表示可对角化海森矩阵.

为区别梯度退化与非退化,引入表征梯度退化部分的指标集,表达式为

$$\pi_{\tau}(\mathbf{u}) = \{i, j | 0 \leq u_{ij}^* \leq \epsilon_{\tau}\} \quad (15)$$

式中, $\gamma_{\tau} = \|\mathbf{u}_{\tau} - [\mathbf{u}_{\tau} - \nabla E(\mathbf{u}_{\tau})]^+\|$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma_{\tau} = 0$, $\epsilon_{\tau} = \min\{\epsilon, \gamma_{\tau}\}$, ϵ 是非常小的正数.

梯度非退化部分用式(6)的二阶导数逼近海森矩阵 \mathbf{D}_{τ} 非满秩部分,而海森矩阵 \mathbf{D}_{τ} 其余部分用谱特性聚集在 1 附近的单位阵来逼近^[11],表达式为

$$\mathbf{\Gamma}_{\tau} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i, j \in \pi_{\tau}(\mathbf{u}) \\ [\mathbf{Hess} E(\mathbf{u}_{\tau})]_{ij}, & i, j \notin \pi_{\tau}(\mathbf{u}) \end{cases} \quad (16)$$

当 u_{ij}^* 的值都较大且都相同,图像为单值图像, i, j

$\notin \pi_\epsilon(\mathbf{u})$, 若 Γ_τ 取 $[\text{Hess } E(\mathbf{u}_\tau)]_{ij}$, 出现 Γ_τ 不可逆, 为防止此情况, 用块循环循环块矩阵^[1]逼近 $[\text{Hess } E(\mathbf{u}_\tau)]_{ij}$, 表达式为

$$\text{Hess } E(\mathbf{u}_\tau) = \mathbf{A}^T \mathbf{\Lambda}_\tau \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I} \quad (17)$$

式中, $\mathbf{\Lambda}_\tau = \mu \left(\frac{\mathbf{g}_{ij}}{(\mathbf{A}\mathbf{u}_\tau + \xi)_{ij}^2} \right)$, $\mu(\cdot)$ 表示均值.

式(14)中的海森逼近矩阵 \mathbf{D}_τ 表示为

$$\mathbf{D}_\tau = \mathbf{M}_\tau \Gamma_\tau \mathbf{M}_\tau + \mathbf{N}_\tau \quad (18)$$

式中, \mathbf{M}_τ 和 \mathbf{N}_τ 都是对角矩阵, \mathbf{M}_τ 和 \mathbf{N}_τ 由能量泛函的梯度产生与式(15)有关, 表示为

$$\mathbf{M}_\tau = \begin{cases} 1, & i, j \notin \pi_\epsilon(\mathbf{u}) \\ 0, & i, j \in \pi_\epsilon(\mathbf{u}) \end{cases}, \mathbf{N}_\tau = \mathbf{I} - \mathbf{M}_\tau \quad (19)$$

由式(18)可知, \mathbf{D}_τ 是对角矩阵. 将式(18)代入式(14), 获得迭代算法搜索方向, 表示为

$$\mathbf{d}_\tau = -\mathbf{M}_\tau \Gamma_\tau \mathbf{M}_\tau \nabla E(\mathbf{u}_\tau) - \mathbf{N}_\tau \nabla E(\mathbf{u}_\tau) \quad (20)$$

令

$$\boldsymbol{\theta}_\tau = -\Gamma_\tau \mathbf{M}_\tau \nabla E(\mathbf{u}_\tau) \quad (21)$$

由于矩阵 Γ_τ 是可逆的, 利用共轭梯度算法求解下列线性系统方程获得 $\boldsymbol{\theta}_\tau$, 表达式为

$$\Gamma_\tau^{-1} \boldsymbol{\theta}_\tau = -\mathbf{M}_\tau \nabla E(\mathbf{u}_\tau) \quad (22)$$

2.2.4 改进的牛顿迭代算法收敛性

已知 $r > 0$, $\eta > 0$, $\rho(\mathbf{u}_*, r)$ 表示以 \mathbf{u}_* 为圆心, r 为半径的球, \mathbf{u}_* 为式(6)的最优解, $\mathbf{u}_\tau \in \rho(\mathbf{u}_*, r) \subset \Omega$ 为式(14)的迭代解, $\tau = 1, 2, \dots$.

引理 1 若 \mathbf{u}_* 为式(6)的最优解, $\nabla E(\mathbf{u}_*) = 0$, 那么

$$\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{u}_{\tau+1}) - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{u}_\tau)\| \leq \eta \nu \|s\| \quad (23)$$

即海森矩阵 \mathbf{D}_τ^{-1} 是 Lipschitz 连续的^[12], 式中, η 是 Lipschitz 常数.

引理 2 设 $E(\mathbf{u})$ 二阶连续可微, $\forall \mathbf{u}_0 \in \rho(\mathbf{u}_*, r) \subset \Omega$, $\forall \mathbf{y} \in \Omega$, 存在常数 $\theta > 0$, 使得

$$\mathbf{y}^T \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{u}) \mathbf{y} \geq \theta \|\mathbf{y}\|^2 \quad (24)$$

式中, $\mathbf{u} \in L(\mathbf{u}_0)$, $L(\mathbf{u}_0)$ 为水平集^[10], 表达式为

$$L(\mathbf{u}_0) = \{\mathbf{u} | E(\mathbf{u}) \leq E(\mathbf{u}_0)\} \quad (25)$$

定理 1 若式(6)满足引理 1 和 2, 由式(14)产生的点列 $\{\mathbf{u}_\tau\}$ 收敛于 $E(\mathbf{u})$ 的极小点.

证明 由于式(25)为有界闭凸集, 所以 $\nabla E(\mathbf{u})$ 在 $L(\mathbf{u}_0)$ 上一致连续. 由引理 1, $\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{u})$ 连续, $L(\mathbf{u}_0)$ 是有界闭集, $\forall \mathbf{u} \in L(\mathbf{u}_0)$, 存在常数 $\Theta > \theta$, 使得

$$\|\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{u})\| \leq \Theta \quad (26)$$

由式(20), 则有

$$\mathbf{D}_\tau^{-1} \mathbf{d}_\tau = -\nabla E(\mathbf{u}_\tau) \quad (27)$$

对式(27)两边取范数, 则有

$$\|\nabla E(\mathbf{u}_\tau)\| = \|\mathbf{D}_\tau^{-1} \mathbf{d}_\tau\| \leq \Theta \|\mathbf{d}_\tau\| \quad (28)$$

记 φ_τ 为搜索方向 \mathbf{d}_τ 与负梯度 $\nabla E(\mathbf{u}_\tau)$ 夹角, 则

$$\cos \varphi_\tau = \frac{-[\nabla E(\mathbf{u}_\tau)]^T \mathbf{d}_\tau}{\|\nabla E(\mathbf{u}_\tau)\| \|\mathbf{d}_\tau\|} \quad (29)$$

将式(27)代入(29), 则有

$$\cos \varphi_\tau = \frac{\mathbf{d}_\tau^T \mathbf{D}_\tau^{-1} \mathbf{d}_\tau}{\|\nabla E(\mathbf{u}_\tau)\| \|\mathbf{d}_\tau\|} \geq \frac{\theta}{\Theta} \quad (30)$$

因为 $\frac{\theta}{\Theta} \leq \cos \varphi_\tau = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_\tau\right) \leq \frac{\pi}{2} - \varphi_\tau$, 所以 $\varphi_\tau \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{\Theta}$. 根据 $E(\mathbf{u})$ 具有唯一最小值, 则有

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [E(\mathbf{u}_{\tau+1}) - E(\mathbf{u}_\tau)] = 0 \quad (31)$$

假设 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \nabla E(\mathbf{u}_\tau) \neq 0$, 存在 $\eta_1 > 0$ 和子序列 $\{\mathbf{u}_\tau\}$, 使得 $\|\nabla E(\mathbf{u}_\tau)\| \geq \eta_1$. 由式(29)有

$$-[\nabla E(\mathbf{u}_\tau)]^T \frac{\mathbf{d}_\tau}{\|\mathbf{d}_\tau\|} \geq \eta_1 \sin\left(\frac{\theta}{\Theta}\right) \neq 0 \quad (32)$$

由中值定理, 则有

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}_\tau + \nu \mathbf{d}_\tau) &= E(\mathbf{u}_\tau) + \nu \nabla E^T(\boldsymbol{\pi}_\tau) \mathbf{d}_\tau \\ &\leq E(\mathbf{u}_\tau) + \nu \|\mathbf{d}_\tau\| \left(\frac{\nabla E^T(\mathbf{u}_\tau) \mathbf{d}_\tau}{\|\mathbf{d}_\tau\|} + \|\nabla E(\boldsymbol{\pi}_\tau) - \nabla E(\mathbf{u}_\tau)\| \right) \end{aligned} \quad (33)$$

其中, $\boldsymbol{\pi}_\tau = \mathbf{u}_\tau + \zeta \mathbf{d}_\tau$, $0 < \zeta < 1$. 因为 $E(\mathbf{u})$ 一致连续, $\exists \eta_2 > 0$, 当 $0 \leq \nu \|\mathbf{d}_\tau\| \leq \eta_2$ 时, 则有

$$\|\nabla E(\boldsymbol{\pi}_\tau) - \nabla E(\mathbf{u}_\tau)\| \leq \frac{1}{2} \eta_1 \sin\left(\frac{\theta}{\Theta}\right) \quad (34)$$

根据式(32) - (34), 则有

$$E\left(\mathbf{u}_\tau + \frac{\eta_2}{\|\mathbf{d}_\tau\|} \mathbf{d}_\tau\right) \leq E(\mathbf{u}_\tau) - \frac{1}{2} \eta_2 \eta_1 \sin\left(\frac{\theta}{\Theta}\right) \quad (35)$$

若 ν_τ 由线性搜索确定, 那么

$$E(\mathbf{u}_{\tau+1}) \leq E(\mathbf{u}_\tau) - \frac{1}{2} \eta_2 \eta_1 \sin\left(\frac{\theta}{\Theta}\right) \quad (36)$$

这与式(31)相矛盾, 说明假设 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \nabla E(\mathbf{u}_\tau) \neq 0$ 是错误的, 因此 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \nabla E(\mathbf{u}_\tau) = 0$. 证毕.

2.3 正则项参数的选取

因为权重是正则项与保真项的函数, 所以 α 必须自适应地改变, 表达式为

$$r(\alpha) = (\omega - 1) E_0(\mathbf{u}_\alpha) - \alpha R(\mathbf{u}_\alpha) \quad (37)$$

式中, $\omega > 1$ 的常数, 在算法迭代过程中, $r(\alpha) = 0$, 则有表达式

$$\alpha = (\omega - 1) E_0(\mathbf{u}_\alpha) / R(\mathbf{u}_\alpha) \quad (38)$$

而算法当前迭代的权重是由上次迭代权重决定的, 根据不动点迭代原理, 则有

$$\alpha_{\tau+1} = (\omega - 1) E_0(\mathbf{u}_\alpha) / R(\mathbf{u}_\alpha) \quad (39)$$

式(39)权重序列 $\{\alpha_\tau\}$ 更新是收敛的, 证明见附录.

2.4 本文算法整体步骤

初始化: 退化图像 \mathbf{g}_0 作为初始值, 设置 $\beta, \alpha_0, \omega, \tau = \text{num}$.

Step1: 计算式(6)获得梯度 $\nabla E(\mathbf{u}_\tau)$, 根据指标集式(15), 计算式(19)获得对角矩阵 \mathbf{M}_τ 和 \mathbf{N}_τ ; 根据指标集和式(6)的海森矩阵获得对角矩阵 $\mathbf{\Gamma}_\tau$; 根据式(18)获得对角化海森矩阵;

Step2: 计算式(20)获得搜索方向 \mathbf{d}_τ ;

Step3: 使式(10)最小化, 获得牛顿迭代算法搜索步长, 表达式为

$$\nu_\tau = \arg \min_{\nu > 0} E[P(\mathbf{u}_\tau - \nu \mathbf{D}_\tau \nabla E(\mathbf{u}_\tau))] \quad (40)$$

Step4: 计算能量泛函的解, 表达式为

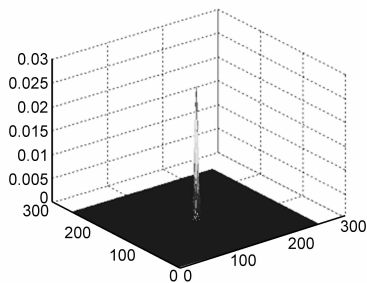
$$\mathbf{u}_{\tau+1} = P(\mathbf{u}_\tau - \nu_\tau \mathbf{D}_\tau \nabla E(\mathbf{u}_\tau)) \quad (41)$$

Step5: 若 $\tau > num$ 或 $\| E(\mathbf{u}_{\tau+1}) - E(\mathbf{u}_\tau) \| \leq t$, 输出. 否则, $\tau = \tau + 1$, 更新式(39), 返回 Step1.

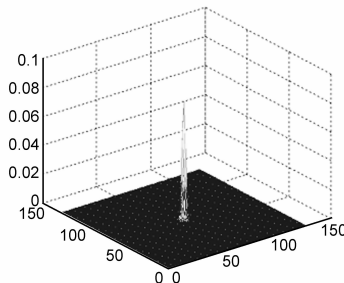
输出: 优化后恢复图像 $\mathbf{u}_{\tau+1}$.

3 实验结果及分析

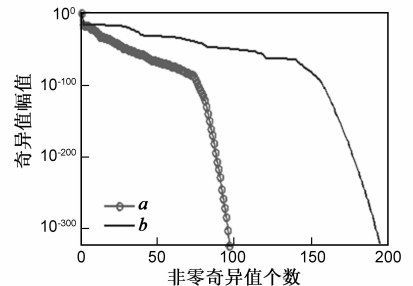
用仿真图像和核磁共振图像测试算法的性能. 下面给出本文算法, FISTA 算法^[13]和改进的 ISGP 算法^[14]



(a) 256×256的点扩散函数



(b) 128×128的点扩散函数



(c) 点扩散函数产生矩阵奇异值分解

图1 点扩散函数



图2 原始图像依次为:Spine, Woman, Pears, Eye

从图3的 Spine 恢复视觉效果来看, 本文算法与原始图像最接近, 说明用复合函数作为正则项更能体现边缘与平稳区域的特征. 从图3(e)~(h)对比可知, FISTA 算法在平坦区域产生更多虚假边缘, ISGP 算法产生的虚假边缘多于本文算法, 这是由于 Spine 图像主要由平稳区域组成, 有界变差函数容易在平稳区域产生阶梯效应. 从图3(i)~(l)对比可知, FISTA 算法产生更多的伪痕, ISGP 算法恢复的细节信息不太明显.

从 Woman 的局部放大图4(i)~(l)可知, FISTA 算法使图像的边缘模糊, 这是由于最小二乘不能准确拟合图像非平稳统计分布. ISGP 算法在平稳区域产生很多伪痕, 说明有界变差函数容易在平稳区域产生阶梯效应. 本文算法恢复图像的视觉效果最接近原始图像.

处理结果, 用 Canny 算子检测图像的边缘, 并对细节进行放大.

测试所用的计算机配置为: Genuine Intel(R) CPU T2300 @ 1.66GHz, 1.66GB 内存, 软件环境为 MATLAB R2009a. 实验中, $t = \epsilon = 1e - 8$, $num = 1000$, $\omega = 1.02$, $\beta = 0.001$. 采用方差 $\sigma = 2.4$ 和 $\sigma = 1.4$ 的 psfGauss 函数分别生成点扩散函数^[15]图1(a)和图1(b). 图1(c)为图1(a)和图1(b)形成矩阵的奇异值分解, 特征值幅值变化较大, 说明矩阵 \mathbf{A} 是不适定的.

3.1 不同图像恢复仿真实验

选取四幅图像, 如图2所示. Pears 图像, 物体间有遮挡, 容易产生边缘丢失; Spine 图像, 由较多平坦区域组成, 轮廓简单, 容易产生阶梯效应; Eye 图像, 细节较多, 容易造成边缘模糊; Woman 图像, 细节和平坦区域都形成较大区域, 细节不易恢复且平坦区域容易产生阶梯效应. 图3~6为用不同算法仿真结果, 表1, 2为不同算法定量指标, 表3, 4为执行效率.

从 Pears 的局部放大图5(i)~(l)和边缘检测图5(e)~(h)对比可知, FISTA 算法和 ISGP 算法都在 Pears 表面产生虚假边缘, 说明有界变差函数作为正则项不利于平稳区域恢复, 而本文算法有效地抑制虚假边缘, 说明用复合平方根函数作为正则项更能体现图像的特征.

图6为 Eye 图像, 从图6(e)~(h)最右边的边缘对比可知, FISTA 算法在图像的边缘外侧和内侧产生一条很长的虚假边缘, 说明 FISTA 算法不利于恢复图像的平稳区域, 这是由于 FISTA 算法的逼近项与保真项不当所致. ISGP 算法在原始边缘的内侧产生一条虚假边缘, 说明 ISGP 算法的正则项不能准确反应图像的平稳区域. 而本文算法产生的边缘和平稳区域几乎与原始图像相吻合, 说明本文算法在保护图像细节信息的同时有利于恢复平稳区域.

3.2 真实 MRI 图像恢复实验

为进一步验证算法的有效性, 图7(a)为用 MAGNETOM Trio 系统获得 MRI 三维理想数据经投影后获得

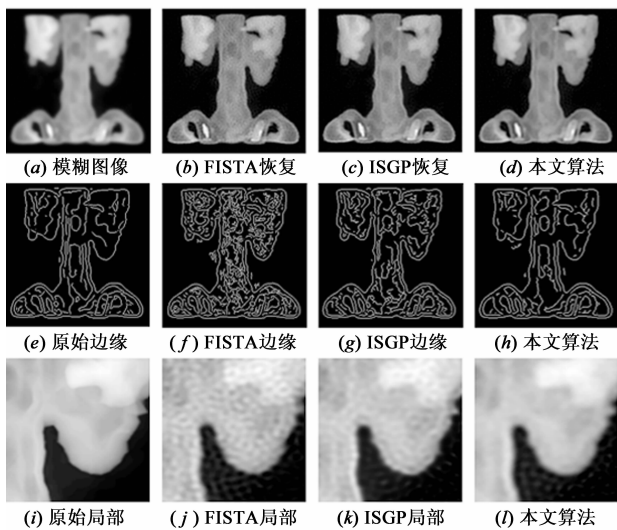


图3 Spine图像不同算法复原对比

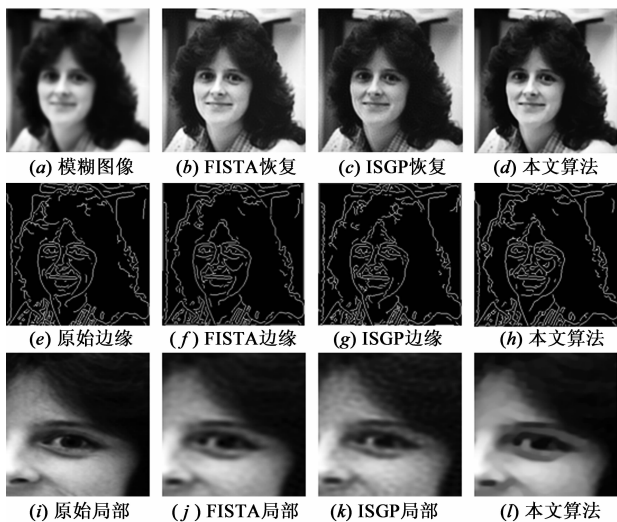


图4 Woman图像不同算法复原对比

的 MRI 图像,图 7(b)为 MRI 图像曲面.图 8 为用不同算法对 MRI 图像进行恢复.表 5 为不同算法重构 MRI 图像获得定量评价指标,表 6 为不同算法的执行效率.

从图 8(a)可知,图像比较模糊,从图 9(a)三维曲面可知,曲面比较光滑,造成图 8(a)脑组织结构不容易区分.用 FISTA 算法和 ISGP 算法恢复图像,产生边缘丢失现象,如图 8(b)和图 8(c)嘴巴的上方,而且还导致边缘误检,如 8(b)和图 8(c)的鼻腔,这是由于 FISTA 算法的逼近项和 ISGP 算法的正则项不当所致.从图 9(d)与图 7(b)对比可知,本文算法恢复图像的表面与理想图像的表面几乎吻合,说明本文算法恢复的图像接近理想图像.

3.3 图像恢复实验定量评价

为定量评价图像的恢复效果,采用平均绝对误差 MAE、峰值信噪比 PSNR 和相对误差 RE 三种指标^[14].

PSNR 数值越大,MAE 和 RE 数值越小,则图像恢复效果越好,反之,较差.

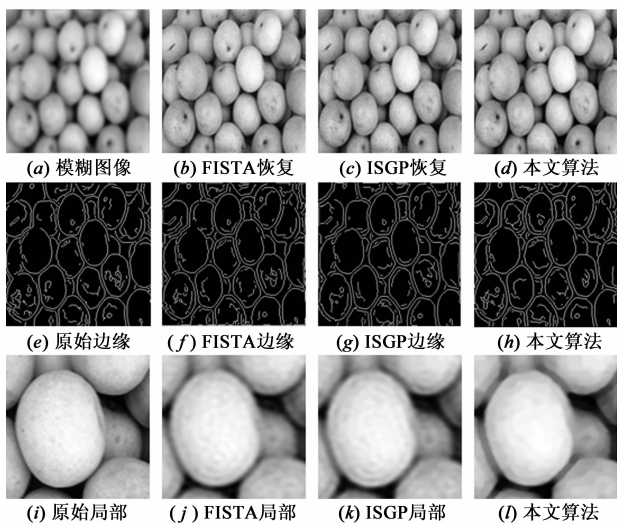


图5 Pears图像不同算法复原对比

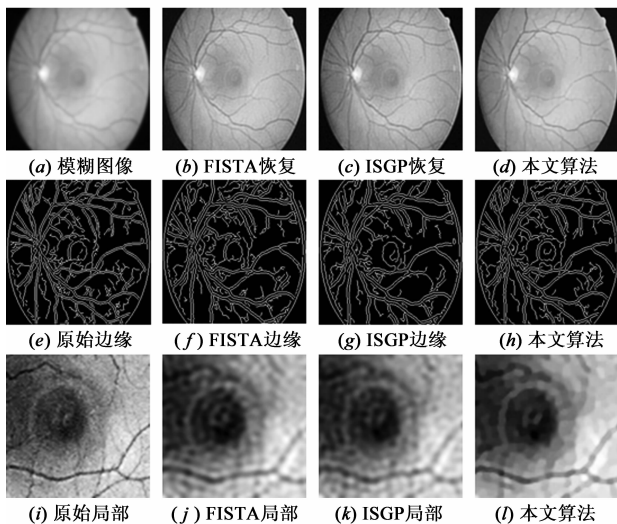
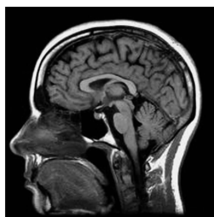
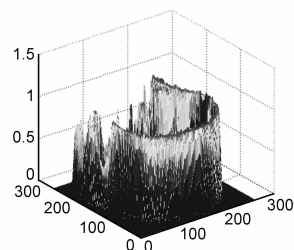


图6 Eye图像不同算法复原对比



(a) 理想图像



(b) 理想图像曲面

图7 理想图像和理想曲面

表 1 和表 2 中的第三列为模糊图像定量指标,第四列、第五列和第六列分别为用 FISTA 算法、ISGP 算法和本文算法获得的定量指标.由表 1 和表 2 可知,本文算法获得的 RE 和 MAE 数值最小,PSNR 最高,说明图像恢复

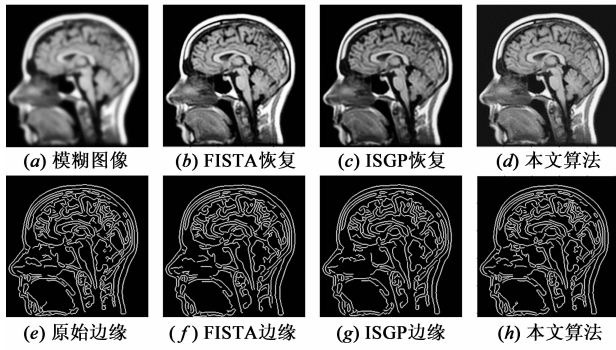


图8 Brain图像不同算法复原对比

整体效果较好,这与图像恢复视觉效果相吻合.对于由大块平稳区域组成的图像,本文算法能有效地抑制恢复过程产生的阶梯效应,如 Spine 图像;对于由较多细节组成的图像,如 Eye 图像,本文算法能有效地保护图像的边缘.

表 3 和表 4 分别对应表 1 和表 2,为不同算法对四幅图像恢复执行的时间.由表 3 可知,对于 256×256 的模糊图像,本文算法总体上执行效率高于 FISTA 算法,但对于 Spine 图像,本文算法的执行效率略低于 FISTA 算法,这是由于 Spine 图像主要由平滑区域组成,梯度退化严重造成的.对于 128×128 的模糊图像,由表 4 可知,本文算法的执行效率优于其它算法.

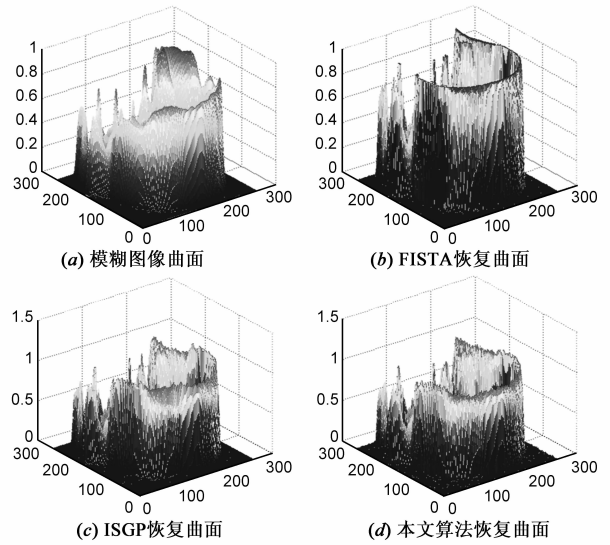


图9 Brain图像不同算法复原曲面对比

从表 5 可知,用本文算法的 PSNR 数值高于 FISTA 和 ISGP 算法,说明本文的算法能同时表征图像非平稳与平稳区域的特征.从表 6 可知,本文算法的执行效率优于其它两种算法.

概括来说,本文算法能有效地恢复由平稳与非平稳区域组成的图像,克服在平稳区域产生的阶梯效应,但是,对参数 β 和 ω 选取没有成熟的理论作指导,有待进一步研究.

表 1 不同恢复算法性能比较 (256×256)

原始图像	指标	模糊图像,图(a)	FISTA 算法,图(b)	ISGP 算法,图(c)	本文算法,图(d)
Spine	RE	1.096822e-001	6.269439e-002	5.561939e-002	5.537319e-002
	MAE	5.152978e-003	3.583251e-003	2.916055e-003	2.622704e-003
	PSNR	2.800272e+001	3.347082e+001	3.450521e+001	3.455941e+001
Woman	RE	8.141608e-002	4.337530e-002	4.411570e-002	3.385874e-002
	MAE	2.251072e-002	1.244560e-002	1.361843e-002	1.001345e-002
	PSNR	2.807959e+001	3.350415e+001	3.437088e+001	3.584024e+001
Pears	RE	6.881248e-002	4.003289e-002	4.151488e-002	3.618604e-002
	MAE	2.590700e-002	1.573616e-002	1.627043e-002	1.437035e-002
	PSNR	2.705758e+001	3.176446e+001	3.147015e+001	3.250390e+001
Eye	RE	7.391912e-002	5.305966e-002	5.301539e-002	4.779962e-002
	MAE	2.488828e-002	1.997103e-002	1.987081e-002	1.829160e-002
	PSNR	2.758433e+001	3.033452e+001	3.046935e+001	3.113018e+001

表 2 不同恢复算法性能比较 (128 × 128)

原始图像	指标	模糊图像,图(a)	FISTA 算法,图(b)	ISGP 算法,图(c)	本文算法,图(d)
Spine	RE	1.151137e-001	8.749910e-002	7.115908e-002	6.181855e-002
	MAE	5.639436e-003	5.085648e-003	3.949175e-003	3.080841e-003
	PSNR	2.771290e + 001	3.047273e + 001	3.256440e + 001	3.320672e + 001
Woman	RE	8.445651e-002	4.033775e-002	4.157535e-002	3.202544e-002
	MAE	2.367734e-002	1.329638e-002	1.403205e-002	1.056919e-002
	PSNR	2.794082e + 001	3.413979e + 001	3.461558e + 001	3.652200e + 001
Pears	RE	6.832837e-002	3.374670e-002	3.745934e-002	3.061050e-002
	MAE	2.589334e-002	1.433993e-002	1.636589e-002	1.259046e-002
	PSNR	2.704708e + 001	3.331548e + 001	3.244131e + 001	3.406964e + 001
Eye	RE	6.136251e-002	3.701983e-002	3.715966e-002	3.470719e-002
	MAE	1.944259e-002	1.467336e-002	1.490336e-002	1.329390e-002
	PSNR	2.912102e + 001	3.349406e + 001	3.354849e + 001	3.395265e + 001

表 3 不同算法执行时间对比 (256 × 256)

处理时间	Spine	Woman	Pears	Eye
FISTA 算法	48.126	47.890	47.400	47.148
ISGP 算法	56.885	55.709	54.710	53.276
本文算法	49.831	37.664	39.392	32.908

表 4 不同算法执行时间对比 (128 × 128)

处理时间	Spine	Woman	Pears	Eye
FISTA 算法	11.729	11.900	11.476	11.608
ISGP 算法	13.873	14.372	13.384	14.382
本文算法	10.652	7.098	6.897	6.525

表 5 不同恢复算法性能比较

brain 图像	指标	模糊图像,图(a)	FISTA 算法,图(b)	ISGP 算法,图(c)	本文算法,图(d)
256 × 256	RE	2.595861e-001	1.009464e-001	1.275203e-001	8.963052e-002
	MAE	5.378606e-002	2.075034e-002	2.552935e-002	2.063065e-002
	PSNR	2.133497e + 001	2.906273e + 001	2.868744e + 001	3.135890e + 001
128 × 128	RE	2.697832e-001	8.856192e-002	1.159481e-001	1.013726e-001
	MAE	5.622634e-002	1.870299e-002	2.328369e-002	2.307287e-002
	PSNR	2.096827e + 001	3.026199e + 001	2.935690e + 001	3.192266e + 001

表 6 不同算法执行时间对比

处理时间	FISTA 算法	ISGP 算法	本文算法
256 × 256	45.011	47.098	41.320
128 × 128	12.277	9.167	7.453

4 结论

本文提出一种改进的图像恢复正则化模型迭代算法,并用反证法证明收敛性.该算法在恢复图像平稳区域的同时保护图像的边缘,克服有界变差函数在平稳区域产生的阶梯效应.用 Kullback-Leibler 函数描述拟合项,用复合平方根函数描述正则项,将模型求解转化为具有非负条件约束的最优化问题.根据 KKT 条件,断定能量泛函模型的梯度可能退化,为解决此问题,根据退化的梯度引入指标集,构造可对角化海森矩阵.最后利

用四幅不同特性图像和 MRI 图像进行数值实验,结果表明,本文算法能明显提高图像恢复视觉效果,定量评价指标 RE 和 MAE 较小,PSNR 较大,算法的执行效率较高.

附录 式(39)证明

命题 1 若 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, 保真项与正则项都是 α 的单调函数,则有

$$(E_0(\mathbf{u}_{\alpha_1}) - E_0(\mathbf{u}_{\alpha_2})) (\alpha_1 - \alpha_2) \geq 0 \quad (A1)$$

$$(R(\mathbf{u}_{\alpha_1}) - R(\mathbf{u}_{\alpha_2})) (\alpha_1 - \alpha_2) \leq 0 \quad (A2)$$

证明 根据 \mathbf{u}_{α_1} 和 \mathbf{u}_{α_2} 使能量泛函最小化的特性,则

$$E_0(\mathbf{u}_{\alpha_1}) + \alpha_1 R(\mathbf{u}_{\alpha_1}) \leq E_0(\mathbf{u}_{\alpha_2}) + \alpha_1 R(\mathbf{u}_{\alpha_2}) \quad (A3)$$

$$E_0(\mathbf{u}_{\alpha_2}) + \alpha_2 R(\mathbf{u}_{\alpha_2}) \leq E_0(\mathbf{u}_{\alpha_1}) + \alpha_2 R(\mathbf{u}_{\alpha_1}) \quad (A4)$$

式(A3)与式(A4)相加,则有式(A1),分别对式(A3)除

以 α_1 和式(A4)除以 α_2 , 然后两式相加, 则有式(A2). 证毕.

定理 式(39)产生 $\{\alpha_\tau\}$ 是单调的, 即 $r(\alpha_0) > 0$, α_τ 单调增加; 反之, α_τ 单调减小.

证明 由式(39), 则有

$$\begin{aligned} \alpha_{\tau+1} - \alpha_\tau &= \frac{(\sigma-1)E_0(\mathbf{u}_{\alpha_\tau})}{R(\mathbf{u}_{\alpha_\tau})} - \frac{(\sigma-1)E_0(\mathbf{u}_{\alpha_{\tau-1}})}{R(\mathbf{u}_{\alpha_{\tau-1}})} \\ &= \frac{(\sigma-1)}{R(\mathbf{u}_{\alpha_\tau})R(\mathbf{u}_{\alpha_{\tau-1}})} [E_0(\mathbf{u}_{\alpha_\tau})(R(\mathbf{u}_{\alpha_{\tau-1}}) - R(\mathbf{u}_{\alpha_\tau})) \\ &\quad + (R(\mathbf{u}_{\alpha_\tau}) - R(\mathbf{u}_{\alpha_{\tau-1}}))R(\mathbf{u}_{\alpha_\tau})] \end{aligned} \quad (A5)$$

由命题 1 和式(A5)可知, 序列 $\alpha_{\tau+1} - \alpha_\tau$ 和 $\alpha_\tau - \alpha_{\tau-1}$ 具有相同的符号, 因此迭代产生的正则参数序列是单调的. 若式(37)的初始残差 $r(\alpha_0) < 0$, 即 $\alpha_1 = \frac{(\sigma-1)E_0(\mathbf{u}_{\alpha_0})}{R(\mathbf{u}_{\alpha_0})} < \alpha_0$; 反之, 若 $r(\alpha_0) > 0$, 则 $\alpha_1 > \alpha_0$. 证毕. 若 $r(\alpha_0) < 0$, 由式(A5)可知, 序列 $\{\alpha_\tau\}$ 是单调递减的, 且下有界, 因此是收敛的. 证毕.

参考文献

- [1] Vogel Curtis R. Computational Methods for Inverse Problems [M]. Philadelphia, Pennsylvania; Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. 1 - 183.
- [2] 唐利明, 黄大荣. 变分框架下的多尺度图像恢复与重建 [J]. 电子学报, 2013, 41(12): 2353 - 2360.
Tang Li-ming, Huang Da-rong. Multiscale image restoration and reconstruction in the framework of variation [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(12): 2353 - 2360. (in Chinese)
- [3] Aubert G, Kornprobst Pierre. Mathematical Problems in Image Processing, Partial Differential Equations and the Calculus of Variations [M]. New York, USA: Springer-Verlag, 2006. 1 - 371.
- [4] 童基均, 刘进, 蔡强. 基于全变差的加全最小二乘法 PET 图像重建 [J]. 电子学报, 2013, 41(4): 787 - 790.
Tong Ji Jun, Liu Jin, Cai Qiang. The PET image reconstruction based on weighted least squares and TV penalty [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(4): 787 - 790. (in Chinese)
- [5] Liu X W, Huang L H, Guo Z Y. Adaptive fourth-order partial differential equation filter for image denoising [J]. Applied Mathematics Letters, 2011, 24(8): 1282 - 1288.
- [6] Dykes L, Reichel L. Simplified GSVD computations for the solution of linear discrete ill-posed problems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 255(1): 15 - 27.
- [7] Beck Amir, Teboulle Marc. A fast dual proximal gradient algorithm for convex minimization and applications [J]. Operations Research Letters, 2014, 42(1): 1 - 6.

- [8] Duran Joan, Coll Bartomeu, Sbert Catalina. Chambolle's projection algorithm for total variation denoising [J]. Image Processing on Line, 2013, 2013(3): 301 - 321.
- [9] Dai Y H, Kou C X. A nonlinear conjugate gradient algorithm with an optimal property and an improved wolfe line search [J]. SIAM Journal on Optimization, 2013, 23(1): 296 - 320.
- [10] Sun Wenyu, Yuan Yaxiang. Optimization Theory and Methods Nonlinear Programming [M]. New York, USA: Springer Science Business Media, 2006, 1 - 687.
- [11] Bai zhengjian, Donatelli Marco, Capizzano Stefano Serra. Fast preconditioners for total variation deblurring with anti-reflective boundary conditions [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2011, 32(3): 785 - 805.
- [12] J. E. Dennis, Robert B. Schnabel. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations [M]. Philadelphia; SIAM, 1996. 1 - 378.
- [13] Beck Amir, Teboulle Marc. A fast iterative shrinkage-thresholding for linear inverse problems [J]. SIAM Journal on Imaging Science, 2009, 2(1): 183 - 202.
- [14] Landi G, Piccolomini E Loli. An efficient method for nonnegatively constrained total variation-based of medical images corrupted by poisson noise [J]. Computerized Medical Imaging and Graphics, 2012, 36(1): 38 - 46.
- [15] Lee Katrina Palmer, Nagy James G, Perrone Lisa. Iterative methods for image deblurring: a matlab object-oriented approach [J]. Numerical Algorithms, 2004, 36(1): 73 - 93.

作者简介



李旭超 男, 1974 年出生, 内蒙古赤峰市人, 现为赤峰学院计算机与信息工程学院教师. 研究方向为调和分析在信息处理中的应用.
E-mail: bsx7096@sohu.com



宋博 男, 1979 年出生, 江苏徐州市人, 现为江苏师范大学电气工程及自动化学院教师. 研究方向为随机控制理论、时滞系统在信息处理中的应用.