

基于校正子和猜测随机加性噪声的混合译码算法

石月壮^{1,2}, 孔令军³, 刘海洋^{1*}

(1. 中国科学院微电子研究所, 北京 100029; 2. 中国科学院大学, 北京 100049;
3. 金陵科技学院网络与通信工程学院, 江苏南京 211169)

摘要: 猜测随机加性噪声译码算法 (Guessing Random Additive Noise Decoding, GRAND) 是线性码的一类通用译码算法. 其中, ORBGRAND (Ordered Reliability Bits GRAND) 算法是一种软判决猜测随机加性噪声译码算法, 具有运算简单、易于实现等优点, 引发了广泛的研究和关注. 但是, 在限定查询次数的条件下, ORBGRAND 算法的译码性能与软判决最大似然译码有一定差距. 针对这一问题, 本文提出了一种基于校正子译码 (Syndrome Decoding, SD) 算法和 ORBGRAND 算法的混合译码算法. 该算法为 ORBGRAND 算法引入一种辅助度量, 将接收序列并行输入 SD 算法和 ORBGRAND 算法进行译码, 选择二者中与接收软判决序列具有最大相关值的码字估计作为译码输出. 仿真结果表明, 提出的混合译码算法在增加不多复杂度的条件下相对 ORBGRAND 算法能够获得译码性能改善, 并且随着信噪比的增加改善更明显. 此外, 提出的混合译码算法保持了 ORBGRAND 算法的通用性, 适合于各种类型的线性码译码.

关键词: 通用译码算法; 猜测随机加性噪声译码; 最大似然译码; 校正子译码; 混合译码; 相关

基金项目: 国家自然科学基金 (No.62271482)

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2025)07-2201-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20240981

Decoding Algorithm Combining Syndrome Decoding and Guessing Random Additive Noise Decoding

SHI Yue-zhuang^{1,2}, KONG Ling-jun³, LIU Hai-yang^{1*}

(1. Institute of Microelectronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

3. School of Networking and Communication Engineering, Jinling Institute of Technology, Nanjing, Jiangsu 211169, China)

Abstract: Guessing random additive noise decoding (GRAND) algorithms are a class of general decoding algorithms for linear codes. Among them, ORBGRAND (Ordered Reliability Bits GRAND) algorithm, a soft-decision GRAND algorithm that has attracted a lot of attention, is simple and easy to implement. However, there is a gap between the performance of ORBGRAND algorithm and soft-decision maximum likelihood decoding algorithm if the number of queries is limited. To tackle this problem, this paper proposes a hybrid decoding algorithm based on syndrome decoding (SD) algorithm and ORBGRAND algorithm. By introducing an assistant metric for ORBGRAND algorithm, the proposed algorithm performs SD algorithm and ORBGRAND algorithm in parallel for the received sequences and selects the codeword that has the maximum correlation value with the received soft-decision sequences as the decoding output. Simulation results indicate that the proposed hybrid decoding algorithm can outperform ORBGRAND algorithm at the expense of little complexity increase. As the signal-to-noise ratio increases, the performance improvement becomes more obvious. In addition, the proposed hybrid decoding algorithm maintains the generality of ORBGRAND algorithm and is suitable for decoding various types of linear codes.

Key words: general decoding algorithm; guessing random additive noise decoding (GRAND); maximum likelihood decoding; syndrome decoding; hybrid decoding algorithm; correlation

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.62271482)

1 引言

近年来,对高效可靠的数字通信和数据存储系统的需求日益增长.这种需求随着面向数字信息的交换、处理和存储的大规模高速数据网的出现而变得更迫切.超可靠低延迟通信(Ultra-Reliable Low Latency Communication, URLLC)作为第五代移动通信技术(5th Generation mobile communication technology, 5G)三大应用场景之一^[1],为可靠性和时延具有极高要求的应用场景提供服务.随着远程医疗、自动驾驶等新兴应用的发展,URLLC需要平衡超可靠和超低时延两个相互矛盾的需求,从而给URLLC的物理层设计带来了极大的挑战^[2,3].

为了缓解上述矛盾,URLLC的物理层编码通常采用短码长的码^[4,5],如何设计这些码的高效译码算法是学术界备受关注的研究问题.对于给定的线性码,最大似然(Maximum Likelihood, ML)译码具有理论上的性能最优保证,但是ML译码的复杂度在实际中通常不能被接受^[6].因此,学术界开始寻求易于实现的译码方法,使其实际性能接近最大似然译码的性能^[7].目前,学术界提出了多种近似ML译码算法,在信道噪声低的条件下可以接近ML译码算法的性能.这些译码算法可以分为两类:专用译码算法和通用译码算法.专用译码算法利用线性码的结构性质设计相应的译码方法,如BCH码的Berlekamp译码算法.但是,这类译码算法仅适用于特定的码.通用译码算法不依赖于码的结构进行设计,具有良好的通用性.其中,具有代表性的通用译码算法是分级统计译码(Ordered Statistic Decoding, OSD)算法^[8]及其改进方法^[9-11].这些方法需要对线性码的生成矩阵进行高斯消去操作后变成系统生成矩阵的形式,从而给硬件并行实现带来了很大困难^[12].

近年来,猜测随机加性噪声译码(Guessing Random Additive Noise Decoding, GRAND)算法^[13]引发了学术界的广泛关注.GRAND算法是一类通用译码算法,其以猜测接收序列中可能存在的噪声为基本思想,按照错误图样重量从低到高的顺序,依次查询接收序列消除所猜测的错误图样影响后的序列是否为码字进行译码.GRAND算法只需要位翻转和校正子校验运算,避免了高斯消去操作,相对于OSD算法的复杂度有所降低,更适用于短码长和高码率的线性码的译码.可以证明,在查询次数充分大的条件下,GRAND算法总能输出一个码字,并且是硬判决ML码字.但是,如果无限制地查询下去,GRAND算法的计算复杂度会随着码长增加呈指数增长^[14].为了降低GRAND算法的复杂度,通常需要限制最大查询次数,当查询次数到达限制时放弃译码.

对于线性码,如果在译码时可以获得信道软信息,

采用软判决译码算法相对于硬判决译码算法通常可以获得性能改善.SGRAND(Soft GRAND)算法利用每个比特的软判决信息确定硬判决错误图样查询顺序,其可以达到软判决ML译码的性能^[15].但是,SGRAND算法的复杂度过高,并且不适合硬件并行实现.为此,ORBGRAND(Ordered Reliability Bits GRAND)算法被提出.该算法利用接收序列的可靠性顺序^[16],以利于高效硬件实现的方式对软信息进行合并,在译码性能和复杂度之间获得了折中.但是,ORBGRAND算法与软判决ML译码算法之间存在一定的差距.

针对这一问题,本文对ORBGRAND译码失败的原因进行了分析,并根据分析结果提出了一种基于校正子译码(Syndrome Decoding, SD)算法和GRAND算法的混合译码算法——SD-GRAND算法.该混合译码算法通过SD算法的输出结果为ORBGRAND算法的输出结果提供一种辅助度量,优化了错误图样的选择策略,不仅有效减少了不可检测错误,还能在一定程度上减少可检测错误,提升译码性能.GRAND算法和SD算法均为通用译码算法,两者独立并行译码,保证了GRAND算法的通用性,适合于各种类型的线性码的译码.仿真结果表明,提出的混合译码算法在增加不高复杂度的条件下相对现有的改进GRAND算法能够获得更好的译码性能,并且性能改善随着信噪比的增加变得更为明显.

2 工作基础

2.1 线性码性质

假设 C 是 $[n, k, d]$ 二元线性分组码,其中 n 表示码长, k 表示维数, d 表示最小距离.码 C 的码率为 k/n .码 C 可以用一个维数为 $k \times n$ 的生成矩阵 G 定义.若 u 是待编码的 k 比特信息序列,则编码过程可以表示为 $c = u \cdot G$.码 C 也可以等价地用一个维数为 $(n-k) \times n$ 的校验矩阵 H 定义.对于码 C 中的任意码字 c ,等式

$$c \cdot H^T = \mathbf{0} \quad (1)$$

成立.其中, $\mathbf{0}$ 表示零向量,上标T表示转置.

假设码字 c 经过二进制相移键控(Binary Phase Shift Keying, BPSK)调制后,在加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN)信道下被发送,接收端接收到信道软信息向量 r ,对信道软信息进行硬判决得到二进制向量 y .向量 y 可以看作是码字 c 和信道干扰噪声引起的错误图样 e 叠加得到,即 $y = c \oplus e$,其中 \oplus 表示异或运算.译码器通过计算向量 y 的校正子,来查询向量 y 是否为码 C 中的码字.校正子计算公式如下:

$$s = y \cdot H^T \quad (2)$$

如果校正子 s 等于零向量,说明向量 y 是码 C 中的码字,退出译码.否则,译码器检测到向量 y 中包含错

误,需要对向量 \mathbf{y} 进行后续的译码. 需要说明的是, $\mathbf{s}=\mathbf{0}$ 仅说明向量 \mathbf{y} 是码 \mathbf{C} 的码字,但是其不一定是发送码字 \mathbf{c} ,也有可能是码 \mathbf{C} 中的另一个码字. 对于硬判决译码,接收端没有其他判断方法,所以当 $\mathbf{s}=\mathbf{0}$ 时停止译码.

若 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$,则可以利用校正子 \mathbf{s} 与错误图样 \mathbf{e} 的对应关系建立查找表进行译码. 在译码时,将计算得到的校正子在查找表中进行对比,找到其对应的错误图样,进行纠错. 假设校验矩阵 $\mathbf{H}=[\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n]$,其中 \mathbf{h}_i 表示 \mathbf{H} 矩阵的第 i 列. 假定 $\mathbf{e}=(e_1, e_2, \dots, e_n)$,其中

$$e_i = \begin{cases} 1, & i=i_1, i_2, \dots, i_l \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

则 $\mathbf{s}=\mathbf{h}_{i_1}^T + \mathbf{h}_{i_2}^T + \dots + \mathbf{h}_{i_l}^T$.

根据线性分组码的性质可知,若向量 \mathbf{y} 中包含的错误数量不超过线性分组码 \mathbf{C} 的纠错能力 t ,则校正子与错误图样的对应关系具有唯一性. 纠错能力 t 的计算公式为

$$t = \lfloor (d-1)/2 \rfloor \quad (4)$$

其中, d 为码 \mathbf{C} 的最小距离, $\lfloor x \rfloor$ 表示对 x 向下取整. 对于纠错能力为 t 的线性码,如果要纠正能力范围内的所有错误,需要存储

$$S_{n,t} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{t} \quad (5)$$

组校正子及其对应的错误图样. 为了便于后续描述,将上述利用校正子查表求错误图样进行译码的方法称为 SD 算法,其步骤如算法 1 所示.

算法 1 SD 算法

输入: \mathbf{y} , 校验矩阵 \mathbf{H} , 错误图样集合 E

输出: 码字估计 $\hat{\mathbf{c}}$

1. 根据式(2)计算校正子
2. IF $\mathbf{s}=\mathbf{0}$ THEN
3. RETURN $\hat{\mathbf{c}}=\mathbf{y}$
4. ELSE
5. 在错误图样集合 E 中查找与 \mathbf{s} 对应的错误图样 \mathbf{e}
6. IF 找到对应的 \mathbf{e}
7. RETURN $\hat{\mathbf{c}}=\mathbf{y} \oplus \mathbf{e}$
8. ELSE
9. RETURN $\hat{\mathbf{c}}=\mathbf{y}$
10. END IF
11. END IF

SD 译码是一种通用译码方法,适用于任意线性分组码(特别是短码)的硬判决译码,具有结构简单、易于实现的优点,对于一些具有良好代数结构的码(例如 BCH 码),可以简化存储表,进一步缩小查找表的存储空间^[17,18].

2.2 猜测随机加性噪声译码算法

GRAND 算法是一种硬判决译码算法,通过猜测经

有噪声信道传输码字 \mathbf{c} 时的干扰噪声的错误图样来进行译码. 该算法将测试错误图样按照汉明重量增序的顺序进行排列,首先查询汉明重量为 1 的测试错误图样. 当一个测试错误向量 \mathbf{e} 被生成后,将其与 \mathbf{y} 进行求和,即 $\mathbf{y} \oplus \mathbf{e}$. 然后,计算其校正子 $\mathbf{s}=(\mathbf{y} \oplus \mathbf{e}) \cdot \mathbf{H}^T$ 来查询 $\mathbf{y} \oplus \mathbf{e}$ 是否为码 \mathbf{C} 中的码字. 如果 $\mathbf{s}=\mathbf{0}$,退出译码,否则继续查询下一个测试错误图样,直到查询通过,找到一个码字.

若 GRAND 算法没有限制测试错误图样的最大查询次数,最终返回的结果一定是码 \mathbf{C} 中的某一码字. 为了降低 GRAND 算法的复杂度,通常需要设置最大查询次数,当查询次数到达设置的最大值时放弃译码.

对于线性码,利用了信道软信息的软判决译码算法相对于硬判决译码算法通常可以获得性能改善. SGRAND 算法利用每个比特的软判决信息确定硬判决错误图样查询顺序,其可以达到软判决 ML 译码的性能. 但是,SGRAND 算法的复杂度过高,并且不适合硬件实现. 为此,基于可靠性的 ORBGRAND 算法被提出. ORBGRAND 算法将每个比特的软判决信息作为比特的可靠度,按照可靠度增序对接收序列重新排列,记录每比特索引值的变化,得到索引置换 π . 然后,对于排序后的比特索引计算错误图样的逻辑权重(Logistic Weight, LW),将测试错误图样按照 LW 增序排列,依序对测试错误图样进行查询.

假定错误向量 $\mathbf{e}=(e_1, e_2, \dots, e_n)$,其 LW 计算公式为^[16]

$$LW(\mathbf{e}) = \sum_{i=1}^n i \cdot e_i \quad (6)$$

其中, e_i 表示测试错误图样 \mathbf{e} 的第 i 个比特. 具有相同 LW 的不同测试错误图样可以以任意顺序排列.

生成测试错误图样可以使用整数拆分算法实现. 将 LW 拆分成不同的整数对,每一个整数对都可以表示为测试错误图样非零元素的索引值,以此来生成测试错误图样,并将其加入测试错误图样集合 E . 预先设置最大查询次数 $Q_{\max}=|E|$,其中 $|E|$ 表示集合 E 中测试错误图样的个数. LW 生成的测试错误图样与排序后的接收序列硬判决向量进行运算后进行查询,对应的校正子计算公式为

$$\mathbf{s} = (\mathbf{y} \oplus \pi^{-1}(\mathbf{e})) \cdot \mathbf{H}^T \quad (7)$$

其中, π^{-1} 为置换 π 的逆置换. 若式(7)等于零向量,接收序列与该测试错误图样的求和是码 \mathbf{C} 中的码字,查询通过,译码结束并输出该码字. 否则,继续查询下一个测试错误图样,直到完成查询集合 E 中所有的测试图样. ORBGRAND 算法的具体步骤如算法 2 所示.

算法2 ORBGRAND算法

输入: 信道软信息 r , 校验矩阵 H , 测试错误图样集合 E

输出: 码字估计 \hat{c}

1. 计算硬判决接收向量 y
2. IF $y \cdot H^T = \mathbf{0}$ THEN
3. RETURN $\hat{c} = y$
4. ELSE
5. 按照接收序列可靠度排序, 得到索引置换 π
6. FOR E 中所有测试错误图样 e DO
7. IF $(y \oplus \pi^{-1}(e)) \cdot H^T = \mathbf{0}$ THEN
8. RETURN $\hat{c} = y \oplus \pi^{-1}(e)$
9. ENDIF
10. ENDFOR
11. RETURN $\hat{c} = y$
12. ENDIF

3 一种改进的译码算法

3.1 ORBGRAND 译码失败分析

对于线性码, 译码错误类型分为两种: 可检测错误和不可检测错误. 对于 ORBGRAND 算法, 当测试错误图样集合中的测试错误图样全部查询完但仍未查询通

过时, 说明测试错误图样集合中不包含能够使查询通过的测试错误图样, 出现可检测错误. ORBGRAND 算法按照测试错误图样的逻辑权重从小到大的顺序依次进行查询, 这种查询方法会导致出现不可检测错误.

假设存在两个测试错误图样 e_1 和 e_2 均可使查询通过, e_1 使得译码结果为码 C 的另一个码字, e_2 使得译码结果为发送的码字, 但是 $LW(e_1) < LW(e_2)$. 当查询到 e_1 时, 查询通过退出译码, 将接收序列译为码 C 的另一个码字, 译码失败.

表1统计了[127, 113, 5]BCH码在不同信噪比下采用ORBGRAND算法的错误类型. 从表1可以看出, 译码失败时发生不可检测错误的比例高于可检测错误的比例, 并且该比例受测试错误图样数量和信噪比等因素的影响. 当测试错误图样数量增大时, 不可检测错误的比例增加. 例如, 当信噪比为5 dB时, 测试错误图样数量为 2^{13} 和 2^{15} 时, 不可检测错误的比例分别为 $3\ 329/5\ 536 \approx 60.1\%$ 和 $4\ 413/4\ 581 \approx 96.3\%$. 同样, 随着信噪比增加, 不可检测错误的比例也会增加. 因此, 降低不可检测错误的数量是改善ORBGRAND算法性能的一种有效手段.

表1 [127, 113, 5]BCH码在不同信噪比下ORBGRAND算法错误类型

信噪比	总帧数	测试错误图样数量	译码失败数	不可检测错误			可检测错误		
				总数	错误图样汉明重量>2	错误图样汉明重量≤2	总数	错误图样汉明重量>2	错误图样汉明重量≤2
4 dB	10^5	2^{13}	7 335	3 776	3 290	486	3 559	3 147	412
		2^{15}	6 134	5 809	5 120	707	325	292	33
5 dB	10^6	2^{13}	5 536	3 329	2 156	1 173	2 207	1 385	822
		2^{15}	4 581	4 413	2 810	1 603	168	102	66
6 dB	10^7	2^{13}	2 318	1 462	418	1 044	856	179	677
		2^{15}	1 912	1 854	485	1 369	58	10	48

目前, 学术界提出了几种改进ORBGRAND算法. 这些算法可以分为两大类. 第一类方法是将列表译码的思想引入ORBGRAND算法中^[19], 在第一次查询通过时不停止译码, 继续向后试探查询, 将所有通过查询得到的码字都存储在列表中, 最后选择相关值最大的码字作为译码器的输出. 但是, 这类算法对于第一次查询就译码成功的情形增加了很大的译码时延. 第二类方法通过改进逻辑权重的计算方法进而改变测试错误图样的排序来减少译码错误^[20, 21]. 但是, 这类方法没有很好地在线生成测试错误图样的方法, 只能通过离线生成测试错误图样, 需要较大的存储资源.

3.2 混合译码算法

对于表1中的BCH码, 其纠错能力 $t = \lfloor (d-1)/2 \rfloor = 2$. 通过进一步分析表1中的数据可知, 当译码失败时, 一部分错误图样的汉明重量并未超过其纠错能力, 并且随着信噪比的增加, 汉明重量并未超过其纠错能

力的错误图样的数量占译码失败总数的比重逐渐增大. 例如, 当测试错误图样数量为 2^{15} 时, 信噪比为5 dB和6 dB时, 错误图样的汉明重量≤2的比例分别为 $(1\ 603+66)/4\ 581 \approx 36.4\%$ 和 $(1\ 369+48)/1\ 912 \approx 74.1\%$. 这说明ORBGRAND算法并不能保证能够纠正线性码纠错能力范围内的所有错误. 如果这些错误被纠正, 则ORBGRAND算法的译码性能可以得到很大的改善.

由2.1节可知, SD算法也是通过校正子查询错误图样进行译码, 其能够保证纠正线性码纠错能力范围内的所有错误, 并且具有结构简单、易于并行实现的特点. 因此, 本文提出一种将SD算法引入ORBGRAND算法的混合译码算法来改善ORBGRAND算法的性能. 为了避免串行结构带来的时延, 本文将SD算法与ORBGRAND算法进行并行译码. 两个译码算法各输出一个码字估计向量和一个查询通过标志位. 假设ORBGRAND算法的查询通过标志位为flag1, SD算法的

查询通过标志位为 flag2, 如果译码算法查询通过, 那么对应的标志位置 1, 否则置 0. 下面分两种情况进行讨论.

情况 1: flag2=0

在此情况下, 接收序列 \mathbf{y} 中的错误数目超过了码 \mathbf{C} 的纠错能力, SD 算法查询未得到码 \mathbf{C} 中的码字. 因此, 无论 ORBGRAND 算法是否查询通过, 混合算法最终输出结果都是 ORBGRAND 算法的输出结果.

情况 2: flag2=1

在此情况下, SD 算法查询得到码 \mathbf{C} 中的码字, 根据 flag1 的值可以分为两种子情况.

(1) flag1=0

此时, ORBGRAND 算法出现可检测错误, 未能输出码 \mathbf{C} 中的码字, 混合算法最终输出结果为 SD 算法的输出结果.

(2) flag1=1

此时, SD 算法和 ORBGRAND 算法均得到码 \mathbf{C} 中的码字. 为了选择两个码字中更可靠的码字作为输出, 分别计算两个码字与信道软信息相关值, 选择相关值大的码字作为混合算法的输出 (如果两个码字相关值相同, 混合算法最终输出结果为 ORBGRAND 算法的输出结果). 假设 ORBGRAND 算法输出的码字经过调制后的信息序列为 $\mathbf{z}^{(1)}$, SD 算法输出的码字经过调制后的信息序列为 $\mathbf{z}^{(2)}$, 那么相关值的计算公式如下:

$$m(\mathbf{r}, \mathbf{z}^{(l)}) = \sum_{i=1}^n r_i \cdot z_i^{(l)} \quad (8)$$

其中, r_i 表示软信息向量 \mathbf{r} 第 i 个软信息值, $l=1, 2$.

可以看出, 对于情况 2, 提出的混合译码算法相对于 ORBGRAND 算法可以获得改善. 当 ORBGRAND 算法译码失败时, SD 算法可以提供一个码 \mathbf{C} 中的码字, 在一定程度上降低可检测错误, 当 ORBGRAND 算法译码成功时, 可以利用 SD 算法的结果为 ORBGRAND 算法的输出设计相关值辅助度量, 使估计结果更加准确, 在一定程度上降低不可检测错误的出现率.

本文将提出的基于 SD 算法和 ORBGRAND 算法的混合译码算法称为 SD-GRAND 算法, 其流程如图 1 所示.

3.3 复杂度分析

由 2.2 节和 3.1 节的分析可知, 测试错误图样的生成是 ORBGRAND 算法的核心步骤. 目前, ORBGRAND 算法的实现有两种方式: 一种是在线生成测试错误图样^[22], 另一种是离线生成测试错误图样^[21]. 本文提出的 SD-GRAND 译码结构在原有的 ORBGRAND 译码结构上增加了一个 SD 译码单元. 不论原有的 ORBGRAND 算法采用何种方式实现, SD 译码单元均能适用其结构. 下面分析提出的 SD-GRAND 算法相对于 ORBGRAND 算法增加的存储量和运算量.

在存储量方面, SD-GRAND 算法增加了一个 SD 译

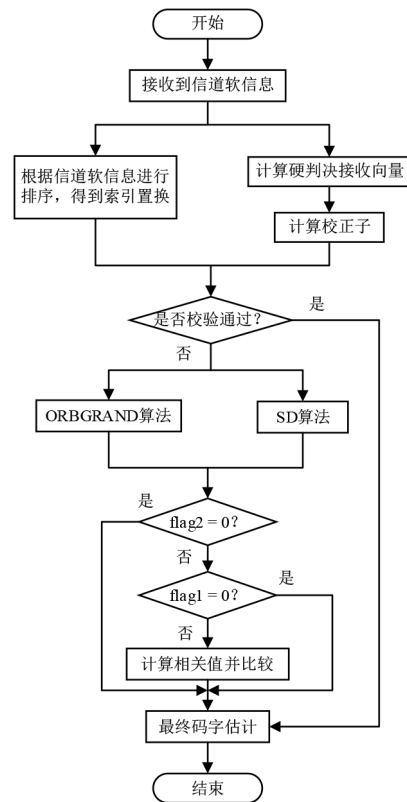


图 1 SD-GRAND 算法流程图

码单元. SD 译码单元将错误图样与其对应的校正子存储为一张表. 为了进一步缩小存储空间, 可以采用错误图样非零元素索引来表示该错误图样. 因此, 每个校正子占 $n-k$ 比特, 每个错误图样占 $t \times \lceil \log_2^n \rceil$ 比特, 符号 $\lceil x \rceil$ 表示对 x 向上取整. SD 译码的表的大小为 $S_{n,t} \times (n-k+t) \lceil \log_2^n \rceil$ 比特, 其中 $S_{n,t}$ 由式 (5) 给出. 需要说明的是, 对于一些具有良好代数结构的码 (如 BCH 码), 可以简化存储表, 进一步节约存储空间.

在运算量方面, SD-GRAND 算法在最坏情况下相对于 ORBGRAND 算法增加了 $S_{n,t}$ 次查询. 其中, 最坏情况下的查询次数是指译码算法在译码时遍历了整个测试错误图样集合的查询总数, 即从测试错误图样集合中的第一个测试错误图样查询到最后一个错误图样的查询次数. 最坏情况下的查询次数直接决定了算法译码延迟的上限. 对于 ORBGRAND 算法, 最坏情况下的查询次数等于其最大查询次数. 此外, SD-GRAND 算法还增加了 2 次判断、2 次相关运算和 1 次实数比较运算, 其中每次相关值的计算包含 n 次乘法操作和 $n-1$ 次加法操作.

可以看出, 提出的 SD-GRAND 算法相对于 ORBGRAND 算法增加的存储量和运算量与码的具体参数有关. 下一节的仿真分析给出了在最坏情况下提出的 SD-GRAND 算法与其他 ORBGRAND 类算法查询

次数的数值比较及性能分析.可以看出,在同等查询次数的情况下,SD-GRAND算法的性能优于其他ORBGRAND类算法.

4 仿真分析

为了验证提出的SD-GRAND混合译码算法的性能,采用4组线性码进行仿真.码1为上述提到的[127, 113, 5] BCH码,码2为[127, 106, 7] BCH码,码3为[120, 96, 6]循环冗余校验(Cyclic Redundancy Check, CRC)码,码4为[121, 90, 6]低密度奇偶校验(Low-Density Parity-Check, LDPC)码,其校验矩阵采用文献[23]中给出的方法构造.调制方式为BPSK调制,信道模型为AWGN信道.提出的SD-GRAND算法的两个参数分别为 Q_{\max} 和 t ,其中 Q_{\max} 为提出算法中ORBGRAND算法的最大查询次数, t 表示提出算法中SD算法的纠错能力.

图2给出了码1采用不同译码算法的误块率(BLOCK Error Rate, BLER)性能.表2对比了码1采用不同译码算法在最坏情况下的查询次数.为了进行比较,同时仿真了SGRAND、ORBGRAND译码算法、Chase译码算法、文献[19]给出的LGRAND译码算法和文献[21]中给出的LA-iLW GRAND译码算法.其中,SGRAND算法的最大查询次数 Q_{\max} 设置为 2^{14} .在此参数下,SGRAND算法在仿真信噪比区域内达到了该BCH码的ML性能.Chase译码算法采用了有32个错误图样的II型Chase译码算法^[24],其通常被作为BCH码的一种高性能译码算法.为了便于描述,后续将其称为CHASE32算法.LGRAND译码算法属于3.1节中提到的第一类ORBGRAND改进方法.LA-iLW GRAND算法属于3.1节中提到的第二类ORBGRAND改进方法,其测试错误图样排序方式是在经过大量的实验后,统计出现次数最多的前 Q_{LUT} 个测试错误图样,将其存储下来.译码时优先查询这 Q_{LUT} 个测试错误图样,剩下的测试错误图样按照文献[20]中给出的iLW重量顺序查询,为了便于描述,后续将其称为LA-iLW算法.

表2 [127, 113, 5]BCH码采用不同译码算法在最坏情况下的查询次数

译码算法	List-GRAND	ORBGRAND		CHASE32	LA-iLW	SD-GRAND
主要参数	$LW_{\max}=64, HW_{\max}=6,$ $\delta=15$	$Q_{\max}=2^{13}$	$Q_{\max}=2^{14}$	$Q_{\max}=2^5,$ 32次SD	$Q_{\text{LUT}}=512$ $Q_{\max}=2^{13}$	$Q_{\max}=2^{13},$ 1次SD
查询次数	116 319	8 192	16 384	260 128	8 192	16 320

图3给出了码1和码2采用不同译码算法的误块率性能,表3给出了码1和码2采用不同译码算法在最坏情况下的查询次数.码2的纠错能力 $t=3$.从图3中可以看出,对于ORBGRAND算法,采用参数 $Q_{\max}=2^{13}$ 时,译码性能随着码率的降低变得更差.对于SD-GRAND算

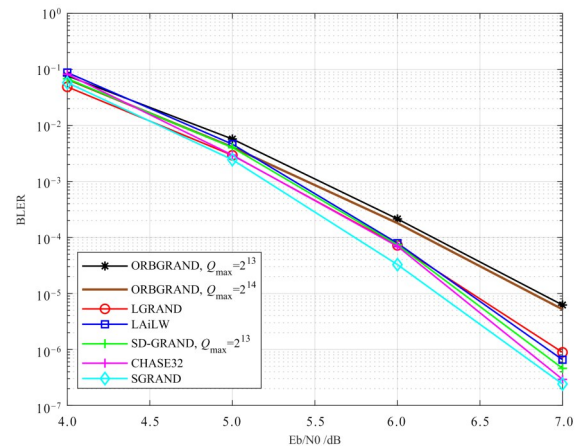


图2 [127, 113, 5]BCH码误块率性能

从图2中可以看出,CHASE32算法和SD-GRAND算法的误块率性能曲线十分接近,但是CHASE32算法需要32次SD译码,SD-GRAND算法只需要1次SD译码,在最坏情况下CHASE32算法的查询次数约是SD-GRAND算法查询次数的16倍.将LA-iLW算法和SD-GRAND算法的最大查询次数 Q_{\max} 均设置为 2^{13} ,其中LA-iLW算法的 Q_{LUT} 取值为512.从图2中可以看出,SD-GRAND算法在仿真信噪比区域内译码性能均优于LA-iLW算法.虽然在最坏情况下SD-GRAND算法的查询次数是LA-iLW算法的2倍,但是LA-iLW算法需要预先进行大量统计实验,并且需要对信噪比进行估计,这在实际中是难以实现的.在最坏情况下,SD-GRAND算法和参数 $Q_{\max}=2^{14}$ 时的ORBGRAND算法有着相近的查询次数,SD-GRAND算法的性能在仿真信噪比区域内译码性能均优于 $Q_{\max}=2^{14}$ 的ORBGRAND算法,并且在误块率为 10^{-6} 时,取得了大约0.5 dB的性能增益.LGRAND算法的主要参数采用 $LW_{\max}=64, HW_{\max}=6, \delta=15$.从图2中可以看出,SD-GRAND算法的译码性能非常接近LGRAND算法.随着信噪比的增加,SD-GRAND算法的性能优于LGRAND算法.在最坏情况下,LGRAND算法的查询次数约是SD-GRAND算法查询次数的7倍.

法,采用参数 $Q_{\max}=2^{13}$ 时,译码性能随着码率的降低变得更好.这是因为随着码率的降低,码的纠错能力增加,采用SD算法更有利于改善ORBGRAND算法的性能.但是,随着码纠错能力的变大,需要的存储量和运算量也会增加.从表3中可以看出,在最坏情况下 $t=3$

时 SD-GRAND 算法的查询次数约是 $t=2$ 时查询次数的 42 倍.

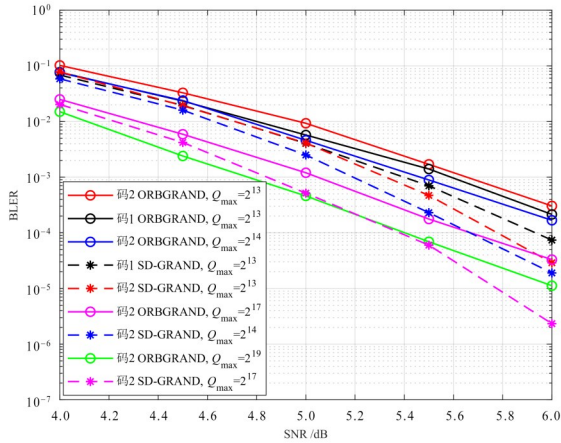


图3 [127,106,7]BCH 码和[127,113,5]BCH 码误块率性能

从图 3 中还可以看出,当信噪比增加时,码 2 采用参数 $Q_{max}=2^{13}$ 的 SD-GRAND 算法的性能优于参数 $Q_{max}=2^{17}$ 的 ORBGRAND 算法的性能. 这是因为随着信噪比的增加,低重量的错误图样的比例增加,而 SD-GRAND 算法的性能获得了更大改善. 但是,从表 3 中可以看

表 3 [127, 106, 7]BCH 码和[127, 113, 5]BCH 码采用不同译码算法在最坏情况下的查询次数

译码算法	[127,113,5]BCH 码		[127,106,7]BCH 码					
	ORBGRAND	SD-GRAND	ORBGRAND			SD-GRAND		
主要参数	$Q_{max}=2^{13}$	$Q_{max}=2^{13}$, 1 次 SD	$Q_{max}=2^{13}$	$Q_{max}=2^{14}$	$Q_{max}=2^{17}$	$Q_{max}=2^{19}$	$Q_{max}=2^{13}$, 1 次 SD	$Q_{max}=2^{17}$, 1 次 SD
查询次数	8 192	16 320	8 192	16 384	131 072	524 288	349 695	472 575

表 4 [127, 106, 7]BCH 码在不同最大查询次数下的 ORBGRAND 算法译码错误类型

信噪比	最大查询次数	总帧数	译码错误数	不可检测错误数
5 dB	2^{13}	10^6	8 497	26(0.3%)
	2^{15}	10^6	3 126	74(2.37%)
	2^{17}	10^6	1 093	120(10.9%)
	2^{19}	10^6	437	206(47.1%)

从表 1~表 4 以及图 2 和图 3 中可以看出,当译码错误类型中可检测错误占多数时,增大 ORBGRAND 算法的最大查询次数比采用 SD-GRAND 算法更有优势. 但是,当译码错误类型中可检测错误数量与不可检测错误数量接近时,在同等查询次数条件下,采用 SD-GRAND 算法比增大 ORBGRAND 算法的最大查询次数更有优势.

图 4 给出了码 3 的误块率性能曲线. 码 3 是一组 CRC 码,其传统应用是作为通信和存储领域中的错误检测. GRAND 算法为 CRC 码用于纠错提供了一种可行方案^[25]. 码 3 的纠错能力 $t=2$. 从图 4 中可以看出,参数

出,在最坏情况下 $Q_{max}=2^{13}$ 时的 SD-GRAND 算法的查询次数约是 $Q_{max}=2^{17}$ 时 ORBGRAND 算法查询次数的 3.6 倍.

表 4 统计了码 2 在不同最大查询次数下采用 ORBGRAND 算法的错误类型. 从表 4 中可以看出,码 2 采用参数 $Q_{max}=2^{13}$ 的 ORBGRAND 译码时,错误类型主要为可检测错误,不可检测错误较少. SD 算法主要是作为一种辅助度量来减少可检测错误,虽然在一定程度上也能减少不可检测错误,但不如直接增大 ORBGRAND 算法 Q_{max} 数值改善性能更明显. 随着 ORBGRAND 算法 Q_{max} 的增加,不可检测错误数在总译码错误数中所占比重逐渐增加,SD 算法逐渐开始发挥其主要作用.

从图 3 中可以看出,码 2 在低信噪比下采用参数 $Q_{max}=2^{17}$ 的 SD-GRAND 算法取得了接近采用参数 $Q_{max}=2^{19}$ 的 ORBGRAND 算法的性能,随着信噪比增加,采用参数 $Q_{max}=2^{17}$ 的 SD-GRAND 算法取得了优于采用参数 $Q_{max}=2^{19}$ 的 ORBGRAND 算法的性能,并且在最坏情况下采用参数 $Q_{max}=2^{17}$ 的 SD-GRAND 算法的查询次数也要少于采用参数 $Q_{max}=2^{19}$ 的 ORBGRAND 算法的查询次数.

$Q_{max}=2^{13}$ 的 SD-GRAND 算法的译码性能随着信噪比的增加逐渐超过参数 $Q_{max}=2^{14}$ 的 ORBGRAND 算法. 表 5 给出了码 3 采用不同译码算法在最坏情况下的查询次数. 从表 5 中可以看出,在最坏情况下参数 $Q_{max}=2^{13}$ 的 SD-GRAND 算法的查询次数少于参数 $Q_{max}=2^{14}$ 的 ORBGRAND 算法.

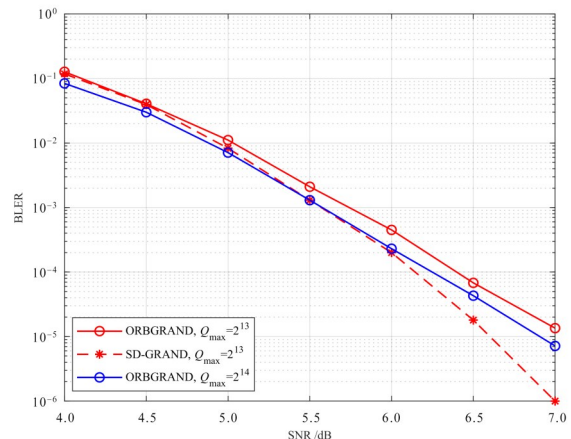


图 4 [120,96,6]CRC 码误块率性能

表5 [120,96,6]CRC码采用不同译码算法在最坏情况下的查询次数

译码算法	ORBGRAND		SD-GRAND
主要参数	$Q_{\max}=2^{13}$	$Q_{\max}=2^{14}$	$Q_{\max}=2^{13}$, 1次SD
查询次数	8 192	16 384	15 452

码4是一组准循环LDPC码.这类LDPC码具有良好的结构特性,适合应用于通信和数据存储系统,其构造方法引起了学术界的广泛关注^[26].为了进行比较,同时仿真了该LDPC码采用最小和译码算法(Min-Sum Algorithm, MSA)^[23]在不同最大迭代次数下的性能.

图5给出了码4的误块率性能曲线.从图5中可以看出,码4采用参数 $Q_{\max}=2^{20}$ 的ORBGRAND算法的性能接近采用最大迭代次数为15次的MSA算法的性能.随着信噪比的增加,采用参数 $Q_{\max}=2^{20}$ 的SD-GRAND算法的性能接近采用最大迭代次数为25次的MSA算法的性能.

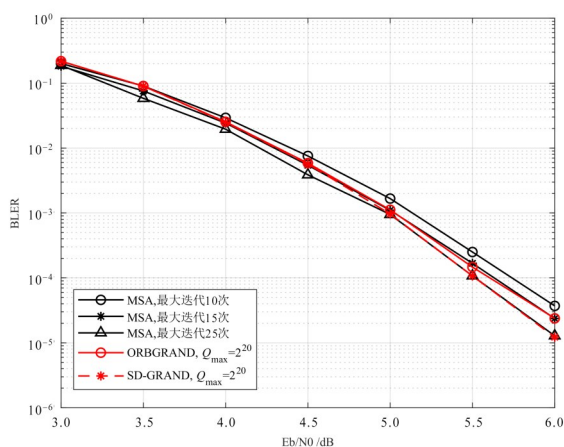


图5 [121,90,6]LDPC码误块率性能

5 结论

针对在限定查询次数下ORBGRAND译码性能与软判决最大似然译码存在一定差距这一问题,本文通过对ORBGRAND译码错误类型的分析,提出了一种基于SD算法和ORBGRAND算法的混合译码算法SD-GRAND算法.该混合译码算法结合SD算法和ORBGRAND算法,利用并行处理结构提高译码性能的同时控制复杂度的增加.通过SD算法的输出结果为ORBGRAND算法的输出结果提供一种辅助度量,优化了错误图样的选择策略,有效减少了不可检测错误,进一步提升了译码的准确性,还在一定程度上减少了可检测错误.GRAND算法和SD算法均为通用译码器,两者独立并行译码,保证了GRAND算法的通用性,适合于各种类型的线性码的译码.仿真实验结果表明,提出的混合译码算法在增加不高复杂度的条件下相对现有的改进ORBGRAND算法能够获得更好的译码性能,并且性能改善随着信噪比的增加变得更明显.SD算法和

ORBGRAND算法通常适合用于高码率码的译码,因此本文提出的SD-GRAND算法也更适合高码率的译码.

本文的后续研究工作主要在下述两方面:一是在低信噪比条件下,错误图样的汉明重量通常较高,SD算法译码失败的概率增加,进而导致提出的SD-GRAND算法的性能优势减弱.针对低信噪比条件下改善GRAND算法的性能是一个值得进一步研究的问题.二是对于实际应用场景,若采用的编码方案支持多种码长和码率,如何利用编码方案之间的兼容关系设计提出SD-GRAND算法的高效查找表也是一个值得进一步研究的问题.

参考文献

- [1] POPOVSKI P, TRILLINGSGAARD K F, SIMEONE O, et al. 5G wireless network slicing for eMBB, URLLC, and mMTC: A communication-theoretic view[J]. IEEE Access, 2018, 6: 55765-55779.
- [2] SYBIS M, WESOLOWSKI K, JAYASINGHE K, et al. Channel coding for ultra-reliable low-latency communication in 5G systems[C]//2016 IEEE 84th Vehicular Technology Conference. Piscataway: IEEE, 2016: 1-5.
- [3] CHEN H, ABBAS R, CHENG P, et al. Ultra-reliable low latency cellular networks: Use cases, challenges and approaches[J]. IEEE Communications Magazine, 2018, 56(12): 119-125.
- [4] DURISI G, KOCH T, POPOVSKI P. Toward massive, ultra-reliable, and low-latency wireless communication with short packets[J]. Proceedings of the IEEE, 2016, 104(9): 1711-1726.
- [5] SHIRVANIMOGHADDAM M, MOHAMMADI M S, ABBAS R, et al. Short block-length codes for ultra-reliable low latency communications[J]. IEEE Communications Magazine, 2019, 57(2): 130-137.
- [6] BERLEKAMP E, MCELIECE R, VAN TILBORG H. On the inherent intractability of certain coding problems (Corresp.)[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1978, 24(3): 384-386.
- [7] 林舒, 科斯特洛. 差错控制编码(原书第二版)[M]. 晏坚, 何元智, 潘亚汉, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2007.
- [8] FOSSORIER M P C, LIN S. Soft-decision decoding of linear block codes based on ordered statistics[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 41(5): 1379-1396.
- [9] WONTERGHEM J V, ALLOUM A, BOUTROS J J, et al. On performance and complexity of OSD for short error correcting codes in 5G-NR[EB/OL]. (2017-01-01) [2024-09-29]. https://www.researchgate.net/profile/Amira-Alloum/publication/316840274_On_Performance_and_Complexity_of_OSD_for_Short_Error_Correcting_Codes_in_5G-NR/links/591316d64585152e199a75b6/On-Performance-and-Complexity-of-OSD-for-Short-Error-Correcting-Codes-in-5G-NR.pdf.

- [10] VAN WONTERGHEM J, ALLOUM A, BOUTROS J J, et al. On short-length error-correcting codes for 5G-NR[J]. *Ad Hoc Networks*, 2018, 79: 53-62.
- [11] JIN W Y, FOSSORIER M. Efficient box and match algorithm for reliability-based soft-decision decoding of linear block codes[C]//2007 Information Theory and Applications Workshop. Piscataway: IEEE, 2007: 160-169.
- [12] SCHOLL S, STUMM C, WEHN N. Hardware implementations of Gaussian elimination over GF(2) for channel decoding algorithms[C]//2013 Africon. Piscataway: IEEE, 2013: 1-5.
- [13] DUFFY K R, LI J G, MÉDARD M. Guessing noise, not codewords[C]//2018 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). New York: ACM, 2018: 671-675.
- [14] DUFFY K R, LI J G, MÉDARD M. Capacity-achieving guessing random additive noise decoding[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2019, 65(7): 4023-4040.
- [15] SOLOMON A, DUFFY K R, MÉDARD M. Soft maximum likelihood decoding using GRAND[C]//ICC 2020 - 2020 IEEE International Conference on Communications. Piscataway: IEEE, 2020: 1-6.
- [16] DUFFY K R. Ordered reliability bits guessing random additive noise decoding[C]//ICASSP 2021 - 2021 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Piscataway: IEEE, 2021: 8268-8272.
- [17] 孔挺, 余鹏, 王浩. 纠三错BCH码改进查找表译码算法研究及其实现[J]. *计算机与数字工程*, 2018, 46(2): 247-250, 275. KONG T, YU P, WANG H. Research and implementation of improved lookup table decoding algorithm for triple-error-correcting BCH code[J]. *Computer & Digital Engineering*, 2018, 46(2): 247-250, 275. (in Chinese)
- [18] LEE H P, CHANG H C, LIN T C, et al. A weight method of decoding the binary BCH code[C]//Proceedings of the 2008 Eighth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications - Volume 03. New York: ACM, 2008: 545-549.
- [19] ABBAS S M, JALALEDDINE M, GROSS W J. List-GRAND: A practical way to achieve maximum likelihood decoding[J]. *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, 2022, 31(1): 43-54.
- [20] CONDO C, BIOGLIO V, LAND I. High-performance low-complexity error pattern generation for ORBGRAND decoding[C]//2021 IEEE Globecom Workshops. Piscataway: IEEE, 2021: 1-6.
- [21] CONDO C. A fixed latency ORBGRAND decoder architecture with LUT-aided error-pattern scheduling[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2022, 69(5): 2203-2211.
- [22] ABBAS S M, TONNELIER T, ERCAN F, et al. High-throughput VLSI architecture for soft-decision decoding with ORBGRAND[C]//ICASSP 2021 - 2021 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Piscataway: IEEE, 2021: 8288-8292.
- [23] FAN J L. *Constrained Coding and Soft Iterative Decoding*[M]. Boston, MA: Springer US, 2001.
- [24] CHASE D. Class of algorithms for decoding block codes with channel measurement information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1972, 18(1): 170-182.
- [25] AN W, MÉDARD M, DUFFY K R. CRC codes as error correction codes[C]//ICC 2021 - IEEE International Conference on Communications. Piscataway: IEEE, 2021: 1-6.
- [26] 张国华, 孙爱晶, 倪孟迪, 等. 无小环大列重 QC-LDPC 短码的显式构造[J]. *电子学报*, 2024, 52(6): 1862-1868. ZHANG G H, SUN A J, NI M D, et al. Explicit constructions of short QC-LDPC codes free of small cycles and with large column weight[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2024, 52(6): 1862-1868. (in Chinese)

作者简介



石月壮 男,2000年8月出生于山东省聊城市. 现为中国科学院微电子研究所硕士研究生. 主要研究方向为差错控制编码算法设计与实现.

E-mail: syuez@hotmail.com



孔令军 男,1982年6月出生于黑龙江省鸡西市. 现为金陵科技学院教授、硕士生导师、智能信号处理方向带头人. 主要研究方向为前沿差错控制编码理论与技术. 中国电子学会会员编号: E190026378S.

E-mail: kong@jit.edu.cn



刘海洋 男,1980年10月出生于北京市. 现为中国科学院微电子研究所副研究员、硕士生导师. 主要研究方向为差错控制编码理论与应用.

E-mail: liuhaiyang@ime.ac.cn