

# 认知不确定性问题的边界思维

张清华<sup>1,2,3</sup>, 洪承鑫<sup>1,4</sup>, 赵凡<sup>5</sup>, 高满<sup>2,4</sup>, 程云龙<sup>3,6</sup>, 王国胤<sup>2,3,4,7</sup>

(1. 重庆邮电大学计算机科学与技术学院, 重庆 400065; 2. 重庆邮电大学计算智能重庆市重点实验室, 重庆 400065;  
3. 网络空间大数据智能安全教育部重点实验室, 重庆 400065; 4. 旅游多源数据感知与决策技术文化和旅游部重点实验室,  
重庆 400065; 5. 山西师范大学数学科学学院, 山西太原 030031; 6. 川渝共建数字经济智能与安全重点实验室, 重庆 400065;  
7. 类脑认知计算与特殊儿童教育康复重庆市重点实验室(重庆师范大学), 重庆 401331)

**摘要:** 不确定性问题在现实世界中普遍存在, 对人类理解认知世界和决策行为产生重大影响, 也是不确定性人工智能研究的重要课题之一。尽管人工智能在处理不确定性问题方面取得一定进展, 但仍难以有效认知处理不确定性问题。不确定性主要来源于概念边界的不确定性及刻画概念边界信息不足导致的不确定性。因此, 如何准确识别不确定性问题的边界并有效处理边界成为人工智能领域的重要科学问题。本文首先总结归纳了认知处理不确定性问题的理论模型和方法, 揭示了认知不确定性问题本质上是研究两个对立状态(确定状态)之间转变的过渡状态(边界), 即识别和处理边界问题。随后从认知不确定性问题边界的角度, 按照“点、线、面”的精确边界到“区间、区域、空间”的模糊边界等不同维度, 分析了不确定性问题的边界呈现形式。最后, 对处理不确定性问题的边界理论进行了讨论和总结, 并对未来研究问题和方向进行了展望。本文研究为认知不确定性问题提供了一个新的视角, 旨在推动不确定性问题的边界理论的发展和完善。

**关键词:** 不确定性问题; 边界; 粗糙集; 模糊集; 状态转变

**基金项目:** 国家自然科学基金(No.62276038, No.62221005); 重庆市教委重点合作项目(No.HZ2021008); 重庆市自然科学基金创新发展联合基金(No.CSTB2023NSCQ-LZX0164); 重庆英才计划(No.cstc2022ycjh-bgzxm0089); 重庆邮电大学博士人才培养计划(No.BYJS202407)

**中图分类号:** TP39

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112(2025)10-3622-18

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.12263/DZXB.20250577

## Boundary Thinking for Cognitive Uncertainty Problems

ZHANG Qing-hua<sup>1,2,3</sup>, HONG Cheng-xin<sup>1,4</sup>, ZHAO Fan<sup>5</sup>, GAO Man<sup>2,4</sup>, CHENG Yun-long<sup>3,6</sup>, WANG Guo-yin<sup>2,3,4,7</sup>

(1. School of Computer Science and Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China;  
2. Chongqing Key Laboratory of Computational Intelligence, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China;  
3. Key Laboratory of Cyberspace Big Data Intelligent Security, Ministry of Education, Chongqing 400065, China; 4. Key Laboratory of Tourism Multi-source Data Perception and Decision-Making Technology, Ministry of Culture and Tourism, Chongqing 400065, China;  
5. School of Mathematical Sciences, Shanxi Normal University, Taiyuan, Shanxi 030031, China; 6. Sichuan-Chongqing Co-Construction Key Laboratory of Digital Economy Intelligence and Security, Chongqing 400065, China; 7. Chongqing Key Laboratory of Brain-Inspired Cognitive Computing and Educational Rehabilitation for Children with Special Needs, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** Uncertainty problems are ubiquitous in the real world and have a significant impact on human understanding, cognition, and decision-making, making them an important topic in uncertain artificial intelligence research. Despite the fact that some progress has been made in artificial intelligence in dealing with uncertainty problems, it remains a challenging task to effectively address cognitive uncertainty. Uncertainty arises primarily from the conceptual boundary and from insufficient information to characterize it. Therefore, how to accurately identify the boundary for uncertainty and effectively deal with the boundary has become an important scientific problem in the field of artificial intelligence. This paper first summarizes the theoretical models and methods for dealing with uncertainty, revealing that the cognitive uncertainty is essentially the study of the transition state (boundary) between two opposing states (certainty), that is, the problem of identifying and dealing with the boundary. Secondly, the presentation forms of uncertainty in different dimensions are analyzed from the

perspective of cognitive uncertainty boundary, such as the precise boundary of “point, line, and surface” and the fuzzy boundary of “interval, region, and space”. Finally, the boundary theory for uncertainty is discussed and summarized, and future research questions and directions are prospected. This study provides a new perspective on cognitive uncertainty and aims to promote the development and refinement of the boundary theory for uncertainty.

**Key words:** uncertainty problems; boundary; rough set; fuzzy set; state transition

**Foundation Item(s):** National Natural Science Foundation of China (No.62276038, No.62221005); Key Cooperation Project of Chongqing Municipal Education Commission (No.HZ2021008); Joint Fund of Chongqing Natural Science Foundation for Innovation and Development (No.CSTB2023NSCQ-LZX0164); Chongqing Talent Program (No.cstc2022ycjh-bgzxm0089); Doctoral Talent Training Program of Chongqing University of Posts and Telecommunications (No.BYJS202407)

## 1 引言

现实世界处于不停地运动与变化状态,导致人们对事物的认知往往是模糊的和不确定的。人类接触到的事物有时是确定的,但更多的时候是不确定的。人们乐于追求确定的事物,以获得对世界的精确描述和预测。但是更多时候事物是不确定的,这是由客观世界的复杂性和不可预测性所决定的。正是因为存在这种不确定性,才推动了世界的不断变化。确定性是指客观事物发展过程中精确的、必然的、规律的一种属性和状态。不确定性是指客观事物间和发展过程中模糊的、随机的、无序的一种属性和状态,确定性与不确定性共同揭示了客观事物间联系<sup>[1-4]</sup>。以拉普拉斯、牛顿和爱因斯坦等为代表的确定性支持者,强调了世界的规律性和可预测性,他们认为宇宙中的一切都是确定好的,导致不确定性是因为没有获取足够的信息去分析这个世界;而海森堡、玻尔兹曼和费曼等科学家通过研究证明了客观世界的确存在着不确定性。在牛顿物理学知识体系看来,这个世界就像钟表一样是精确运行的<sup>[5]</sup>。牛顿认为宇宙存在第一推动力,而拉普拉斯认为世界中的一切事件和现象都是按照某种确定性规律发生的,世间万物都逃不出物理规律的掌控<sup>[6]</sup>。确定性支持者并不是拒绝一切不确定性,而是认为不确定性产生的原因是测量误差或者人类自身认知的局限性导致的。直到20世纪初,量子力学的出现,才在科学领域打破了“确定性理论”的绝对统治。海森堡的“不确定性原理”<sup>[7]</sup>,指出无法同时准确确定一个粒子的位置和动量。这意味着,在客观世界证明了不确定性的确存在,与人类是否认知没有关系。

由于确定性与不确定性是关于世界观的争论,因此,不确定性无论是在自然科学领域,还是在社会科学领域都广泛存在着。关于“不确定性”一词,最早由英国哲学家詹姆斯·穆勒1836年在《政治经济学是否有用》中明确提出<sup>[2]</sup>。1931年奥地利逻辑学家哥德尔揭示了数学存在不确定性的本质<sup>[8]</sup>,这种不确定性是指,在任何形式化的公理系统中,总存在某些命题无法被证明或否定。1980年美国数学家克莱因在《数学:确定性的

丧失》中提出了一个观点<sup>[9]</sup>,即数学不再是一门精确性的学科,而存在着一定的不确定性。进入21世纪以来,虽然很多人依然从事确定性研究,如精确推理<sup>[10]</sup>、精准决策<sup>[11]</sup>等,但却难以解决客观世界存在的不确定性问题。因此,人们越来越关注不确定性研究,包括模糊控制<sup>[12]</sup>和随机过程建模<sup>[13]</sup>等。人们目前所说的不确定性问题,其内涵很广泛,主要有以下特征:随机性、模糊性、不完全性和不一致性等。其中,随机性和模糊性是不确定性的基本特征<sup>[11]</sup>。

随机性是由于条件决定不了结果表现出来的不确定性,它反映了因果律的破缺。随机性所描述的事件或现象本身是清晰和精确的。如天气预报使用了大量的数据来预测未来的天气情况,但由于气象系统的复杂性,天气预报结果仍然具有一定程度的随机性。确定性和不确定性是随机性的两个极端,而认知这类不确定事件的关键在于给出两个确定状态(概率为0和1)之间的中间状态(求解不确定事件发生的概率,也就是认知边界)。一般来讲,认知信息越多、先验知识越多,不确定性(这里是随机性)越小,极限条件下,不确定事件可以转变为确定事件。

模糊性是由于概念外延的边界不清晰造成的不确定性,它反映了排中律的破缺<sup>[14]</sup>。模糊性所描述的事件或现象本身是模糊不清的。如健康和疾病之间没有明确的过渡界线,亚健康就是针对这种不确定情况提出的过渡概念。为了研究不确定性的模糊性,1965年美国控制论专家Zadeh提出了模糊集理论<sup>[15]</sup>,引入“隶属度”来描述“亦此亦彼”的特性,隶属度为0和隶属度为1是不确定性问题的两个确定状态(具有对立性),而其他隶属度值介于这两个确定状态间的第三种状态(中间状态或过渡状态),其实质是研究两个对立状态之间相互转变的边界。1982年波兰数学家Pawlak提出了粗糙集理论<sup>[16]</sup>,利用上下近似构造的边界区域来刻画正区域和负区域(两个对立状态)之间的过渡状态。因此,在处理不确定性问题时,通过边界刻画事物状态的转变过程是解决不确定性问题的核心,也是人们在认知世界和改造世界方面需要解决的一项重要任务。

在不确定性问题的研究中,由于涉及随机性和模

糊性,状态间的转变过程常常难以明确定义,通常使用宽泛的模糊概念来描述过渡过程.如季节交替通常利用月份描述季节间的更替,但是很难用某一天或时刻定义某一个季节,突显季节间切换的不确定性.模糊边界能够更客观地描述事物间的演变(过渡)过程.而在确定性问题研究中,人们追求精确的边界,清晰地定义事物或概念的转变过程,如地区边界或地理特征的界线划定越清晰,地区间的管理争议就会越少.德国数学家和哲学家莱布尼茨认为,任何事物的变化都不是一蹴而就的,而是需要经过某个中间阶段,从而由小到大或者由大到小逐渐变化,即“自然界不存在跳跃”<sup>[17]</sup>.如好与坏、黑与白、接受与拒绝等对立状态之间往往存在一定的过渡状态,称之为边界,而这个边界可能是精确的点(精确边界),也可能是一个模糊的范围(模糊边界).人类认知不确定性问题,核心在于刻画不确定性问题对立状态转变的边界(边界点、边界区间、边界区域等).在现实世界中,人们通过捕捉事物状态转变的过渡区域,调控临界条件或参数,以控制事物的发展方向.然而,研究者们很少谈及或意识到处理不确定性问题本质上就是寻找两个对立状态之间相互转变的边界.

问题的不确定性和确定性不是完全对立的,在一定程度上可以相互转化.不确定性人工智能科学家的任务,就是寻找能够形式化地表示不确定性事物转变的过渡状态(边界),以实现不确定性问题的认知,从而使计算机能够模拟人脑认知客观世界的过程.从认知学角度来考虑,人类通过获取的信息刻画对立状态转变的边界,进而将世界描述为不同的概念和类别,以理解和组织客观世界的各种现象和概念间的关系.从数学角度看,建立不确定性问题认知理论和方法变得越来越重要,边界认知思维为建立认知不确定性问题的理论公理化方法提供新视角和思维模式.随着概率论和模糊数学理论研究的深入,边界既是人类公理化刻画的目标,也是人类认知世界的一种表征.

在客观世界中,人们通常通过不同维度空间的边界来认知不确定性问题.一维空间边界主要用于认知单变量阈值型不确定性问题,这类问题通常是线性、确定性的边界判断,精确边界通过临界点的形式呈现出来,指的是事物由一种状态转变成另一种状态的临界值.如温度是否超过阈值、单个传感器信号是否超标.然而,现实生活中并非所有事物都能被非此即彼地精确划分,有时需要使用模糊边界来描述事物转变过程.一维空间中通过区间描述模糊边界,如 $36\sim 37\text{ }^{\circ}\text{C}$ 之间被定义为正常体温,是描述体温高和体温低两个对立状态转变的中间状态.二维空间边界刻画的是变量之间的交互关系,这类问题需要考虑变量之间的相关性和

耦合,精确边界通过边界线形式呈现出来,其可以将二维空间准确地划分为两个对立的状态.如不同省份、城市通过边界线精确划分来确定各个行政区域.二维空间中一般通过区域描述模糊边界,如沿海地区常常是陆地和海洋之间的过渡区域,被称为沿海带,这个区域受到海洋和陆地双重影响,具有独特的生态系统和气候特征.三维空间边界则对应复杂的高维不确定性问题,这类问题通常具有多模态性和非线性,需要在更高维度下构建边界模型,精确边界通过边界面的形式呈现出来,其可以将空间精准划分为两个互不相交的部分.如赤道面作为地球的赤道所在的平面,将地球分为北半球和南半球两个部分.三维空间中一般通过空间描述模糊边界,如大气层描述了地球与太空之间的模糊转变过程.随着海拔的增加,大气层内部气体的温度、压力和密度逐渐变化,导致描述地球转变为太空的边界空间变得模糊.精确边界提供了对事物的精准描述,有助于人们精准把握和改造事物.而模糊边界对事物的描述从“非此即彼”的二元选择转变为“亦此亦彼”的多元选择,提供了更多的描述选项.

不同的边界刻画了多个维度空间中状态转变过程.在一维空间中,边界点(精确边界)将每个数值与预设的阈值点进行比较,将数据分成两类:满足条件的和不满足条件的.这种二分的思维模式符合人类常见的“非此即彼”思维方式.后来,人们为了更好地选取阈值,引入熵的概念度量不确定性,控制转变过程中损失的信息量<sup>[18-20]</sup>.而一维空间模糊边界通过区间描述不同概念间的转变过程.模糊集通过定义 $(0,1)$ 区间表现边界逐渐变化不清晰的概念<sup>[15]</sup>.在二维空间中,边界线(精确边界)本质上是在特征平面中找到一条线(可能是首尾相连),用于描述不同状态的转变过程.边界线思想很好地在感知机中体现<sup>[21]</sup>,它的核心思想是通过调整权重参数来找到一个可以将不同类别的样本正确分开的边界线.而二维空间的模糊边界通过区域形式描述不同状态的转变过程.Pawlak通过上下近似之差定义边界区域,用以描述那些无法被确定归类的对象<sup>[16]</sup>.在三维空间中,边界面(精确边界)是在空间中寻找一个面,用于描述空间中不同状态的转变过程.边界面基于边界线理论延伸而来,可以理解为边界线升维后便成为了边界面,用于三维空间的划分.而三维空间的模糊边界并不能将二维空间的粗糙集方法直接迁移,且现有的理论模型缺乏对三维空间模糊边界的有效描述.因此,本文借鉴边界区间和边界区域思想,通过选取两个精确边界或构建上下近似空间描述模糊边界,为三维甚至高维空间的不确定性研究提供新思路.

人类在认知事物的过程中,会从不同的维度对不确定性问题进行理解和认知.在不同维度空间上,有精

确边界的“点、线、面”以及模糊边界的“区间、区域、空间”,它们分别从不同视角刻画出事物之间的边界.事物分为已知的和未知的,已知的事物间存在精确的边界,进而会转化为经验和知识.而面对新事物时,由于人类的认知存在不确定性,认知过程就需要将观察到的事物与已经积累的经验 and 知识进行比较、关联并添加更加详细的信息,将新事物与已知事物的概念进行归纳和总结,试图找出旧事物向新事物转化的边界(可能是精确边界也可能是模糊边界),形成对新事物概念的理解和认知.这个过程充分体现了人类认知事物时的不确定性,以及用边界思维来认知解决不确定性问题的重要性.人类认知不确定性问题的优势在于善于应用边界认知思维,机器认知不确定性问题的难点在于对边界刻画缺乏相对完备的认知模型和方法.如何建立便于机器处理不确定性问题的边界理论模型和方法,从不确定性问题对应的不同状态之间转变边界入手,构建认知不确定性问题的边界刻画模型,来实现对不确定性问题的处理是不确定性人工智能的发展方向.基于这一现实需求,提出了一种新的认知框架——边界思维.边界思维强调从“边界”入手认知和处理不确定性问题,认为不确定性问题往往能通过刻画不同状态间转变边界解决.现实世界维度的增加,不确定性问题的复杂性也显著上升,边界从点(区间)-线(区域)-面(空间)逐步扩展.而在不同维度空间上构建了边界点(区间)、边界线(区域)、边界面(空间)的逐层递进的处理框架能够很好地处理不确定性问题:边界点用于刻画系统中临界条件或突变位置;边界线反映不同状态之间的连续过渡关系;边界面揭示复杂系统中多因素共同作用下的不确定性分布.这种递进式框架,不仅体现了人类善于利用边界思维认知不确定性的优势,也为机器提供了可供建模和推理的理论基础.因此,不确定性问题边界理论的探讨有助于深入认知事物的本质特征和规律,揭示事物之间的联系和相互作用,有助于建立不确定性问题认知的新方案.

## 2 认知不确定性问题的边界刻画

本文将边界分为两类,一类的边界清晰(称为精确边界),在不同维度空间上呈现出点、线和面的特征,对应的不确定性问题的状态转变非常清晰;另一类的边界不精确(称为模糊边界),即有“厚度”,在不同维度空间上呈现出区间、区域、空间等特征,具体类型分类结构图如图 1 所示.

### 2.1 一维空间的精确和模糊边界刻画

在一维空间中,精确边界是指清晰确定的边界点,一般使用阈值描述,表示可以明确确定事物或概念的变化节点,如图 2(a)所示.而模糊边界则指的是

不太清晰或不太确定的边界区间,通常用两个边界点来表示一个区间,表明事物或概念转变过程的中间状态,如图 2(b)所示.

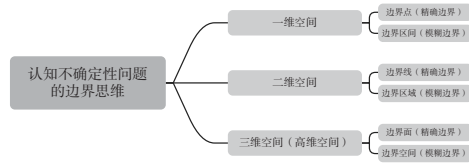


图 1 不确定性问题边界的类型分类结构图

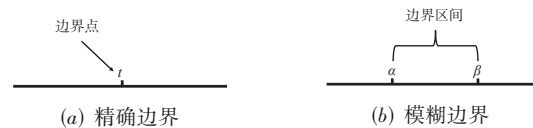


图 2 一维空间边界刻画示意图

#### 2.1.1 边界点刻画

边界点划分是一种非此即彼的分类方式,它反映了对事物属性或特征的极端分类观念,将事物视为二元的、互斥的情况.以常见的烧水为例,当水达到沸点时,液体内部和表面会同时发生剧烈汽化现象,液体便会转变为气体.水的沸点是液态水和气态水两种状态转化边界的精确刻画,这样的边界点简化了对问题理解难度,并使得结果更加直观和易于理解.下面以阈值化作为边界点的典型方法进行简要介绍.

阈值化的边界点刻画.

阈值化是一种经典的基于边界点划分方法,通过设定一个阈值将数据集划分为不同的类别或状态<sup>[22]</sup>.在阈值化过程中,将数据与预先设定的阈值进行比较,如果数据超过或等于阈值则归为一类,否则被划分为另一类.图像二值化是一种经典的阈值化方法,通常选取介于 0~255 间的一个灰度值作为阈值,与每个像素灰度值进行比较,并根据比较结果将像素转换为黑白两种状态之一.下面给出图像阈值化的定义.

**定义 1** 设定一个阈值  $t$ , 遍历数据中的值  $x$ , 如果值  $x$  大于等于阈值  $t$ , 则将这个数据  $x$  赋值为 255; 若数据值  $x$  小于阈值, 则将该数据值  $x$  赋值为 0. 状态  $state(x)$  描述如下:

$$state(x) = \begin{cases} 255, & x \geq t \\ 0, & x < t \end{cases} \quad (1)$$

寻找最佳阈值点有很多方法,如最大熵法<sup>[18]</sup>通过引入熵的概念,找到了一个使得熵之和最大的阈值点,达到分割图像的信息损失最小的目的;OTSU 算法<sup>[23]</sup>则通过最小化类内方差和最大化类间方差,寻找一个能够最大化前景和背景区分度的阈值;NIBLACK 算法<sup>[24]</sup>结合了局部区域的均值和标准差来计算阈值;而 BERNSEN 算法<sup>[25]</sup>通过计算像素点周围区域的最大和

最小灰度值来确定局部阈值. 这些算法的共同目标是通过找到最佳阈值, 准确地描述前景和背景(两个对立状态)之间的转变边界点. 还有类似的多阈值划分方法, 如决策树模型. 它是一种基于多个“边界点”划分方法, 通常用于解决多分类问题<sup>[26-28]</sup>. 该模型通过在特征空间中不断寻找最优边界点, 构建树形决策结构, 使不同类别的样本在划分过程中逐步分离, 最终实现对多分类问题的有效求解, 其划分逻辑类似于在特征维度上设置多层阈值, 从而形成层次化的分类决策体系. 目前, 关于一维精确边界的不确定性问题认知机制研究, 在许多领域取得了成功. Polansky 等人<sup>[29]</sup>提出了边界注意力模型, 能够在任何分辨率下找到微弱的边界点, 如边缘、角、交叉点, 从而提高了模型的精度. Zhong 等人<sup>[30]</sup>设计了一种从模糊边界向精确边界转变方法, 基于 Transformer 架构, 通过模糊插值的方法, 重构模糊图像中的时间连续性, 实现时序图像的精准刻画. Xu 等人<sup>[31]</sup>提出了一种动态阈值策略的半监督学习方法, 解决半监督学习中伪标签筛选问题, 通过训练过程的动态阈值, 动态选择高置信度无标签样本参与训练, 显著减少了错误样本引入. Huang 等人<sup>[32]</sup>开发了一种动态拒绝边界点刻画系统, 将阈值调整集成到学习过程中, 能够在少量标记样本的情况下快速适应新类别, 并有效拒绝未知负样本的识别系统, 用于少样本开放集识别任务. Lei 等人<sup>[33]</sup>设计了一种自适应阈值模块, 能够动态预测每个图像的最优二值化阈值, 广泛应用于医学图像分割. Zhou 等人<sup>[34]</sup>针对高不确定性像素(即边缘检测中困难的边界点)对模型精度的影响, 提出了一种不确定性感知边缘检测器, 并设计了自适应加权损失, 使得网络能够更加聚焦于关键像素. Wang 等人<sup>[35]</sup>提出了一种用于半监督学习的自适应阈值策略, 解决了固定阈值导致模型性能欠佳的问题, 该方法能够根据模型的学习状态自适应调整阈值, 从而更高效地利用无标签数据.

### 2.1.2 边界区间刻画

边界区间划分是一个模糊分类的方法, 它反映了对事物范围的模糊分类观念. 如通常使用身体质量指数 BMI (Body Mass Index) 来衡量人体胖瘦程度, BMI 值高于 24 被认为是身体过胖, BMI 低于 18.5 被认为是身体过瘦, 而 BMI 值在 18.5 到 24 之间则被定义为正常体重, 描述了过瘦和过胖两种状态转变边界的模糊刻画, 弥补了边界点的极端分类方法, 同时具有灵活性和鲁棒性等优势. 下面以模糊集和置信区间估计作为边界区间的典型方法进行简要介绍.

模糊集的边界区间刻画.

模糊集理论是一种处理模糊和不确定性问题的数学工具. 它认为元素的隶属度不是严格的 1 或 0 (接受

或拒绝), 而可能存在介于接受和拒绝两种确定状态间的中间状态.

**定义 2** 模糊集<sup>[15]</sup>. 在非空有限集合  $U$  上给定一个映射. 模糊集描述如下:

$$\begin{cases} \mu_A: U \rightarrow [0, 1] \\ x \rightarrow \mu_A(x) \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $A$  表示  $U$  上的一个模糊集,  $\mu_A$  表示  $A$  的隶属度函数. 模糊集的中间状态可描述为

$$\mu_A(x) \in (0, 1), \quad x \text{ 属于 } A \text{ 的程度} \quad (3)$$

其中,  $(0, 1)$  描述对象  $x$  隶属度为 0 到 1 之间的中间状态.

模糊集通过隶属函数描述对象的隶属程度, 从而构建过渡区间(介于 0 和 1 之间), 描述两个对立状态接受(隶属度为 1)和拒绝(隶属度为 0)转变的边界区间.

置信区间估计的边界区间刻画.

置信区间估计是统计学中一种用来估计总体参数真值范围的方法, 通过样本数据统计量加减估计误差计算出一个中间状态, 即置信区间<sup>[36]</sup>, 将总体参数值划分为两个确定状态的左侧和右侧置信区间(拒绝域).

**定义 3** 置信区间<sup>[36]</sup>. 设总体  $X$  的分布中含有未知参数  $\theta$ . 对于给定值  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , 若由样本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  确定的两个统计量  $\theta_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$  和  $\theta_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$  满足:

$$P\{\theta_1 < \theta < \theta_2\} = 1 - \alpha \quad (4)$$

其中,  $\theta_1, \theta_2$  分别称为置信下限和置信上限,  $1 - \alpha$  称为置信度. 则称区间  $(\theta_1, \theta_2)$  为参数  $\theta$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间, 记作:  $CI_{1-\alpha} = (\theta_1, \theta_2)$ .

由置信区间划分为两个对立状态, 记为左侧置信区间  $LCI_{1-\alpha}$  和右侧置信区间  $RCI_{1-\alpha}$ , 表示为如下公式:

$$\begin{aligned} LCI_{1-\alpha} &= (-\infty, \theta_1] \\ RCI_{1-\alpha} &= [\theta_2, +\infty) \end{aligned} \quad (5)$$

置信区间估计通过引入置信区间概念, 从而构建过渡区间(介于置信下限和置信上限之间的接受域), 描述两个对立状态左侧和右侧置信区间(拒绝域)转变的边界区间.

目前, 关于一维模糊边界的不确定性问题认知机制研究, 在许多领域取得了显著进展. He 等人<sup>[37]</sup>针对冠状病毒疾病, 提出了一种基于模糊边界的药物推荐方法, 通过考虑人类的风险厌恶行为和遗憾厌恶行为, 定义了两个关键阈值, 将药物方案划分为两个对立状态(接受和拒绝)和一个中间过渡状态(延迟决策). Abdar 等人<sup>[38]</sup>基于三支决策理论和贝叶斯深度学习, 提出了一种模糊边界量化模型, 处理皮肤癌数据中的不确定性信息, 在不同分类阶段动态调整模糊边界的阈值, 并根据数据集特性优化模糊边界, 防止人们在诊断疾病时作出过于自信的决定. Jiang 等人<sup>[39]</sup>设计了一种在

时间序列上处理模糊边界的方法,通过在多个时间粒度上挖掘不同的模糊关联规则,并设计三支决策模型,将规则划分为两个对立状态(正、负)和一个过渡状态(未知),并量化了每个规则的可信度,从而实现了更全面的时序知识发现. Li 等人<sup>[40]</sup>设计了一种面部表情模糊边界划分方法,通过注意力重要性加权模块,从提取的面部特征中学习每个样本的重要性权重,根据预设的样本比例参数,将样本按重要性权重排序后划分为两个对立状态(高不确定性和低不确定性)和一个中间过渡状态(中不确定性). Pan 等人<sup>[41]</sup>针对垃圾焚烧发电系统的工厂选址问题,通过信息转换机制,将异构信息格式统一为模糊区间,基于距离模型,分析备选地点之间的冲突并选择最理想的地点. Lincoff 等人<sup>[42]</sup>通过不同指标的置信区间,全面评估药物在心血管保护、体重管理及安全性方面的真实效应范围,为临床决策提供更严谨的证据支持. Wang 等人<sup>[43]</sup>提出了一种基于累积前景理论和排名关系的三支决策模型,引入边界区间降低决策风险,解决投资组合选择风险过高问题.

## 2.2 二维空间的精确和模糊边界刻画

在二维空间中,精确边界是指清晰确定的边界线,常常使用直线或者曲线描述状态转变的边界,如图 3(a),紫色直线和虚线曲线描述了橘色三角形向褐色圆形转变的边界线. 而模糊边界则指的是不清晰或不确定的边界区域,一般是由两个封闭式图形组合而成的区域,描述两个对立状态转变的过渡区域,如图 3(b),粉色矩形描述了橘色三角形向红褐色圆形的转变过程.

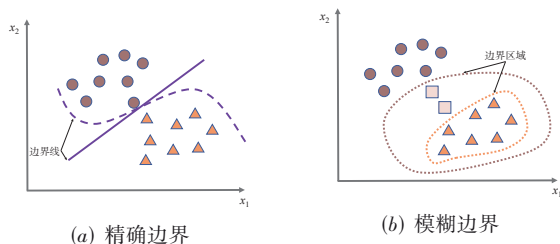


图3 二维空间边界刻画示意图

### 2.2.1 边界线刻画

边界线划分是一种连续的划分方式,它反映了对事物属性或特征的连续性和相对性的认知. 如秦岭-淮河线作为中国的标志性边界线,它是亚热带和暖温带分界线、水稻生产与小麦生产分界线等,描述了对立状态转变边界的精确刻画. 通过识别对立状态转变的边界线,能够帮助人们更全面、准确地认知事物的变化和关系. 下面以逻辑回归作为边界线的典型方法进行简要介绍.

逻辑回归的边界线刻画.

逻辑回归<sup>[44]</sup>由统计学家 Cox 于 1958 年提出,其使用回归思想解决分类任务,认为在特征平面中可以找

到一条边界线,这条边界线可以将数据集划分成两个对立状态.

**定义 4** 逻辑回归<sup>[44]</sup>. 通过使用 sigmoid 函数将线性模型的输出转换为一个介于 0 和 1 之间的概率值,概率值  $y$  表示样本属于某个特定类别的可能性. 逻辑回归模型描述如下:

$$y = \sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} \quad (6)$$

其中,  $t = w^T x + b$  为决策边界(边界线),  $w$  为训练好的权重,  $b$  为偏置. 当数据集有两个特征  $x_1, x_2$  时,  $t$  变成一条线,当  $w_1 x_1 + w_2 x_2 + b > 0$  判断为正类,反之为负类.

逻辑回归<sup>[45]</sup>的核心任务是找到使损失函数最小化的边界线,常见的优化方法包括梯度下降法和牛顿法. 梯度下降法通过计算损失函数的梯度,沿负梯度方向更新参数,逐步逼近最小值. 而牛顿法则利用损失函数的一阶导数(梯度)和二阶导数(Hessian 矩阵),通过泰勒级数展开对损失函数进行近似,并求解近似函数的导数为零的点,从而确定最优参数. 两者虽采用不同的策略,最终都旨在优化参数以找到最佳的边界线,将数据集划分为两个对立状态正类和负类.

还有许多类似的边界线刻画模型方法,如感知机,支持向量机等机器学习模型. 感知机<sup>[21]</sup>由美国学者 Rosenblatt 提出,它是一种基于输入数据和输出结果之间的线性关系的“边界线”分类模型. 该理论认为,可以使用误分类点到边界线的距离之和作为损失函数,通过最小化损失函数得到一个线性的决策边界,将数据集划分为两个对立状态正类和负类. 支持向量机<sup>[46]</sup>是由 Vapnik 领导的 AT&T Bell 实验室研究小组提出的一种二类分类模型,其可以找到一个最大间隔边界线,使得两个对立状态的正负类尽可能远离该边界,从而实现良好的分类效果. 这些模型方法都是通过描述了对立状态转变边界,以实现正负类(对立状态)的划分. 目前,关于二维精确边界的不确定性认知机制研究,在许多领域取得了成功. Wu 等人<sup>[47]</sup>提出了一种层次语义对比的边界精准刻画方法,利用对比学习思想对不同层次的语义关系进行建模,使得模型能够学习更全面的语义结构,从而生成更精确的边界划分,实现图像分割. Kang 等人<sup>[48]</sup>设计了一种视觉边界定位的分割方法,通过将边界框注释转化为像素级分割信号来增强边界清晰度,提升了定位准确性. Lin 等人<sup>[49]</sup>针对前景和背景边界不清晰的问题,提出了卷积-Transformer-运算符(CTO)网络,通过显式边界检测操作增强解码器的边界学习能力,增强前景和背景的边界表示. Pu 等人<sup>[50]</sup>联合检测四种边缘类型(表面反射、照明、表面法线、深度),通过分阶段特征学习和注意力机制精确刻画物体边界. Pu 等人<sup>[51]</sup>提出基于 Transformer 的边缘检

测器以解决边界不清晰问题,其通过全局上下文与局部细节的融合,实现了更清晰的物体边界提取. Chen 等人<sup>[52]</sup>针对超声图像中肿瘤边界模糊的问题,提出一种嵌套 U-Net 架构,利用不同深度和共享权重的 U-Net 增强边界表达,从而实现了准确高效的乳腺肿瘤分割. Zhang 等人<sup>[53]</sup>针对任意形状文本的边界定位问题,提出了一种由粗到细的框架,通过迭代边界 Transformer 模块逐步细化初始边界,以粗到细的方式显式建模文本边界,准确刻画了任意文本边界.

### 2.2.2 边界区域刻画

边界区域划分是一种将平面空间模糊分类的方法,它反映了事物类属区域的不明确性所引起的不确定性. 如在不同生态系统之间,通常存在生态过渡带,林草交错带是森林与草原之间的过渡区域,城乡接合部则是城市和乡村的过渡区域. 这些过渡区域是不同状态转变边界的模糊刻画,有助于人们更好地理解区域间的模糊转变过程. 下面以粗糙集作为边界区域的典型方法进行简要介绍.

粗糙集的边界区域刻画.

粗糙集<sup>[16]</sup>是一种基于等价关系的区域划分方法,通过已知的知识库来近似刻画不精确或不确定的知识,从而有效地分析和推理不精确、不一致、不完整的信息.

**定义 5** 粗糙集<sup>[16]</sup>. 给定非空有限集合  $U$ , 目标概念  $X$ ,  $[x]$  是由等价关系导出的关于  $x$  的等价类. Pawlak 粗糙集的下、上近似定义如下:

$$\begin{aligned} \underline{\text{apr}}(X) &= \{x \in U \mid [x] \subseteq X\} \\ \overline{\text{apr}}(X) &= \{x \in U \mid [x] \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (7)$$

根据下近似和上近似,粗糙集的中间状态可描述为

$$\text{BND}(X) = \overline{\text{apr}}(X) - \underline{\text{apr}}(X) \quad (8)$$

其中,边界区域  $\text{BND}(X)$  表示既不属于正区域,又不属于负区域(两个对立状态)的对象集合.

粗糙集的核心思想是利用上下近似集之差,构造过渡区域(既不接受,又不拒绝),用于描述两个对立状态正区域和负区域转变的边界区域. 需要注意的是,增加数据维度(知识粒度越细)不会导致边界区域的维度增加,而是会使得等价类更加细化,在最细的时候就会变成一个对象.

粗糙集的扩展模型,如概率粗糙集、决策粗糙集等,解决粗糙集边界域描述过于严格问题. 概率粗糙集通过阈值对  $(\alpha, \beta)$ , 定量描述边界域. 里贾纳大学 Yao 教授基于概率粗糙集模型和贝叶斯决策理论<sup>[54]</sup>, 通过最小化代价决策,给出阈值对  $(\alpha, \beta)$  求取方法,从而构造具有容错能力的过渡区域(既不接受,又不拒绝). 这些扩

展模型主要通过定量方式描述正区域和负区域(两个对立状态)转变的边界区域. 目前,关于二维模糊边界的不确定性问题认知机制研究,在许多领域有所应用. Peng 等人<sup>[55]</sup>提出了一种基于  $K$  最近邻的密度聚类边界样本改进方法,通过深入分析样本与其  $K$  最近邻的空间关系及其与新形成的簇之间的连接性,有效识别边界样本. Chu 等人<sup>[56]</sup>针对疾病评估中的不确定性问题,采用模糊边界处理不确定信息,将半监督学习与粗糙集理论相结合,通过边界区域的延迟决策,降低了不确定性带来的错误. Lei 等人<sup>[57]</sup>针对医学图像中前景和背景之间存在的模糊边界,设计了一种对比度驱动医学图像分割框架,通过将特征解耦为前景、背景和不确定区域,并利用对比特征指导多层特征融合,重点关注不确定区域的分割效果. Wang 等人<sup>[58]</sup>针对相邻阴影与物体颜色相似导致的边界模糊问题,提出了基于移位窗口机制的 Transformer 架构,用于检测相邻阴影部分,有效分离前景和背景. Lin 等人<sup>[59]</sup>针对多视图数据中的模糊问题,提出了一种基于模糊集理论的扩展边界方法,能够自适应地调整边界以适应模糊数据,从而保证模型的泛化能力. Wang 等人<sup>[60]</sup>针对图对比学习中“局部聚集”与“全局稀疏”的矛盾,提出了一种融合模糊集理论的“模糊边界”机制,通过动态扩展聚类边界,将孤立样本与局部小团连接,从而平衡局部紧密性与全局判别性. Min 等人<sup>[61]</sup>针对主动学习中标注代价高的问题,利用 KNN 分类器将未标注样本划分为三个不相交的区域,根据预期错误成本与标注成本的比较,将样本分为无需标注、需人工标注和待处理三类,以最小化整体代价. Ma 等人<sup>[62]</sup>构建了一个边界失焦模型,该模型精准模拟了拍摄过程中的模糊扩散效应,特别是对焦点向失焦点边缘空间过渡区域(模糊边界)进行了细致建模.

### 2.3 三维空间的精确和模糊边界构造

在三维空间中,通常使用边界面来准确描述不同状态之间的过渡. 这些界面可以是简单的平面,也可以是复杂的曲面,或者多个平面组成的封闭式多面体. 而在探讨模糊边界的刻画方法时,缺少适用于三维空间模糊边界刻画的方法. 为了解决这一问题,可以借鉴一维空间中通过多个精确边界(边界区间)以及二维空间中通过上下近似(边界区域)来刻画模糊边界的思想. 在三维空间中可以找到两个精确边界(边界面)构建开放式边界空间,以描述对立状态的转变边界. 借鉴二维空间上下近似刻画模糊边界(边界区域)的思想,在三维空间中通过上下近似空间构建封闭式边界空间,以描述封闭式空间状态的转变边界. 由于三维空间的边界构造方法是从一维和二维空间延展而来,且数据是静态的,在几何建模和空间推理中具备一致性和可推

广性,能够自然延伸到高维空间.需要注意的是三维空间和高维空间(维度大于3)的构造方法相似.因此,这里只以三维空间边界的构造为例进行讨论.

### 2.3.1 边界面构造

边界面刻画了空间的转变过程,它反映了内部的结构和组织方式.如海平面是大海和天空转变的边界面,地平面是大地和天空转变的边界面.边界面展现了两个对立状态间的联系和相互作用.

构建边界面描述状态转变过程.

2.2.1节介绍的边界线划分方法,可通过扩展维度应用于三维空间,聚焦于固定样本的空间分布特征,通过静态数据的综合分析来实现边界面的划分.给定向量  $x=(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ . 边界面函数定义为

$$F(x) = \sum_{k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}} w(k_1, k_2, k_3) x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \quad (9)$$

其中,系数映射  $w: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , 即  $\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}, w(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}$ .

令边界面  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 | F(x) = 0\}$ . 由三维空间精确边界划分的状态  $\text{state}(x)$  可以描述如下:

$$\text{state}(x) = \begin{cases} A, & F(x) \geq 0 \\ B, & F(x) < 0 \end{cases} \quad (10)$$

式(10)描述了位于边界面  $F(x)=0$  上方,置于状态  $A$ ;若位于边界面下方,置于状态  $B$ . 如图4(a)所示,渐变色平面描述了橘色三角形向褐色圆形转变的边界面.边界面可通过扩展维度应用于  $n$  维( $n > 3$ )空间(高维空间),即  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , 系数映射  $w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 精确边界可以通过超平面刻画.可以理解为在  $n$  维空间中,将空间划分为两个对立状态  $A$  和  $B$ .

目前,关于三维精确边界的不确定性认知机制研究,在许多领域有所应用. Wu 等人<sup>[63]</sup>提出一种三维表征方法,该方法融合了 Bézier 三角形的矢量图形特性与高斯概率模型,不仅实现了 3D 场景的精确重建,还支持分辨率无关的可微渲染,有效降低了物体边界的不确定性,从而获得更加锐利的渲染效果. Liu 等人<sup>[64]</sup>提出了一种基于密度的 3D 伪标签生成模块,解决了行人和骑行者定位矩形边界模糊的挑战,有效地分割了背景点,并改进了对伪标签的位置、维度和方向的估计. Ma 等人<sup>[65]</sup>提出低成本且高精度的管道三维重建方案,通过采集的重叠图像对管道的三维边界进行刻画,实现管道缺陷的量化测量. Li 等人<sup>[66]</sup>基于 CT(Computed Tomography)像素矩阵学习的 3D 肺部图像重建方法,突破 3D 成像中的效率和精度瓶颈,精准刻画 3D 肺边界. Li 等人<sup>[67]</sup>提出多尺度边缘引导学习网络,利用多尺度学习策略,结合 3D 物体的全局边缘信息与局部细节,实现复杂拓扑结构 3D 物体边界的精准刻画. Huo 等人<sup>[68]</sup>设计了一个具有时序 Transformer 和空间图卷积网

络的 3D 驾驶员行为识别框架,对三维人体姿态进行精准边界刻画.

### 2.3.2 边界空间构造

边界空间划分是一种将空间模糊分类的方法,它反映了事物状态间空间分布关系的不明确性所引起的不确定性.在日常生活中,最直观的三维空间就是人们所处的环境,如雾气向远处逐渐变稀,看不出明确的边界.边界空间是雾气和非雾气两种状态转变边界的模糊刻画,有助于人们理解事物模糊划分的空间特征.下面从开放式和封闭式两个角度出发讨论边界空间的构造.

不同于一维和二维空间精确边界的边界线或边界面刻画方法,一维空间模糊集的模糊边界刻画方法并不能移植到三维空间中,因为模糊集通过隶属函数描述对象的隶属关系,只针对单个概念或特征的模糊描述.而置信区间估计的边界刻画方法,是由样本统计量所构造的总体参数的估计区间,其边界区间不会随着数据维度增加而增加.同样,二维空间的粗糙集方法并不适用于三维空间.随着维度的增加,粗糙集通过等价关系构造的等价类会变得更加细化,这会导致边界区域逐渐转变为精确的边界线.为了解决三维空间的模糊边界刻画问题,从是否形成完整闭合图形的开放式和封闭式边界出发,借鉴一维空间边界区间选取多个精确边界刻画模糊边界的思想,构造如图4(b)开放式边界空间.同时借鉴二维空间边界区域的上下近似刻画模糊边界的思想,构造封闭式边界空间,如图4(c)所示.下面给出开放式和封闭式边界空间的构造方法.

构建开放式边界空间描述状态转变过程.

借鉴边界区间思想,采用两个边界面(精确边界)描述模糊边界.令边界面  $\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 | F(x) = 0\}$  和  $\Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 | F(x) + b = 0\}$ ,  $b > 0$ , 且  $\Gamma_1, \Gamma_2$  在  $\mathbb{R}^3$  中无界.由三维空间两个精确边界划分的状态  $\text{state}(x)$  可描述如下:

$$\text{state}(x) = \begin{cases} A, & F(x) + b \geq 0 \\ s, & F(x) + b < 0 \text{ 且 } F(x) > 0 \\ B, & F(x) \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $A$  和  $B$  表示两个确定状态,  $s$  表示状态  $A$  和状态  $B$  之间的过渡状态.如图4(b)所示,两个平面将整个空间划分为三个部分,绿色矩形描述了橘色三角形向红褐色圆形的转变过程.需要注意的是当  $b=0$  时,开放式边界空间便转化为一个边界面,即模糊边界转化为精确边界(边界面).

开放式边界空间的核心思想是利用两个边界面(精确边界),构造过渡空间(既不属于正类,又不属于负类),用于描述两个对立状态正类和负类转变的边界空间.

构建封闭式边界空间描述状态转变过程.

借鉴粗糙集的下近似概念给出封闭式边界空间, 给定非空有限集合  $U$ , 目标概念  $X \subseteq U$ , 簇  $[x]$  由三维空间方法粒化而成的簇. 则在三维空间中, 关于  $X$  的下近似空间  $\underline{\text{aprs}}(X)$  和上近似空间  $\overline{\text{aprs}}(X)$ , 描述如下:

$$\begin{aligned} \underline{\text{aprs}}(X) &= \{x \in U \mid [x] \subseteq X\} \\ \overline{\text{aprs}}(X) &= \{x \in U \mid [x] \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (12)$$

需要注意的是粗糙集使用等价关系导出的簇  $[x]$ , 等价关系的维度增加会使得簇  $[x]$  更加细化 (最细簇  $[x]$  表示一个对象), 而在三维空间需要使用聚类适用三维空间的方法进行粒化, 特征空间的变化会改变数据点间的距离或相似度度量, 簇  $[x]$  的构造随着维度增加而变化 (不是更加细化). 三维空间中的中间状态可描述为

$$\text{BNDS}(X) = \overline{\text{aprs}}(X) - \underline{\text{aprs}}(X) \quad (13)$$

其中, 边界空间  $\text{BNDS}(X)$  表示既不属于正空间  $\text{POSS}$ , 又不属于负空间  $\text{NEGS}$  的对象集合. 在三维空间中, 由边界空间划分为两个对立状态, 正空间  $\text{POSS}$  和负空间  $\text{NEGS}$  可表示为

$$\begin{aligned} \text{POSS}(X) &= \underline{\text{aprs}}(X) \\ \text{NEGS}(X) &= U - \overline{\text{aprs}}(X) \end{aligned} \quad (14)$$

封闭式边界空间的核心思想是利用上下近似空间, 从而构造过渡空间 (既不属于正空间, 又不属于负空间), 用于描述两个对立状态正空间和负空间转变的边界空间. 如图 4(c) 所示, 由棕色球体构建的边界空间, 在球体上的绿色矩形描述了球体内部橘色三角形向球体外部红褐色圆形的转变过程.

上述给定了封闭式边界空间和开放式边界空间, 都能实现模糊空间的描述, 区别在于封闭式边界空间由两个平面组成, 边界空间由两个平面的中间部分的对象描述, 对象  $x$  是最细粒度的. 而封闭式边界空间对象由簇  $[x]$  表示, 边界空间由正好在边界上簇  $[x]$  的对象

集合描述.

现有研究方法在对三维空间的模糊边界刻画方面存在不足. 本节讨论了两种边界空间构建的方法, 分别借鉴了一维空间和二维空间的思想. 首先, 借鉴了一维空间的边界区间思想, 通过两个边界面来构建开放式边界空间, 以描述对立状态转变空间的边界. 其次, 借鉴了二维空间的边界区域思想, 通过三维空间的多面体以及粒化方法, 构建了上近似空间和下近似空间, 从而构建了封闭式边界空间, 以描述一种特殊 (由在边界上簇的对象集合描述) 的对立状态空间转变的边界. 通过这两种构造方法的探讨, 可以更好地理解和描述三维空间中的状态转变过程, 为三维及高维空间的模糊边界研究提供了新的思路和方法. 目前, 关于三维模糊边界的不确定性问题认知机制研究, 在许多领域有所应用. Chen 等人<sup>[69]</sup>设计了一种基于编码器-解码器的 U 形网络, 基于自上而下的深度监督, 可准确、自动地勾勒出结直肠癌的模糊边界. Nam 等人<sup>[70]</sup>针对立体摄影中闪光灯阴影问题, 提出了适用于闪光灯照明下物体边界的阴影检测与去除算法. Sikander 等人<sup>[71]</sup>提出了一种面部阴影检测方法, 关注阴影空间和目标空间, 实现全自动光源筛选, 提升了 3D 重建精度. Li 等人<sup>[72]</sup>将阴影信息 (模糊边界) 与深度学习网络结合, 设计复杂阴影测量算法和建筑轮廓校正算法, 为大规模城市建模提供了一种经济有效的解决方案. Yan 等人<sup>[73]</sup>提出基于阴影的非视距移动障碍物检测系统, 通过设计阴影信号判别器, 识别盲区内行人等移动物体产生的微弱阴影 (模糊边界), 有助于与行人保持安全距离.

## 2.4 不同维度空间的精确边界和模糊边界的关系分析

第 2 节从不同维度空间介绍了当前不确定性问题的主要边界理论模型与方法, 将其分为精确边界的“点、线、

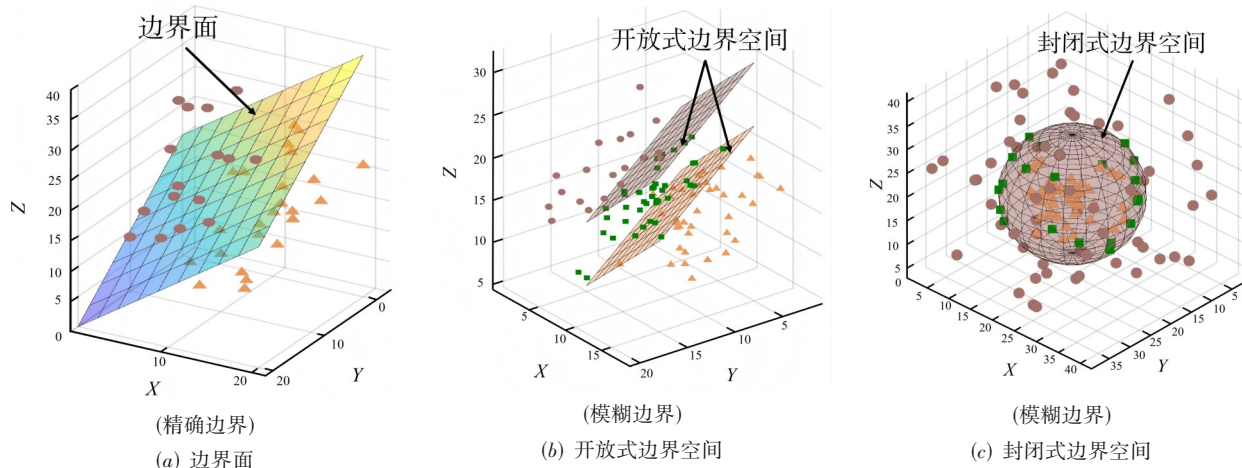


图4 三维空间边界刻画示意图

面”和模糊边界的“区间、区域、空间”去阐述,它们具有一定的关联性,彼此之间可以相互转换. 在一维空间中,边界点是一个特定的阈值点,它反映了两个对立状态转变边界的精确刻画,如图 5(a)所示的边界点 $t$ . 而一维空间的模糊边界是通过选取两个边界点(精确边界)构建的边界区间,刻画两个对立状态转变的边界,如图 5(d)中 $\alpha$ 和 $\beta$ 构建的区间. 在二维空间中,精确边界以边界线的形式呈现出来,可以理解为多个边界点连接起来的边界线,如图 5(b)所示,借鉴三维空间的边界面,在二维空间中,其可以通过直线(曲线)将数据点划分为边界线两侧,上侧

为红褐色的圆形数据点,另一侧为橙色的三角形数据点. 而二维空间的模糊边界可以通过两条边界线(精确边界)构造的开放式边界区域,描述两个对立状态转变过程,如图 5(e)左图所示,其从红褐色圆形通过绿色矩形过渡到橙色三角形数据点;还可以通过一个封闭的不规则多边形构造封闭式边界区域,如图 5(e)右图所示. 在三维空间中,精确边界以一个边界面的形式呈现出来,如图 5(c)所示. 而三维空间的模糊边界可以通过选取两个边界面(精确边界)构建开放式边界空间;封闭的不规则多面体构造封闭式边界空间,刻画两个对立状态转变的边界,如图 5(f)所示.

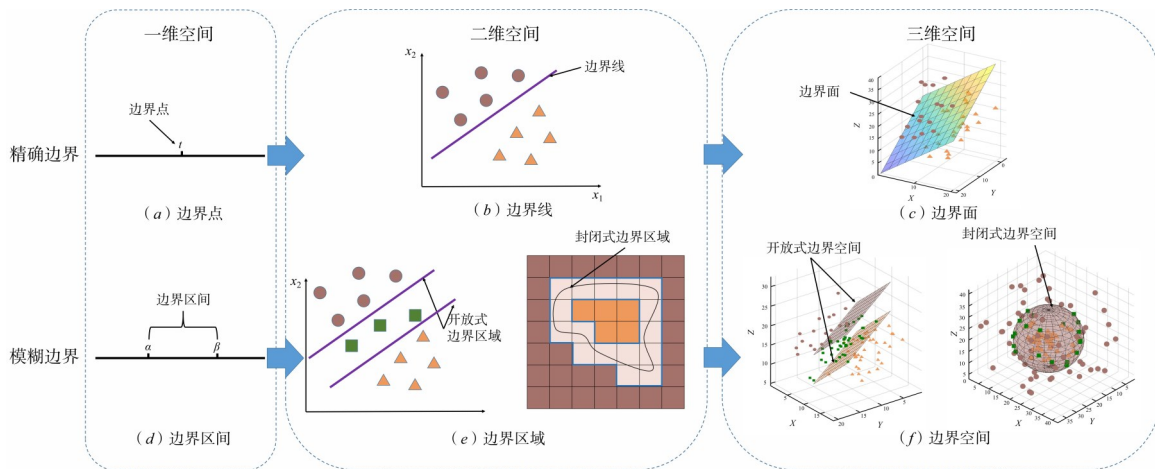


图 5 不同维度空间的边界示意图

### 3 边界理论模型构造及分析

在处理不确定性问题时,可以通过刻画代表两个对立状态(正类和负类)间的中间状态(过渡状态),实现对不确定性问题的认知. 中间状态可以用精确的“点、线、面”或模糊的“区间、区域、空间”进行描述. “点、线、面”表示精确描述的边界,可以精确刻画两个对立状态的中间状态,其中,中间状态是不包含对象的,没有对象可施加策略. 而对于“区间、区域、空间”来说,它是一个模糊描述的边界,同样也可以将论域划分为可施加接受、拒绝决策的两个对立状态(正区域和负区域),但不同的是,中间状态是包含对象的,可施加延迟决策. 不论是精确边界还是模糊边界都能得到两个确定的对立状态(正区域和负区域),而中间状态是否施加策略并进行延迟决策,取决于边界类型(精确边界或模糊边界),边界理论示意图如图 6 所示. 在应对不确定性问题时,边界理论既能够提供一种“非此即彼”的二分法,又能提供一种“亦此亦彼”的多元选择. 如在风险管理中,边界理论的精确边界倾向于“存在风险/不存在风险”的二分法,而边界理论的模糊边界强调可以通过“中间状态”识别潜在风险区,从而采取监测或预防措施;在医学诊断中,医生不仅仅面对“健康/患病”的两极,还会遇到因信息不足无

法判断是否患病,因此可以划分到边界区域,通过观察与检查进一步收集信息以支撑判断;在法律与合规审查中,行为若明显合规或违法可直接通过精确边界判定,但对存在灰色地带的案例则可以选择调查、延迟判决或引入专家评估等不同路径. 但在某些领域必须作出明确的二分判断,不能停留在“灰色地带”,如核电站运行的安全阈值一旦超过(如反应堆温度超过上限),必须立即停堆,不能说“再观察一会”;在医疗手术机器人执行关键操作时,必须判定“切/不切”,不能停留在模糊状态,在这些场景里,延迟决策可能导致灾难性后果,因此只能二分:安全/不安全. 这样通过精确边界与模糊边界结合,能够在多个领域实现对不确定性问题的有效认知与灵活决策.

#### 3.1 边界理论形式化表示

在人工智能领域中,随着维度的增加,精确边界和模糊边界所应用场景也会发生显著变化. 下面讨论边界理论在处理不同维度数据的表现,并给出各维度边界对应的形式化表示.

##### 3.1.1 一维空间精确和模糊边界的形式化表示

一维空间的精确边界一般通过阈值(边界点)刻画两个状态转变的边界点,适用于处理文本、音频等一维

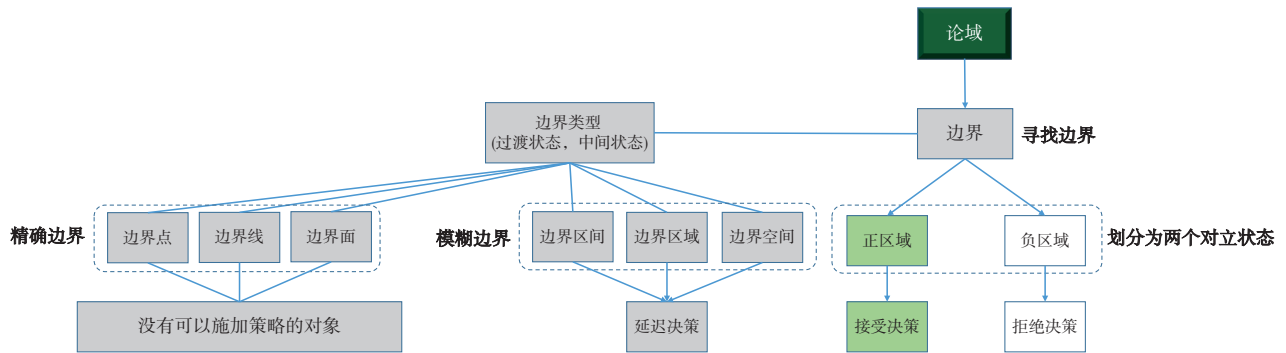


图6 边界理论示意图

数据,以及数据二值化、离散化等简单分类任务. 如通过单个阈值,将图像上的像素点根据灰度值与阈值的大小关系划分为黑白两种颜色的对立状态;在信号处理中,可以将连续的信号转化为离散信号用于数字化处理等. 将单个阈值扩充为多个阈值,不仅可以实现单个阈值的任务,且可实现更为精细化的决策;在语音识别系统中,设置不同的阈值来区分语音信号和噪声信号,实现不同语音之间的区分等.

在一维空间中,给定向量  $x=(x_1) \in \mathbb{R}, k_1 \in \mathbb{R}$ . 边界点函数定义为

$$F(x)=\sum_{k_1 \in \mathbb{R}} w(k_1)x_1^{k_1} \quad (15)$$

其中,系数映射  $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 即  $\forall k_1 \in \mathbb{R}, w(k_1) \in \mathbb{R}$ .

令边界点  $\Gamma=\{x \in \mathbb{R} | F(x)=0\}$ . 由一维空间精确边界划分的状态  $\text{state}(x)$  描述如下:

$$\text{state}(x)=\begin{cases} A, & F(x) \geq 0 \\ B, & F(x) < 0 \end{cases} \quad (16)$$

其中,  $A$  和  $B$  表示两个确定状态. 如把复杂的灰度图像转化成黑白图像,模拟信号转化为稳定的二进制状态(高电平或低电平).

一维空间的模糊边界一般通过两个阈值描述两个确定状态的过渡区间,适用于处理带有模糊信息的一维数据和模糊分类任务. 如在图像分割中,由于图像中的边缘和纹理可能模糊或不确定,传统的基于阈值的分割方法可能效果不佳. 而通过定义模糊边界来描述不同状态像素点的过渡,从而实现更准确的图像分割. 根据边界点的公式,令边界点  $\Gamma_1=\{x \in \mathbb{R} | F(x)=0\}$  和  $\Gamma_2=\{x \in \mathbb{R} | F(x)+b=0\}$ , 且  $\Gamma_1, \Gamma_2$  在  $\mathbb{R}$  中无界. 由一维空间的两个精确边界划分的状态  $\text{state}(x)$  可描述如下:

$$\text{state}(x)=\begin{cases} A, & F(x)+b \geq 0 \\ s, & F(x)+b < 0 \text{ 且 } F(x) > 0 \\ B, & F(x) \leq 0 \end{cases} \quad (17)$$

其中,  $A$  和  $B$  表示两个确定状态,  $s$  表示两个状态转变的中间状态. 如图像处理中,  $s$  对应“既不黑( $B$ )也不白

( $A$ )”的灰色区域(灰度渐变的过渡带),而非绝对的黑白分明;温度控制中,  $s$  是“既不触发加热( $B$ )也不触发制冷( $A$ )”的常温区间(如  $20 \sim 25 \text{ }^\circ\text{C}$ , 人感知的“舒适温度”是模糊概念,无绝对边界).

### 3.1.2 二维空间精确和模糊边界的形式化表示

二维空间的精确边界一般通过直线(曲线)刻画两个状态转变的边界线,适用于处理图像、地图等二维数据,以及目标检测、地图分析、决策等任务. 如金融风险评估(决策)任务中,将顾客抽象为一个向量(包括年龄、收入、信用记录等特征向量)对客户的信用风险评估为接受或拒绝两种确定状态. 下面给出二维空间开放式和封闭式精确边界.

边界线.

在二维空间中,给定向量  $x=(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ . 边界线函数定义为

$$F(x)=\sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{R}} w(k_1, k_2)x_1^{k_1}x_2^{k_2} \quad (18)$$

其中,系数映射  $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , 即  $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}, w(k_1, k_2) \in \mathbb{R}$ .

令边界线  $\Gamma=\{x \in \mathbb{R}^2 | F(x)=0\}$ . 由二维空间精确边界划分的状态  $\text{state}(x)$  描述如下:

$$\text{state}(x)=\begin{cases} A, & F(x) \geq 0 \\ B, & F(x) < 0 \end{cases} \quad (19)$$

式(19)描述了开放式边界线将二维空间划分为两个确定状态  $A$  和  $B$ . 在气候带划分中,快速区分宏观气候区域,辅助地理信息系统的初步数据分类(如亚热带种植水稻,寒温带种植小麦),降低数据处理复杂度;机器人的路径规划,通过直线简化路线,降低计算复杂度.

二维空间的模糊边界一般通过两条曲线  $F(x)=0$  和  $F(x)+b=0$  组合的开放式边界区域,描述两个确定状态的过渡区域,适用于二维模糊信息及线性的模糊分类任务. 如金融风险评估(决策)任务中,由于没有足够的信息,不能够对客户的信用风险评估为接受或拒绝,而可以进行延迟决策,等待进一步地细化信息. 下面给出二维空间开放式和封闭式模糊边界.

开放式边界区域.

根据边界线的公式,令边界线  $\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 | F(x) = 0\}$  和  $\Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 | F(x) + b = 0\}$ ,且  $\Gamma_1, \Gamma_2$  在  $\mathbb{R}^2$  中无界. 由二维空间两个精确边界划分的中状态  $\text{state}(x)$  描述如下:

$$\text{state}(x) = \begin{cases} A, & F(x) + b \geq 0 \\ s, & F(x) + b < 0 \text{ 且 } F(x) > 0 \\ B, & F(x) \leq 0 \end{cases} \quad (20)$$

其中,  $A$  和  $B$  表示两个确定状态,  $s$  表示两个状态转变的中间状态. 上述定义描述了开放式边界区域, 其将二维空间划分为两个确定状态以及一个中间状态. 如在自动驾驶中, 两条平行车道线(通过视觉识别的直线方程)划分区域; 在 VR 场景中, 两条平行边界(如虚拟房间的前后墙)划分交互区域.

封闭式边界区域.

借鉴三维空间封闭式边界空间, 给定非空有限集合  $U$ , 目标概念  $X \subseteq U$ , 簇  $[x]$  由二维空间方法粒化而成的簇(如等价关系), 则在二维空间中, 关于  $X$  的下近似区域  $\underline{\text{aprr}}(X)$  和上近似区域  $\overline{\text{aprr}}(X)$ , 描述如下:

$$\begin{aligned} \underline{\text{aprr}}(X) &= \{x \in U | [x] \subseteq X\} \\ \overline{\text{aprr}}(X) &= \{x \in U | [x] \cap X \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (21)$$

二维空间中的中间状态可以描述如下:

$$\text{BNDR}(X) = \overline{\text{aprr}}(X) - \underline{\text{aprr}}(X) \quad (22)$$

其中, 边界区域  $\text{BNDR}(X)$  表示既不属于正区域  $\text{POSR}$ , 又不属于负区域  $\text{NEGR}$  的对象集合. 由边界区域划分为两个对立状态, 正区域  $\text{POSR}$  和负区域  $\text{NEGR}$  可表示为如下公式:

$$\begin{aligned} \text{POSR}(X) &= \underline{\text{aprr}}(X) \\ \text{NEGR}(X) &= U - \overline{\text{aprr}}(X) \end{aligned} \quad (23)$$

需要注意的是二维空间粒化方法, 如等价关系, 维度增加会使得簇  $[x]$  更加细化(最细粒度的簇  $[x]$  表示一个对象), 而三维(高维)空间的粒化方法, 维度的扩展会改变数据点间的距离度量, 分类结果不一定会呈现细化结果.

### 3.1.3 三维空间精确和模糊边界的形式化表示

三维空间的精确边界一般通过超平面刻画两个状态转变的边界空间, 适用于处理视频、地形等高维数据和三维建模、目标追踪等任务. 如在 CT 或 MRI (Magnetic Resonance Imaging) 扫描中, 医生需要清晰地分割出器官的轮廓(例如肝脏、心脏), 从而支持手术规划或三维重建. 而三维空间的模糊边界一般通过多个精确边界构建的开放式边界空间或上下近似空间构造的封闭式边界空间, 描述两个确定状态的过渡空间, 适用于处理高维的模糊性信息, 以及线性或非线性的模糊分类任务. 如肿瘤与周围组织的界限往往不是绝对清晰

的, 受成像分辨率、病灶性质影响, 常表现为灰度渐变或纹理模糊. 算法需要构造模糊边界区域(如上下近似空间), 帮助医生判断可能的病灶范围, 避免误判.

三维空间的精确边界和模糊边界在 2.3 节已具体讨论过, 形式化表示方法在此就不一一赘述.

### 3.2 边界理论优势与评估分析

前文分别对一维、二维和三维空间中精确与模糊边界的形式化表示进行了描述, 基于边界函数  $F(x)$  的形式化表示, 能够在一维、二维和三维空间中统一描述精确边界以及开放式模糊边界, 其中开放式模糊边界通过选取两个精确边界, 引入“带宽” $b$ , 能够平滑衔接精确边界和模糊边界. 同时封闭式的模糊边界从粗糙集的角度简化描述了封闭式边界的过渡状态, 封闭式模糊边界的构造依赖于等价类  $[x]$  的划分方式. 封闭式模糊边界在一维情形下, 它属于粗糙集的一种特殊情况, 可以对应于简单的阈值划分; 在二维与三维情形下, 可以通过聚类、距离度量或相似性度量等得到等价类, 从而实现从低维到高维的一致扩展. 边界理论覆盖“精确边界/模糊边界”的主流思路, 不仅保留了阈值法与逻辑回归在精确边界上的优势, 还引入了类似粗糙集和模糊集的过渡区间建模能力, 适应不同维度的不确定性建模需求. 为系统评估边界理论的有效性与合理性, 提出以下四类概念性评估指标.

#### (1) 分类层面

在边界理论中, 分类准确性是最基本的评估标准, 用于验证边界划分后样本点的状态归属是否正确. 常用指标包括准确率、精确率、召回率、F1 分数等. 这些指标能够全面反映边界在不同维度下的分类效果. 如阈值法依赖准确率和精确率来验证阈值点划分的合理性; 逻辑回归通过准确率、F1 值等分类性能指标来评价其决策边界的合理性; SVM (Support Vector Machine) 和深度学习模型也普遍采用这些指标作为性能评价标准.

#### (2) 边界层面

边界理论通过函数  $F(x)=0$  的形式化表示, 可以显式地定义边界, 从而引入边界几何指标从空间几何的角度来验证其合理性. 常用指标包括 Hausdorff 距离、平均表面距离、边界拟合误差等. 这些指标不仅考察边界与真实划分的几何贴合度, 还反映边界对样本分布的鲁棒性以及边界自身的形态特征(如光滑度与复杂度). 如 SVM 的边界可用样本点到边界面的最大间隔来评估稳定性; 三维建模方法则广泛采用 Hausdorff 距离和平均表面距离等来衡量边界面与真实边界的接近程度; 即便在一维阈值法中, 阈值点与真实边界点的偏差也可以视作边界几何的体现.

#### (3) 不确定性层面

在边界理论中, 不确定性主要用于检验边界附近

的过渡区域是否被合理刻画,以及方法在噪声和扰动下的表现是否稳定.常用指标包括熵、模糊熵、置信区间等.这些指标能够量化评估模糊边界的不确定性.如粗糙集方法利用边界区域大小来度量知识表达中的不确定性;模糊集方法常用模糊熵等指标来衡量边界的不确定性.

#### (4)复杂度层面

在边界理论中,计算复杂度用于衡量方法在大规模数据和高维空间下的可行性,主要指标包括时间复杂度、空间复杂度以及训练与推理效率.边界理论在低维场景下计算效率较高,但在复杂边界或高维数据下仍需平衡效率与表达能力.如阈值法复杂度最低,几乎可以忽略;逻辑回归适合处理大规模样本,而SVM在高维情况下开销较大;粗糙集和模糊集方法依赖于等价类划分和隶属度计算,随着样本规模增大计算代价显著提升.

### 3.3 边界理论与三支决策关联性分析

三支决策是由里贾纳大学 Yao 教授提出的一种朴素的基三而治、三分而治和化繁为简的理论<sup>[74]</sup>.三支决策理论最初基于 2.2 节所讨论的决策粗糙集,即狭义粗糙集演变而来,后来其思想应用到模糊集<sup>[75]</sup>、阴影集<sup>[76]</sup>、区间集<sup>[77]</sup>、偏序集<sup>[78]</sup>等理论模型,进而演变为广义粗糙集——TAO (Triading-Acting-Optimizing) 模型<sup>[79,80]</sup>,包括制三(Triading)、治略(Acting)、优化(Optimizing)三个阶段,如图 7 所示.三支决策和边界理论存在相似之处,在三支决策中,通过三分法将论域划分为三个互不相交的区域,正区域、边界区域和负区域,并施加不同的策略,最后寻找最佳的“制三”和“治略”组合以产生最好结果.而边界理论强调捕捉两个对立状态转变的边界,类似于三支决策,同样能得到三个区域:两个对立状态的区域和一个过渡区域.但其根据不同的场景需求,过渡区域可能涵盖不同类型的边界,包括精确边界的“点、线、面”和模糊边界的“区间、区域、空间”.这里的“区间、区域、空间”属于模糊边界描述,即“区间、区域、空间”中存在不可分类的对象,可以针对此区域的对象施加延迟决策.不同的是,在“点、线、面”中边界属于精确边界描述,即没有可以施加策略的对象,这导致只能得到两个对立状态的区域,边界理论模型示意如图 6 所示.

## 4 问题分析及研究展望

在人工智能领域中,确定性研究已经取得较大的进展.但是不确定性人工智能研究仍处于探索阶段,边界理论为解决不确定性问题研究提供了新视角和新思路.在不确定性理论研究中,不确定性问题的边界刻画、边界的不确定性度量以及利用边界理论解决不确

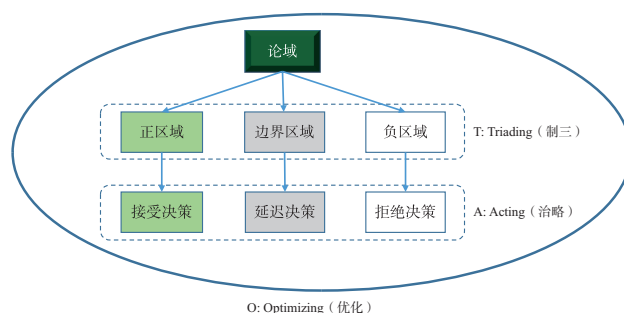


图7 三支决策TAO模型示意图

定性问题等内容还有待进一步研究.本节将聚焦于不确定性问题的边界理论,对当前若干具有挑战性的研究问题进行总结分析和展望,通过对这些问题的探讨,有助于未来推动边界理论的深入研究,进而促进不确定性理论的发展与完善.

#### (1)边界公理化表示

当前状态转变的边界求取问题,通常根据特定的应用场景对边界进行刻画,缺乏基于精确边界“点、线、面”和模糊边界“区间、区域、空间”的公理化表示方法.这使得所构建的理论模型不具有普适性,在将理论模型迁移到其他领域时,即使使用相同类型的边界,其效果可能也会很差.事实上,在当前很多理论方法,更多注重其可移植性,泛化性.以拓扑学为例,它将距离和角度等具体度量抽象化,专注于研究空间的形状和结构,这使得它在物理学、化学、生物学、语言学等领域都有广泛的应用.因此,在公理化表示方面,不确定性问题的边界理论可以考虑引入更加抽象和通用的数学框架,将特定场景的边界理论推广到更加泛化的精确边界和模糊边界的公理化表示框架.同时,还可以讨论精确边界和模糊边界是否可以进一步抽象化,提出一个统一的不确定性问题的边界理论.在此基础上,探讨该理论在实际应用中的可能性和效果,这些问题都是值得深入探讨的.

#### (2)不确定性问题向确定性问题转化(即模糊边界向精确边界转化)

目前,确定性问题的研究方法较为完善,而对于不确定性现象有待深入研究,但人们也获得一些描述方法.如粗糙集、模糊集等都是处理不确定性问题的重要工具.所以可以思考将不确定性问题转化为确定性问题,以便更好地处理不确定性问题,即不确定性问题(模糊边界)如何向确定性问题(精确边界)转化.在不确定性理论研究中,问题的不确定性和确定性不是完全对立的,在一定程度上可以相互转化.以粗糙集为例,当划分的等价类为最细的粒度,即一个等价类对应一个对象,其边界区域便是一条精确刻画的边界线.而模糊集可以通过截集的方式,将模糊边界(0,1)转化为

两个确定状态 0 或 1, 即模糊边界向精确边界转化. 这种确定性有利于人们更好地把握不确定性现象. 因此, 如何寻找模糊边界“区间、区域、空间”向精确边界“点、线、面”转化的条件, 进而将不确定性问题转化为确定性问题, 是一个值得深入研究的课题.

(3) 从边界视角认知不确定性问题(确定边界是认知不确定性问题的关键)

当前围绕不确定性问题研究, 主要基于具体的用户需求, 缺乏统一的视角来解决这些问题. 在处理不确定性问题时, 人脑通常运用边界认知思维来组织和理解世界, 从而作出有效的决策和行动. 而机器则通常根据学习到的知识和规则来识别边界(过渡状态), 进行智能化的决策和行动, 从而处理不确定性问题. 人脑和机器处理不确定性问题有相似之处, 都是从边界视角认知和处理不确定性问题. 然而对于机器的决策和行动, 需要明确的指令(边界)才能进行. 因此, 解决机器认知不确定性问题的关键在于确定边界. 如针对不同类型的图像特点, 采取不同的阈值化方法, 从信息熵、类间方差、平均灰度值、最大灰度和最小灰度值等多个角度将图像像素划分为黑和白两种状态, 虽然它们从不同的图像特点需求出发, 但都是通过各个角度识别前景和背景两个对立状态转变的边界实现图像阈值化. 因此, 如何通过边界视角认知不确定性问题, 是一个值得研究的课题.

(4) 不确定性问题的边界自适应量化(多粒度认知)

当前围绕着边界量化分析研究大多基于数据考虑, 缺乏结合知识和数据驱动的自适应边界刻画方法. 如机器学习分类任务中的逻辑回归和感知机等方法基于数据空间, 从细粒度出发, 通过分析数据点间的关系, 进而识别边界, 处理不确定性问题, 然而, 人类的认知过程是基于知识空间, 通过数据与知识之间的映射与推理寻找边界. 计算机识别边界过程和人类寻找边界过程不一致, 这导致了数据与知识分离表达, 使得边界刻画方法难以解释等问题. 为了解决此问题, Wang 等人<sup>[81]</sup>提出了一种新型的多粒度认知计算模型——数据驱动的粒认知计算模型, 模型将知识与数据进行统一表达, 数据处于模型的最底层, 被视为是知识在最细粒度上的表达形式; 知识处于模型的最上层, 被视为是数据在粗粒度层次上的表达形式. 模型结合了人类“大范围首先”的认知机制即“由粗到细”的认知过程, 也结合了机器学习系统“由细到粗”的信息处理机制, 解决了“知识与数据分离”的问题<sup>[82]</sup>. 因此, 如何构建知识与数据联合驱动的边界自适应量化方法, 并用于认知计算, 是不确定性理论研究的一个重要课题.

(5) 不确定性问题的边界认知思维与动态求解

当前围绕不确定性问题的边界大都是基于静态环境, 缺乏针对动态背景的边界求解方法. 然而, 现实世界处于不停地运动与变化之中, 状态的动态性会影响原始数据, 而状态划分又是依据数据进行的, 这就导致了动态环境下的状态分类结果可能与静态环境下得出的结果有较大出入(“精确”与“模糊”边界的定义在动态场景中可能失效). 因此, 如何在动态环境下捕捉对立状态转变的边界显得尤为重要. 动态性主要体现在以下四个方面: (a) 对象增加与删除; (b) 属性增加与删除; (c) 属性值修改; (d) 状态的更新与修改. 过往的研究主要关注于固定的模型或者特定的场景下, 探讨以上四点动态环境下边界的变化. 在此基础上, 是否可以抽象出动态环境下精确边界和模糊边界变化的共性与差异性呢? 将固定模型或特定场景泛化为普适场景, 从而将固定模式的静态数据空间推广到泛化的动态数据空间, 探讨边界动态演化机制(如实时数据流中阈值的变化), 有助于实现对事物的动态认知.

## 5 结束语

在确定性方面的科学研究已经取得诸多成就, 但是在很多领域中的不确定性研究仍然处于探索阶段. 以计算机领域为例, 随着人工智能技术在各个领域的迅速发展和广泛应用, 人们越来越关注深度学习模型这种“黑盒”存在的安全隐患, 对模型的安全性和可控性的需求日益增加. 模型的可解释性已成为当前人工智能应用所面临的主要挑战之一. 针对人工智能算法的可解释性研究, 我们是否可以探寻算法模型的边界? 以控制输出结果, 这样就可以将输入和输出进行可解释的关联性分析, 并将焦点转移到对机器学习、深度学习等算法边界问题的探索上. 同时, 有的具有可解释性算法并不是寻找边界, 但是研究的问题本质上也是边界问题. 如聚类算法并不依赖于预先定义的边界, 而是根据对象之间的相似性自动进行分组. 尽管如此, 在许多聚类算法实验中, 通常会绘制聚类边界进行可视化表示, 并用于评估聚类质量. 人类在处理不确定性问题时, 本质上是通过寻找事物间的边界, 进行事物的认知. 同时, 本文所探讨的不确定性问题的边界理论为人们在研究不确定性人工智能和认知科学等相关学科提供了新的思路.

## 参考文献

- [1] 王国胤, 张清华, 马希骛, 等. 知识不确定性问题的粒计算模型[J]. 软件学报, 2011, 22(4): 676-694.  
WANG G Y, ZHANG Q H, MA X A, et al. Granular computing models for knowledge uncertainty[J]. Journal of

- Software, 2011, 22(4): 676-694. (in Chinese)
- [2] 李德毅, 刘常昱, 杜鹞, 等. 不确定性人工智能[J]. 软件学报, 2004, 15(11): 1583-1594.  
LI D Y, LIU C Y, DU Y, et al. Artificial intelligence with uncertainty[J]. Journal of Software, 2004, 15(11): 1583-1594. (in Chinese)
- [3] 智慧来, 张丽, 李金海. 旁观者视角下粒的多层次描述[J]. 电子学报, 2022, 50(11): 2568-2574.  
ZHI H L, ZHANG L, LI J H. Multi-level description of granules from an outsider's perspective[J]. Acta Electronica Sinica, 2022, 50(11): 2568-2574. (in Chinese)
- [4] 张清华, 王宇泰, 赵凡, 等. 复杂问题求解的多粒度计算框架[J]. 中国科学: 信息科学, 2025, 55(5): 1122-1139.  
ZHANG Q H, WANG Y T, ZHAO F, et al. Multi-granularity computing framework for complex problem solving[J]. Scientia Sinica Informationis, 2025, 55(5): 1122-1139. (in Chinese)
- [5] 艾萨克·牛顿. 自然哲学的数学原理[M]. 范明, 译. 上海: 上海译文出版社, 2021.  
NEWTON I. Mathematical Principles of Natural Philosophy and its System of the World[M]. FAN M, Trans. Shanghai: Shanghai Translation Publishing House, 2021. (in Chinese)
- [6] STRIEN M V. On the origins and foundations of Laplacian determinism[J]. Studies in History and Philosophy of Science Part A, 2014, 45: 24-31.
- [7] BUSCH P, HEINONEN T, LAHTI P. Heisenberg's uncertainty principle[J]. Physics Reports, 2007, 452(6): 155-176.
- [8] SMULLYAN R M. Gödel's Incompleteness Theorems[M]. New York: Oxford University Press, 1992.
- [9] KLINE M. 数学: 确定性的丧失[M]. 李宏魁, 译. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1997.  
KLINE M. Mathematics: The Loss of Certainty[M]. LI H K, Trans. Changsha: Hunan Science and Technology Press, 1997. (in Chinese)
- [10] KUNDA Z. The case for motivated reasoning[J]. Psychological Bulletin, 1990, 108(3): 480-498.
- [11] SOX H C, HIGGINS M C, OWENS D K, et al. Medical Decision Making[M]. New York: Wiley, 2024.
- [12] NGUYEN A T, TANIGUCHI T, ECIOLAZA L, et al. Fuzzy control systems: Past, present and future[J]. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2019, 14(1): 56-68.
- [13] KULKARNI V G. Modeling and Analysis of Stochastic Systems[M]. London: Chapman & Hall, 1995.
- [14] FIELD H. Indeterminacy, degree of belief, and excluded middle[J]. Noûs, 2000, 34(1): 1-30.
- [15] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [16] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer & Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.
- [17] LEIBNIZ G W. The Monadology: 1714[M]. Berlin: Springer, 1989.
- [18] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. The Bell System Technical Journal, 1948, 27(3): 379-423.
- [19] KAPUR J N, SAHOO P K, WONG A K C. A new method for gray-level picture thresholding using the entropy of the histogram[J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1985, 29(3): 273-285.
- [20] 邹耀斌, 邓世成, 孟祥丹, 等. 多向加权Tsallis熵最大化导向的自动阈值分割方法[J]. 电子学报, 2024, 52(1): 129-143.  
ZOU Y B, DENG S C, MENG X D, et al. Automatic thresholding segmentation method guided by maximizing multi-directional weighted tsallis entropy[J]. Acta Electronica Sinica, 2024, 52(1): 129-143. (in Chinese)
- [21] ROSENBLATT F. The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain[J]. Psychological Review, 1958, 65(6): 386-408.
- [22] PARE S, KUMAR A, SINGH G K, et al. Image segmentation using multilevel thresholding: A research review[J]. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering, 2020, 44(1): 1-29.
- [23] OTSU N. A threshold selection method from gray-level histograms[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1979, 9(1): 62-66.
- [24] NIBLACK W. An Introduction to Digital Image Processing[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall International, 1986.
- [25] BERNSE J. Dynamic thresholding of grey-level images[C]// Proceedings of the 8th International Conference on Pattern Recognition. Paris: AFCET, 1986: 1251-1255.
- [26] QUINLAN J R. Induction of decision trees[J]. Machine Learning, 1986, 1(1): 81-106.
- [27] QUINLAN J R. C4.5: Programs for Machine Learning[M]. San Mateo: Morgan Kaufmann Publishers, 1993.
- [28] BREIMAN L, FRIEDMAN J, STONE C J, et al. Classification and Regression Trees[M]. New York: Chapman and Hall/CRC, 1984.
- [29] POLANSKY M G, HERRMANN C, HUR J, et al. Boundary attention: Learning to find faint boundaries at any resolution[EB/OL]. (2024-05-14) [2025-06-30]. <https://arxiv.org/html/2401.00935v1>.
- [30] ZHONG Z H, CAO M D, JI X, et al. Blur interpolation transformer for real-world motion from blur[C]//2023 IEEE/

- CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway: IEEE, 2023: 5713-5723.
- [31] XU Y, SHANG L, YE J X, et al. Dash: Semi-supervised learning with dynamic thresholding[C]// Proceedings of the 38th International Conference on Machine Learning. New York: ACM, 2021, 139: 11525-11536.
- [32] HUANG S Y, MA J W, HAN G X, et al. Task-adaptive negative envision for few-shot open-set recognition[C]//2022 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway: IEEE, 2022: 7161-7170.
- [33] LEI Q, ZHONG J, WANG C, et al. Adaptive thresholding based on multi-task learning for refining binary medical image segmentation[C]//2023 IEEE International Conference on Bioinformatics and Biomedicine. Piscataway: IEEE, 2024: 3059-3066.
- [34] ZHOU C X, HUANG Y P, PU M Y, et al. The treasure beneath multiple annotations: An uncertainty-aware edge detector[C]//2023 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway: IEEE, 2023: 15507-15517.
- [35] WANG Y D, CHEN H, HENG Q, et al. FreeMatch: Self-adaptive thresholding for semi-supervised learning[EB/OL]. (2023-01-31)[2025-07-15]. <https://arXiv.org/abs/2205.07246>.
- [36] 孔告化, 石爱菊. 概率论与数理统计[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2022.
- KONG G H, SHI A J. Probability and Statistics[M]. Beijing: Posts & Telecom Press, 2022. (in Chinese)
- [37] HE S F, WANG Y M, PAN X H, et al. A novel behavioral three-way decision model with application to the treatment of mild symptoms of COVID-19[J]. Applied Soft Computing, 2022, 124: 109055.
- [38] ABDAR M, SAMAMI M, DEGHANI MAHMOODABAD S, et al. Uncertainty quantification in skin cancer classification using three-way decision-based Bayesian deep learning[J]. Computers in Biology and Medicine, 2021, 135: 104418.
- [39] JIANG C M, DUAN Y. A novel three-way deep learning approach for multigranularity fuzzy association analysis of time series data[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2024, 32(9): 4835-4845.
- [40] LI D, XIONG W M, LUO T, et al. 3WAUS: A novel three-way adaptive uncertainty-suppressing model for facial expression recognition[J]. Information Sciences, 2024, 677: 120962.
- [41] PAN X H, WANG Y M, HE S F, et al. An interval type-2 fuzzy ORESTE method for waste-to-energy plant site selection: A case study in China[J]. Applied Soft Computing, 2023, 136: 110092.
- [42] MICHAEL LINCOFF A, BROWN-FRANDSEN K, COLHOUN H M, et al. Semaglutide and cardiovascular outcomes in obesity without diabetes[J]. The New England Journal of Medicine, 2023, 389(24): 2221-2232.
- [43] WANG X H, WANG B, LI T T, et al. Multi-criteria fuzzy portfolio selection based on three-way decisions and cumulative prospect theory[J]. Applied Soft Computing, 2023, 134: 110033.
- [44] COX D R. The regression analysis of binary sequences[J]. Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology, 1958, 20(2): 215-242.
- [45] 李航. 统计学习方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- LI H. Statistical Learning Method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2012. (in Chinese)
- [46] CORTES C, VAPNIK V. Support-vector networks[J]. Machine Learning, 1995, 20(3): 273-297.
- [47] WU Y C, LI X Q, DAI S M, et al. Hierarchical semantic contrast for weakly supervised semantic segmentation[C]// Proceedings of the Thirty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence. New York: ACM, 2023: 1542-1550.
- [48] KANG W T, LIU G W, SHAH M, et al. SegVG: Transferring object bounding box to segmentation for visual grounding[M]//Computer Vision - ECCV 2024. Cham: Springer, 2025: 57-75.
- [49] LIN Y, ZHANG D, FANG X, et al. Rethinking boundary detection in deep learning models for medical image segmentation[M]//Information Processing in Medical Imaging. Cham: Springer, 2023: 730-742.
- [50] PU M Y, HUANG Y P, GUAN Q J, et al. RINDNet++: Edge detection for discontinuity in reflectance, illumination, normal, and depth[J]. International Journal of Computer Vision, 2025, 133(10): 7486-7510.
- [51] PU M Y, HUANG Y P, LIU Y M, et al. EDTER: Edge detection with transformer[C]//2022 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Piscataway: IEEE, 2022: 1392-1402.
- [52] CHEN G P, LI L, ZHANG J X, et al. Rethinking the unpretentious U-Net for medical ultrasound image segmentation[J]. Pattern Recognition, 2023, 142: 109728.
- [53] ZHANG S X, YANG C, ZHU X B, et al. Arbitrary shape text detection via boundary transformer[J]. IEEE Transactions on Multimedia, 2024, 26: 1747-1760.
- [54] YAO Y Y. Decision-theoretic rough set models[C]//Rough Sets and Knowledge Technology. Berlin: Springer, 2007:

- 1-12.
- [55] PENG J, CHEN Y. Density-based clustering with boundary samples verification[J]. *Applied Soft Computing*, 2024, 159: 111685.
- [56] CHU X L, SUN B Z, ZOU H, et al. Multi-modal incomplete label information three-way bidirectional decision-making: Applications of disease assessment[J]. *Information Fusion*, 2025, 113: 102615.
- [57] LEI M Q, WU H C, LV X H, et al. ConDSeg: A general medical image segmentation framework via contrast-driven feature enhancement[J]. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2025, 39(5): 4571-4579.
- [58] WANG Y H, LIU S K, LI L, et al. SwinShadow: Shifted window for ambiguous adjacent shadow detection[J]. *ACM Transactions on Multimedia Computing, Communications, and Applications*, 2024, 20(11): 1-20.
- [59] LIN Y N, WANG Y Y, LYU G Y, et al. Enhance multi-view classification through multi-scale alignment and expanded boundary[C]//*The Thirteenth International Conference on Learning Representations*. Washington DC: ICLR, 2025: 3591.
- [60] LIN Y N, CAI H H, HANG J Y, et al. Mitigating local cohesion and global sparseness in graph contrastive learning with fuzzy boundaries[C]//*Proceedings of the 42nd International Conference on Machine Learning*. New York: ACM, 2025: 37745-37761.
- [61] MIN F, LIU F L, WEN L Y, et al. Tri-partition cost-sensitive active learning through kNN[J]. *Soft Computing*, 2019, 23(5): 1557-1572.
- [62] MA H Y, LIAO Q M, ZHANG J C, et al. An  $\alpha$ -matte boundary defocus model-based cascaded network for multi-focus image fusion[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2020, 29: 8668-8679.
- [63] WU M Y, DAI H Z, YAO K X, et al. BG-triangle: Bézier Gaussian triangle for 3D vectorization and rendering[C]//*2025 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Piscataway: IEEE, 2025: 16197-16207.
- [64] LIU H Z, WANG Y L, CHU H Z, et al. Enhancing pseudo label quality for pedestrian and cyclist in weakly supervised 3D object detection[J]. *Neurocomputing*, 2024, 584: 127531.
- [65] MA D, FANG H Y, WANG N N, et al. A low-cost 3D reconstruction and measurement system based on structure-from-motion (SFM) and multi-view stereo (MVS) for sewer pipelines[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2023, 141: 105345.
- [66] LI Z W, WU Y, XU T C, et al. A fast 3D lung image reconstruction method based on CT pixel matrices learning with electrical impedance tomography[J]. *Measurement*, 2025, 251: 117176.
- [67] LI L, ZHOU Z Y, WU S P, et al. Multi-scale edge-guided learning for 3D reconstruction[J]. *ACM Transactions on Multimedia Computing, Communications, and Applications*, 2023, 19(3): 1-24.
- [68] HUO R T, CHEN J K, ZHANG Y, et al. 3D skeleton aware driver behavior recognition framework for autonomous driving system[J]. *Neurocomputing*, 2025, 613: 128743.
- [69] CHEN S C, XIE F, CHEN S H, et al. TdDS-UNet: Top-down deeply supervised U-Net for the delineation of 3D colorectal cancer[J]. *Physics in Medicine & Biology*, 2024, 69(5): 055018.
- [70] NAM S J, KEHTARNAVAZ N. Flash shadow detection and removal in stereo photography[J]. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 2012, 58(2): 205-211.
- [71] SIKANDER G, ANWAR S, HUSNAIN G, et al. An adaptive snake based shadow segmentation for robust driver fatigue detection: A 3D facial feature based photometric stereo perspective[J]. *IEEE Access*, 2023, 11: 99178-99188.
- [72] LI Z X, JI S, FAN D Z, et al. Reconstruction of 3D information of buildings from single-view images based on shadow information[J]. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 2024, 13(3): 62.
- [73] YAN H, LIN F, LI J, et al. Shadow based non-line-of-sight pedestrian rushing detection for automated driving[J]. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2024, 23(12): 14754-14767.
- [74] YAO Y Y. Three-way decision and granular computing[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2018, 103: 107-123.
- [75] DENG X F, YAO Y Y. Decision-theoretic three-way approximations of fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2014, 279: 702-715.
- [76] YAO Y Y, WANG S, DENG X F. Constructing shadowed sets and three-way approximations of fuzzy sets[J]. *Information Sciences*, 2017, 412/413: 132-153.
- [77] YAO Y Y. Interval-set algebra for qualitative knowledge representation[C]//*Proceedings of ICCI'93: 5th International Conference on Computing and Information*. Piscataway: IEEE, 2002: 370-374.
- [78] YAO Y Y. An outline of a theory of three-way decisions[C]//*Rough Sets and Current Trends in Computing*. Berlin: Springer, 2012: 1-17.
- [79] YAO Y Y. The geometry of three-way decision[J]. *Applied*

Intelligence, 2021, 51(9): 6298-6325.

[80] YAO Y Y. The Dao of three-way decision and three-world thinking[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2023, 162: 109032.

[81] WANG G Y. DGCC: Data-driven granular cognitive computing[J]. Granular Computing, 2017, 2(4): 343-355.

[82] 王国胤, 傅顺, 杨洁, 等. 基于多粒度认知的智能计算研究[J]. 计算机学报, 2022, 45(6): 1161-1175.

WANG G Y, FU S, YANG J, et al. A review of research on multi-granularity cognition based intelligent computing[J]. Chinese Journal of Computers, 2022, 45(6): 1161-1175. (in Chinese)

## 作者简介



**张清华** 男, 1974年11月出生于重庆市. 教授、博士生导师. 现为重庆邮电大学副校长. 主要研究方向为粒计算、不确定性信息处理、大数据智能.

E-mail: zhangqh@cqupt.edu.cn



**高满** 男, 1994年11月出生于河南省南阳市. 重庆邮电大学计算机科学与技术学院博士研究生. 主要研究方向为粒计算、阴影集、三支决策.

E-mail: d200201005@stu.cqupt.edu.cn



**洪承鑫** 男, 1997年1月出生于安徽省安庆市. 重庆邮电大学计算机科学与技术学院博士研究生. 主要研究方向为粒计算、三支决策、不确定性信息处理.

E-mail: hongchengxinaq@163.com



**程云龙** 男, 1978年3月出生于湖北省利川市. 副教授、硕士生导师. 主要研究方向为粒计算、不确定性信息处理、数据挖掘.

E-mail: chengyl@cqupt.edu.cn



**赵凡** 女, 1996年8月出生于山西省忻州市. 现为陕西师范大学数学科学学院讲师. 主要研究方向为粒计算、不确定信息处理与度量.

E-mail: 837062256@qq.com



**王国胤** 男, 1970年3月出生于重庆市. 教授、博士生导师. 现为重庆师范大学校长. 主要研究方向为粒计算、认知计算、人工智能.

E-mail: wanggy@cqnu.edu.cn