

# 球坐标系下异形金属谐振腔电磁特性的解析分析

李德贵, 孙 琦, 马子寅, 梅中磊\*

(兰州大学信息科学与工程学院, 甘肃兰州 730000)

**摘要:** 分离变量法分析球形谐振腔的亥姆霍兹方程时, 其通解只能取整数阶第一类连带勒让德函数, 因此难以有效表征该结构派生得到的异形金属谐振腔的电磁特性. 针对上述问题, 本研究提出一种异形金属谐振腔电磁特性的普适性解析分析框架. 通过引入广义超几何函数, 构建了任意阶、次的的第一类、第二类连带勒让德函数, 获得亥姆霍兹方程的完备通解. 在此基础上, 基于伯格尼斯位函数法, 推导得到异形金属谐振腔在横磁、横电模式下基模与高阶模电磁场的解析解, 并通过有限元数值仿真进行验证. 结果表明, 解析解与数值解的谐振频率在基模、高阶模的相对误差分别为 0.070% 和 0.069%; 而且, 两个解的归一化电磁场分布完全一致, 其基模、高阶模的均方根误差仅为  $1.670 \times 10^{-3}$  和  $2.667 \times 10^{-3}$ , 验证了研究方法的准确性与可靠性. 本研究不仅成功将经典球形腔结论推广至异形结构, 也拓展了电磁场解析建模的应用范围, 有助于新型微波、光学器件等的精确设计.

**关键词:** 异形金属谐振腔; 分离变量法; 球坐标; 亥姆霍兹方程; 任意阶、次连带勒让德函数; 伯格尼斯位函数

**基金项目:** 国家重点研发计划(No.2019YFA0405403)

**中图分类号:** TN815; O441.4

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112(2025)12-4288-08

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.12263/DZXB.20250644

## Analytical Analysis of Electromagnetic Properties of Shaped Metal Resonant Cavity in Spherical Coordinate System

LI De-gui, SUN Qi, MA Zi-yin, MEI Zhong-lei\*

(College of Information Science and Engineering, Lanzhou University, Lanzhou, Gansu 730000, China)

**Abstract:** As the general solution of the Helmholtz equations for spherical resonant cavities analyzed with the separated-variable method only takes the integer-order first-type associated Legendre function, it is confined to characterize the electromagnetic properties of the shaped-metal resonant cavity derived from this structure invalidly. To address the aforementioned drawbacks, in this study, a universal analytical analytical framework of electromagnetic properties of shaped metal resonant cavity is proposed. The first and the second type of arbitrary order and degree of associated Legendre functions are constructed by introducing the generalized hypergeometric function, so as to complete the general solution of Helmholtz equations. Based on this, the analytical solutions of the electromagnetic fields of the fundamental and higher-order modes in the transverse magnetic and transverse electric modes are derived based on the Borgins' method of potential function, as well as verified by finite element numerical simulations. The results indicated that the relative errors between the analytical and numerical solutions for the resonance frequencies of fundamental and higher-order modes are 0.070% and 0.069%, respectively. Furthermore, the normalized electromagnetic field distributions of both solutions are mutually consistent, with root-mean-square errors of only  $1.670 \times 10^{-3}$  and  $2.667 \times 10^{-3}$ , respectively, validating the accuracy and reliability of the research method. This study not only successfully extends the conclusion of classical spherical cavities to shaped structures, but also expands the application scope of analytical modeling of electromagnetic fields, which is instrumental to precise design of novel microwave and optical devices.

**Key words:** shaped metal resonant cavity; separate variables method; spherical coordinates; Helmholtz equation; arbitrary order and degree of associated legendre functions; Borgins' potential function

**Foundation Item(s):** National Key Research and Development Program of China (No.2019YFA0405403)

## 1 引言

亥姆霍兹方程作为描述时谐标量场的核心偏微分方程,在微波通信、光学成像以及电磁散射等诸多领域占据重要地位<sup>[1-3]</sup>. 在球坐标系下,该方程可通过分离变量法将复杂的三维问题转化为多个常微分方程而获得具有物理意义的解析解,因此广泛应用于球模型电磁模式分布分析、球形谐振腔本征频率计算等领域,进而为天线设计、光子晶体开发等工程实践提供了重要理论支撑<sup>[4-7]</sup>. 然而,既有研究存在显著局限,多数工作聚焦于具有对称性的理想球形谐振腔,导致分离变量得到的通解通常仅包含整数次、整数阶的第一类勒让德函数,严重制约了理论模型的适用范围,进而导致研究结论难以推广至具有复杂几何特征的异形谐振腔系统<sup>[8-11]</sup>.

针对上述局限,本研究提出一种基于广义特殊函数的解析方法,系统研究球坐标系下异形金属谐振腔的电磁特性. 首先,通过分离变量法推导亥姆霍兹方程的完备通解,尤其是在极角方向引入广义超几何函数定义任意实数的  $\rho$  次、 $\nu$  阶勒让德函数  $P_\nu^\rho(x)$ 、 $Q_\nu^\rho(x)$ ,以突破传统整数阶解的限制,确保研究结论的普适性;其次,利用伯格尼斯位函数法结合一般性边界条件,系统地解析分析该异形金属谐振腔在横磁(Transverse-Magnetic, TM)、横电(Transverse-Electric, TE)模式下基模与高阶模的本征频率与电磁特性;最后,采用基于有限元的数值仿真来对比验证理论解析的结果,确保研究结论的物理准确性与工程可靠性. 本研究为球坐标系下异形金属谐振腔设计提供了普适性设计准则,为新型微波器件与光学器件的研发奠定了理论基础.

## 2 研究方法

### 2.1 分离变量法求解亥姆霍兹方程的完备通解

球坐标系下,由六个坐标面构成一异形金属谐振腔,如图 1 所示. 其中,  $r \in (a, b)$ 、 $\theta \in (c, d)$ 、 $\varphi \in (e, f)$ . 则标量亥姆霍兹方程可以写为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0 \quad (1)$$

式中,  $u$  表示电磁场的任一直角分量,此处是与伯格尼斯位函数相关的一个标量场分布<sup>[12]</sup>,  $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$  为波数.

设待求场函数为  $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ ,代入上式并化简,可以得到三个常微分方程:

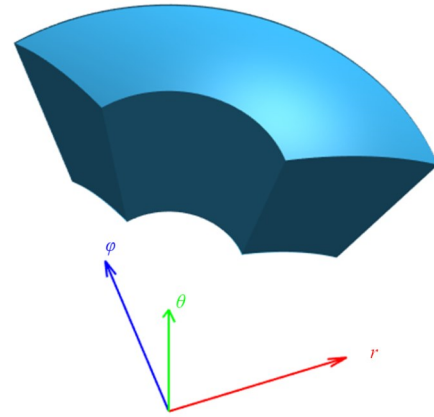


图1 异形金属谐振腔的几何模型

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \rho^2 \Phi = 0 \quad (2)$$

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2 r^2 - \nu(\nu+1)] R = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ \nu(\nu+1) - \frac{\rho^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (4)$$

式中,  $\rho, k, \nu$  为分离常数. 上述方程结合相应的边界条件,即构成所谓的本征值问题<sup>[13]</sup>. 本研究中,三个本征值均为任意实数. 一般情况下,亥姆霍兹方程在球坐标系下分离变量得到的完备通解为

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{\nu, \rho, k} [A \sin \rho \varphi + B \cos \rho \varphi] \cdot \left[ C \frac{1}{\sqrt{r}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) + D \frac{1}{\sqrt{r}} N_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \right] \cdot [EP_\nu^\rho(\cos \theta) + FQ_\nu^\rho(\cos \theta)] \quad (5)$$

式中,  $J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)$ 、 $N_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)$  分别为半奇数阶贝塞尔函数与诺依曼函数<sup>[14]</sup>;  $P_\nu^\rho(\cos \theta)$ 、 $Q_\nu^\rho(\cos \theta)$  分别为  $\rho$  次、 $\nu$  阶的第一类、第二类勒让德函数<sup>[15]</sup>;  $A, B, C, D, E, F$  为待定系数,一般情况下也是  $\rho, k, \nu$  的隐函数.

### 2.2 球坐标系下的伯格尼斯位函数法

在球坐标系下,为了计算得到谐振腔内的电磁场分布,可设法找到两个标量辅助函数  $U, V$ , 称为伯格尼斯位函数,使得  $E_r$  只是  $U$  的函数,  $H_r$  只是  $V$  的函数,且各场分量可以用  $U, V$  显式表示出来<sup>[12]</sup>.  $U, V$  满足下列二阶微分方程:

$$\nabla_r^2 U + \frac{\partial^2}{\partial^2 u_3} U + k^2 U = 0 \quad (6)$$

$$\nabla_r^2 V + \frac{\partial^2}{\partial^2 u_3} V + k^2 V = 0 \quad (7)$$

式中,  $\nabla_r^2$  为  $u_1, u_2$  的二维拉普拉斯运算. 对于球坐标系来讲,式(6)和式(7)并非亥姆霍兹方程.

令  $U=ru, V=ru$ , 则可以证明函数  $u$  满足球坐标系下的标量亥姆霍兹方程, 于是可以通过求解函数  $u$  得到  $U, V$ , 进而得到电磁场的各个分量. 其中:

$$\begin{cases} U(r, \theta, \varphi) \\ V(r, \theta, \varphi) \end{cases} = \sum_{v=0} \sum_{\rho=0} [A \sin \rho \varphi + B \cos \rho \varphi] \cdot \left[ C \frac{1}{\sqrt{r}} J_{v+\frac{1}{2}}(kr) + D \frac{1}{\sqrt{r}} N_{v+\frac{1}{2}}(kr) \right] \cdot [EP_v^{\rho}(\cos \theta) + FQ_v^{\rho}(\cos \theta)] \quad (8)$$

求出  $U, V$  函数后, 即可得到球坐标系下各场分量的表达式<sup>[12]</sup>:

$$E_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial r} - \frac{j\omega\mu}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (9)$$

$$E_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial r} + \frac{j\omega\mu}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (10)$$

$$E_r = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + k^2 U \quad (11)$$

$$H_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial r} + \frac{j\omega\varepsilon}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \quad (12)$$

$$H_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial r} - \frac{j\omega\varepsilon}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (13)$$

$$H_r = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + k^2 V \quad (14)$$

### 2.3 联带勒让德函数的计算

一般情况下, 上述求解的难点在于勒让德函数的计算. 本文采用广义超几何函数定义两类普遍的联带勒让德函数<sup>[16,17]</sup>. 具体如下:

$$P_v^{\rho}(x) = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\rho}{2}} \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} F\left(v+1, -v; 1-\rho; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \quad (15)$$

$$Q_v^{\rho}(x) = \frac{\pi}{2\sin(\rho\pi)} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\rho\pi) \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\rho}{2}} \frac{1}{\Gamma(1-\rho)} \\ \cdot F\left(v+1, -v; 1-\rho; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \\ - \frac{\Gamma(v+\rho+1)}{\Gamma(v-\rho+1)} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{\rho}{2}} \\ \cdot \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} F\left(v+1, -v; 1+\rho; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中,  $F(a, b; c; x)$  为广义超几何函数;  $\Gamma(1-\rho)$  为伽马函数. 式(15)对任意实数的  $\rho, v$  且  $x = \cos \theta \in (-1, 1)$  均成立; 式(16)当且仅当  $\rho+v = -1, -2, -3, \dots$  时无意义.

## 3 结果与讨论

下面以图1所示的异形金属谐振腔为例, 结合相应的边界条件, 解析分析该谐振腔在 TM 和 TE 两个模式下的电磁特性. 设模型的几何参数如下: 径向参数  $a = 4.55 \text{ mm}$ 、 $b = 7.3 \text{ mm}$ ; 极角参数  $c = 0.3 \text{ rad}$ 、 $d = 0.75 \text{ rad}$ ; 方位角参数  $e = 0 \text{ rad}$ 、 $f = 1.8 \text{ rad}$ .

### 3.1 TM 模式

在 TM 模式下,  $V=0$ , 对应边界条件为

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0 \quad (17)$$

$$U|_{\theta=c} = 0, \quad U|_{\theta=d} = 0 \quad (18)$$

$$U|_{\varphi=0} = 0, \quad U|_{\varphi=f} = 0 \quad (19)$$

由式(8)与边界条件(19)所对应的本征值问题, 可得:

$$\Phi(\varphi) = A_p \sin \rho \varphi = A_p \sin \frac{p\pi}{f} \varphi \quad (20)$$

式中,  $A_p$  为任意常数, 本征值  $\rho = \frac{p\pi}{f}$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots$ .

当施加在极角  $\theta$  方向的边界条件, 即考虑式(8)和式(18)所构成的本征值问题时, 可以得到超越方程<sup>[18]</sup>:

$$\begin{vmatrix} P_v^{\rho}(\cos c) & Q_v^{\rho}(\cos c) \\ P_v^{\rho}(\cos d) & Q_v^{\rho}(\cos d) \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

该方程有无数个根, 记为  $v_i^{(p)}$ , 表示  $\rho = \frac{p\pi}{f}$  时, 方程(21)

的第  $i$  个根. 取  $p=1$ , 即有  $\rho = 1.745$ , 此时式(21)满足的超越方程图像如图2所示, 用数值法得关于极角的第一大于  $\rho$  的本征值  $v_1^{(1)} = 7.284$ .

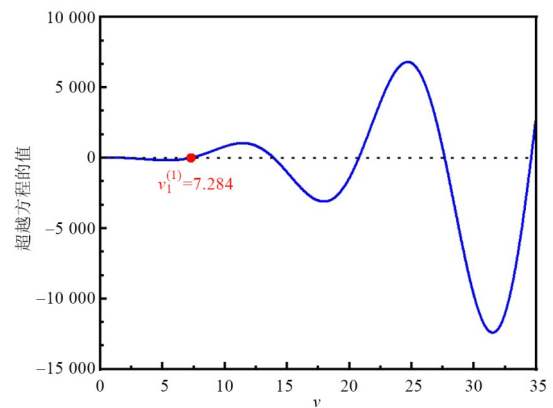


图2 基于极角的超越方程的本征值求解

易得上述情况下极角方向的具体解为

$$\Theta(\theta) = E [P_v^{\rho}(\cos \theta) + E' Q_v^{\rho}(\cos \theta)] \quad (22)$$

式中,  $E' = -0.085$ ,  $E$  为任意常数.

同理, 当施加在径向  $r$  方向的边界条件, 即求解式(8)和式(17)所构成的本征值问题时, 有超越方程<sup>[18,19]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}(ka)}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a} J'_{\nu+\frac{1}{2}}(ka) \frac{N_{\nu+\frac{1}{2}}(ka)}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a} N'_{\nu+\frac{1}{2}}(ka) \\ \frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}(kb)}{2\sqrt{b}} + \sqrt{b} J'_{\nu+\frac{1}{2}}(kb) \frac{N_{\nu+\frac{1}{2}}(kb)}{2\sqrt{b}} + \sqrt{b} N'_{\nu+\frac{1}{2}}(kb) \end{cases} = 0 \quad (23)$$

同理,该方程有无数个根,可以用  $k_j^{(p)}$  表示第  $j$  个根. 当  $p=1, i=1$  时,式(23)所对应的超越函数图像如图 3 所示. 数值求解径向本征值  $k$  的第 1 个根为  $k_{11}^{(1)}=1\ 288.613$ ,即为基模  $TM_{11}^{(1)}$  所对应的波数.

此时,径向方向的具体解为

$$R(r) = C \left[ \sqrt{r} J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) + C' \sqrt{r} N_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \right] \quad (24)$$

其中,  $C'=-0.091$ .

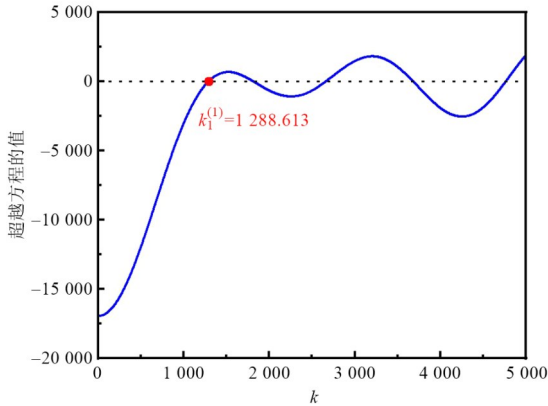


图 3 基于径向的超越方程的本征值求解

容易得到该异形金属谐振腔在  $TM_{11}^{(1)}$  下的频率为 61.527 GHz. 此时,谐振腔中函数  $U$  的具体解为

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{\nu, \rho, k} A' \sin \rho \varphi \left[ P_{\nu}^{\rho}(\cos \theta) + E' Q_{\nu}^{\rho}(\cos \theta) \right] \cdot \left[ \sqrt{r} J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) + C' \sqrt{r} N_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \right] \quad (25)$$

式中,  $A'$  为任意常数.

联立式(9)~式(11)即可得到谐振腔在  $TM_{11}^{(1)}$  下归一化电场分布的解析解<sup>[20]</sup>,如图 4(a)~图 4(c)所示.

同时,利用有限元法对该谐振腔进行数值仿真,得到其在  $TM_{11}^{(1)}$  下的频率为 61.484 GHz,与解析分析的本征频率一致. 不仅如此,数值仿真的归一化电场分布与解析结果也具有较好的一致性,如图 4(d)~图 4(f)所示. 为验证电场分布的吻合度,分别在  $r=6\text{ mm}$ 、 $\theta=0.5\text{ rad}$ 、 $\varphi=0.9\text{ rad}$  所对应三个截面下计算解析解与数值仿真解的误差分布,如图 4(g)~图 4(i)所示. 结果表明,两种解在三个面的均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)分别为  $1.670 \times 10^{-3}$ 、 $1.241 \times 10^{-2}$ 、 $2.124 \times 10^{-2}$ ,验证了解析结果的准确性. 产生误差的主要原因是解析求解的本征值等参数理论上都是无理数,而实际求解时,均对这些参数都采用一定程度的截断,导致结果产生差异.

除此之外,还对比分析了  $TM_{11}^{(2)}$  的归一化电场分布、误差分布和谐振频率,结果如图 5 和表 1 所示. 三个面的 RMSE 分别为  $2.667 \times 10^{-3}$ 、 $2.273 \times 10^{-2}$ 、 $1.832 \times 10^{-2}$ . 场和谐振频率的定量计算分析,都验证了方法的正确性.

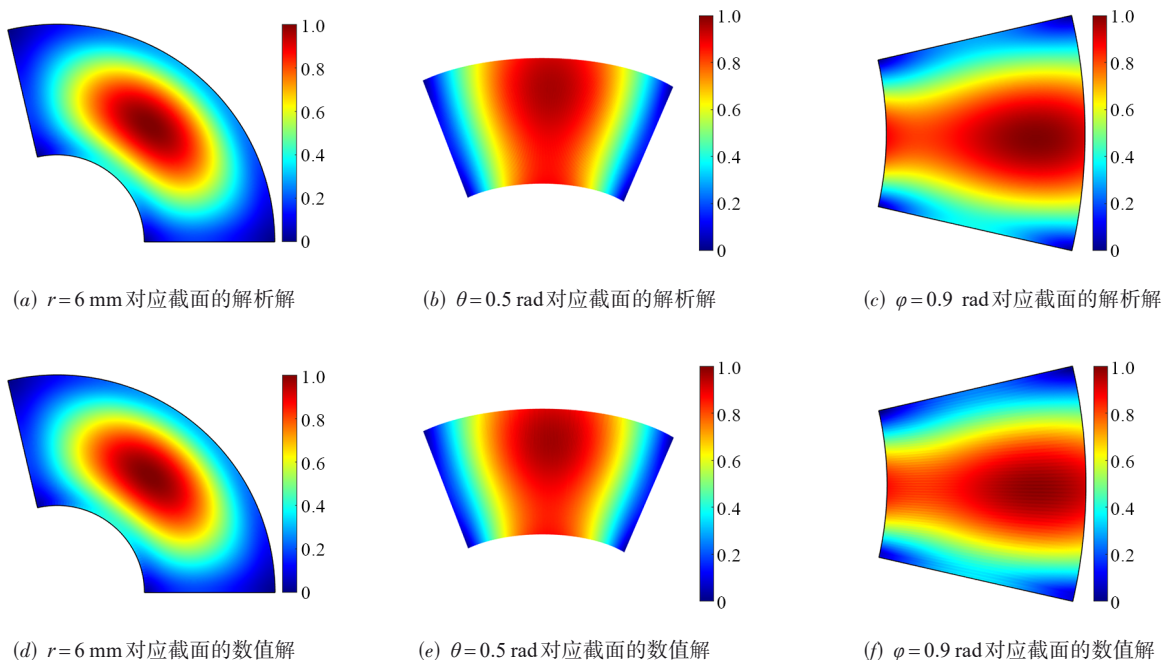


图 4 异形金属谐振腔在  $TM_{11}^{(1)}$  下的归一化电场分布情况

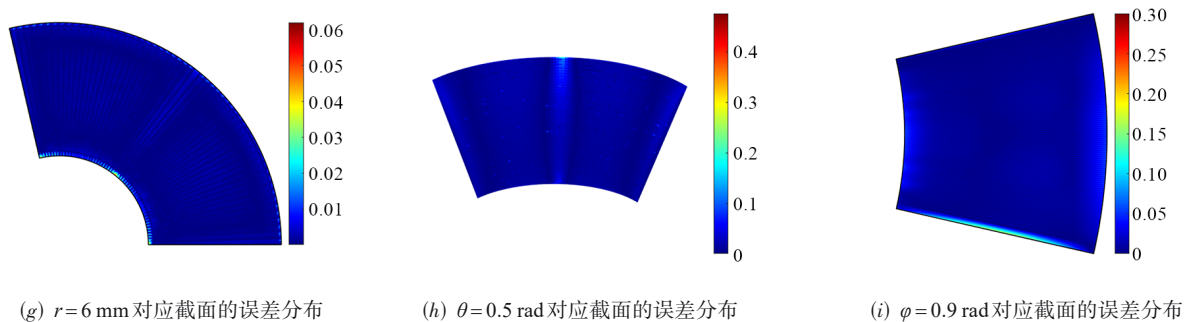
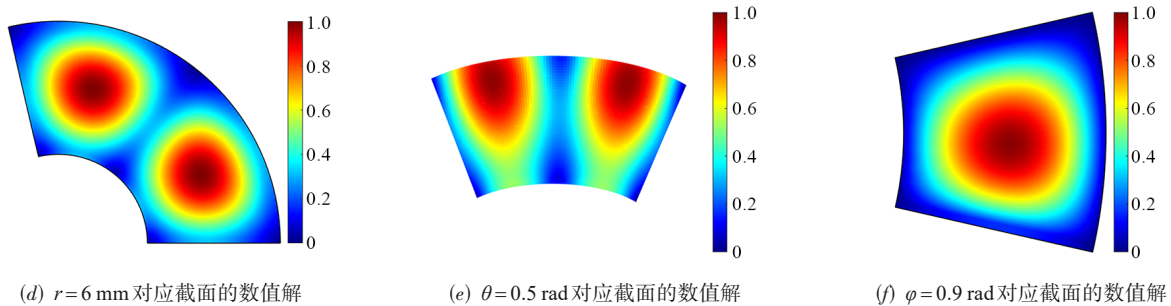
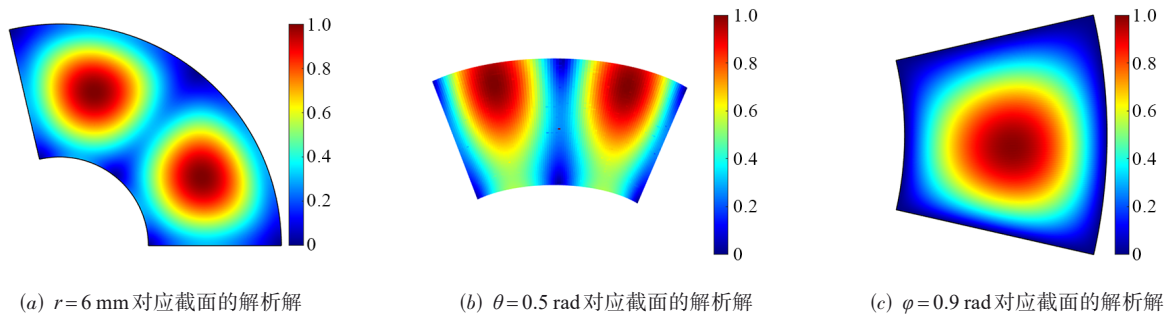
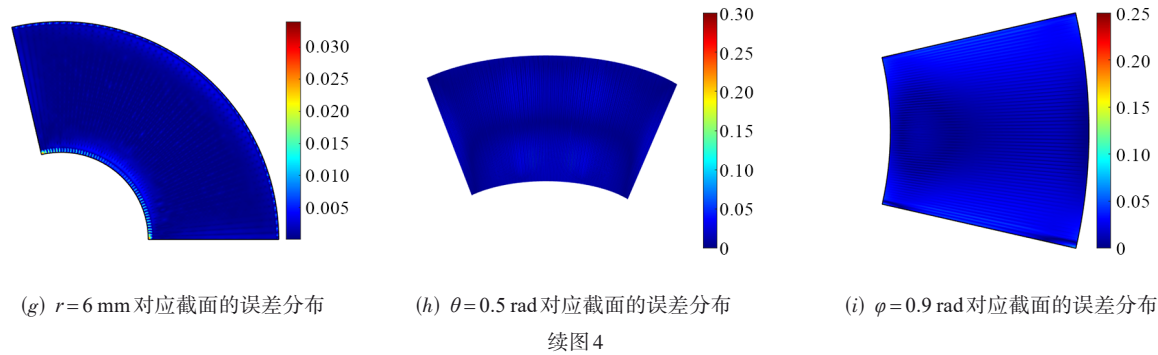
图 5 异形金属谐振腔在  $\text{TM}_{11}^{(2)}$  下的归一化电场分布情况

表 1 不同模式下的本征值和谐振频率

物理量	$\text{TM}_{11}^{(1)}$	$\text{TM}_{11}^{(2)}$	$\text{TE}_{11}^{(1)}$
$\rho$	1.745	3.491	1.745
$\nu$	7.284	9.410	3.048
$k$	1 288.613	1 609.508	1 289.694
谐振频率(计算)/GHz	61.527	76.848	61.578
谐振频率(仿真)/GHz	61.484	76.795	61.536
相对误差/%	0.070	0.069	0.068

### 3.2 TE 模式

在 TE 模式下,  $U=0$ , 同理可得边界条件:

$$V|_{r=a}=0, V|_{r=b}=0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=c}=0, \frac{\partial U}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=d}=0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0}=0, \frac{\partial U}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=f}=0 \quad (28)$$

容易解得此时的本征值和谐振频率如表 1 所示,  $V$  的具体解为

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{v, \rho, k} B' \cos \rho \varphi [P_v^\rho(\cos \theta) + E' Q_v^\rho(\cos \theta)] \cdot \left[ \sqrt{r} J_{v+\frac{1}{2}}(kr) + C' \sqrt{r} N_{v+\frac{1}{2}}(kr) \right] \quad (29)$$

式中,  $B'$  为任意常数,  $C' = -1.550, E' = 0.928$ .

同理可得该异形金属谐振腔在  $TE_{11}^{(1)}$  下归一化磁场分布的解析解和全波仿真结果, 如图 6 所示. 仿真所得  $TE_{11}^{(1)}$  的本征频率为 61.536 GHz, 也与解析结果高度一致, 二者误差仅为 0.068%. 而且, 三个面解析结果与数值仿真结果的 RMSE 分别为  $1.836 \times 10^{-2}$ 、 $1.154 \times 10^{-2}$ 、 $1.567 \times 10^{-2}$ , 进一步验证了解析结果的准确性.

更多高阶模式的结果展示, 不再赘述.

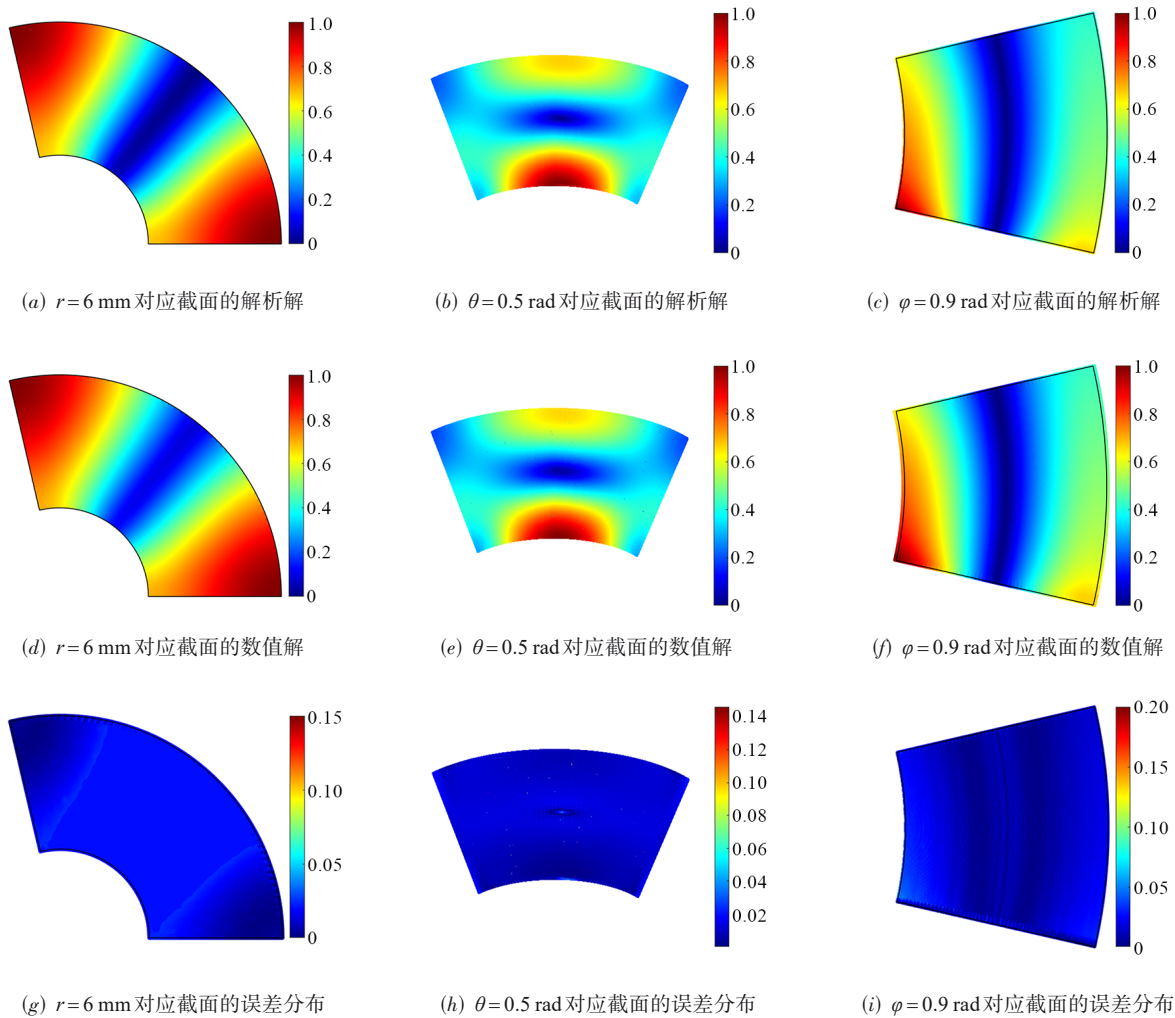


图 6 异形金属谐振腔在  $TE_{11}^{(1)}$  下的归一化电场分布情况

### 4 结论

本研究系统建立了球坐标系下异形金属谐振腔电磁特性的普适性解析方法. 通过引入广义超几何函数, 构造了任意实数阶、次的第一类、第二类连带勒让德函数, 从而获得亥姆霍兹方程的完备通解. 采用伯格尼斯位函数法计算谐振腔在 TM、TE 模式下基模、高阶模电磁场分布的解析解, 并通过有限元数值仿真对理论结果进行多维度验证. 结果表明, 解析解与数值解的结果

高度吻合, 在  $TM_{11}^{(1)}$ 、 $TE_{11}^{(1)}$ 、 $TM_{11}^{(2)}$  下谐振频率的解析解分别为 61.484 GHz、61.536 GHz、76.848 GHz, 与数值仿真的相对误差仅为 0.070%、0.068%、0.069%, 二者电磁场分布完全一致, 解析解与数值解在  $r = 6 \text{ mm}$  对应截面的归一化电磁场强度的 RMSE 分别为  $1.670 \times 10^{-3}$ 、 $2.667 \times 10^{-3}$ 、 $1.836 \times 10^{-2}$ , 从而验证了理论模型的可靠性. 该研究为新型非对称光子晶体谐振腔、多频段天线馈源结构等器件的优化设计提供了理论引擎, 为新一

代电磁功能器件提供了基础理论支撑。

#### 参考文献

- [1] 张瑞峰, 李锵. 亥姆霍兹定理重要性分析[J]. 电气电子教学学报, 2019, 41(1): 61-64, 78.  
ZHANG R F, LI Q. The analysis on the importance of Helmholtz theorem[J]. Journal of Electrical & Electronic Education, 2019, 41(1): 61-64, 78. (in Chinese)
- [2] 马子寅, 陈文琼, 梅中磊. 柱坐标系下亥姆霍兹方程解的分类及典型应用[J]. 大学物理, 2023, 42(10): 15-19, 37.  
MA Z Y, CHEN W Q, MEI Z L. Solving Helmholtz equations in cylindrical coordinate system and its typical application in electromagnetism[J]. College Physics, 2023, 42(10): 15-19, 37. (in Chinese)
- [3] CHEVALIER P, BOUCHON P, VERDUN M, et al. Experimental demonstration of the optical Helmholtz resonance[J]. Applied Physics Letters, 2018, 112(17): 171110.
- [4] MANOUSSAKIS G. A new modified Helmholtz equation for the expression of the gravity gradient and the intensity of an electrostatic field in spherical harmonics[J]. Mathematics, 2023, 11(20): 4362.
- [5] 梅中磊, 曹斌照, 李月娥, 等. 电磁场与电磁波[M]. 北京: 清华大学出版社, 2018: 157-162.  
MEI Z L, CAO B Z, LI Y E, et al. Electromagnetic Fields and Waves[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2018: 157-162. (in Chinese)
- [6] CHEVALIER P, BOUCHON P, GREFFET J J, et al. Giant field enhancement in electromagnetic Helmholtz nanoantenna[J]. Physical Review B, 2014, 90(19): 195412.
- [7] ABADIE C, PAGGI L, FABAS A, et al. Helmholtz resonator applied to nanocrystal-based infrared sensing[J]. Nano Letters, 2022, 22(21): 8779-8785.
- [8] 李博, 方勃懿. 亥姆霍兹方程十一种正交坐标系下的展开形式和部分解[J]. 现代农业研究, 2019, 25(5): 125-126.  
LI B, FANG B Y. Solution and extensive form of Helmholtz equation in eleven orthogonal coordinates[J]. Modern Agriculture Research, 2019, 25(5): 125-126. (in Chinese)
- [9] LIU H W, LIU Z Y, XU Q Y, et al. A comparative study of several classes of meshfree methods for solving the Helmholtz equation[J]. Engineering with Computers, 2024: 1-20.
- [10] 刘新芽. 求解球坐标中矢量亥姆霍兹方程的一个方法[J]. 江西大学学报(自然科学版), 1978, 1: 59-61.  
LIU X Y. A method for solving vector Helmholtz equation in spherical coordinates[J]. Journal of Jiangxi University (Natural Science), 1978, 1: 59-61. (in Chinese)
- [11] KLASEBOER E, SUN Q. Helmholtz equation and non-singular boundary elements applied to multi-disciplinary physical problems[J]. Communications in Theoretical Physics, 2022, 74(8): 085003.
- [12] 张克潜, 李德杰. 微波与光电子学中的电磁理论[M]. 2版. 北京: 电子工业出版社, 2001.  
ZHANG K Q, LI D J. Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics[M]. 2nd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2001. (in Chinese)
- [13] 梁昆森. 数学物理方法[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 143-146.  
LIANG K M. Methods of Mathematical Physics[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2010: 143-146. (in Chinese)
- [14] NAHID T, ALI M. Several characterizations of Bessel functions and their applications[J]. Georgian Mathematical Journal, 2022, 29(1): 83-93.
- [15] MAIER R S. Legendre functions of fractional degree: Transformations and evaluations[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2016, 472(2188): 20160097.
- [16] OLVER F W J. Asymptotics and Special Functions[M]. Wellesley: Academic Press, 1997.
- [17] HOBSON E W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1931.
- [18] 吴崇试. 数学物理方法[M]. 2版. 北京: 北京大学出版社, 2003: 185-189.  
WU C S. Methods of Mathematical Physics[M]. 2nd ed. Beijing: Peking University Press, 2003: 185-189. (in Chinese)
- [19] 李月娥, 马阿宁, 彭宏. 数学物理方法: 使用MATLAB建模与仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2022: 178-187.  
LI Y E, MA A N, PENG H. Mathematical Methods of Physics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2022: 178-187. (in Chinese)
- [20] 梅中磊, 李月娥, 马阿宁. MATLAB电磁场与微波技术仿真[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2024.  
MEI Z L, LI Y E, MA A N. MATLAB Simulations for Electromagnetic Fields and Microwave Technology[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2024. (in Chinese)

## 作者简介



**李德贵** 男,1998年10月出生于甘肃省兰州市.现为兰州大学信息科学与工程学院博士研究生.主要研究方向为新型电磁材料与器件.  
E-mail: lidg2024@lzu.edu.cn



**马子寅** 男,1996年11月出生于内蒙古自治区包头市.现为兰州大学无线电物理博士研究生.主要研究方向为衍射神经网络.  
E-mail: 120220909311@lzu.edu.cn



**孙琦** 男,2001年9月出生于江苏省徐州市.现在为兰州大学信息科学与工程学院硕士研究生.主要研究方向为计算成像与先进光刻.  
E-mail: sqi2024@lzu.edu.cn



**梅中磊** 男,1974年1月出生于河南省洛阳市.现为兰州大学信息科学与工程学院教授.主要研究方向为前沿电磁理论与器件、人工智能与现代通信等.获甘肃省高校科技进步一等奖1项.在国内外发表学术论文80余篇.中国电子学会会员编号:E190013596S.  
E-mail: meizl@lzu.edu.cn