

非平衡有向图下欧拉-拉格朗日群体 智能系统分布式时变优化

张云飞¹, 栾萌^{2*}, 赵丹³, 黄顿⁴, 黄廷文⁵

(1. 辽宁工程技术大学理学院, 辽宁阜新 123032; 2. 岭南大学数据科学学院, 香港特别行政区;
3. 东南大学自动化学院, 江苏南京 210096; 4. 湖北珞珈实验室, 湖北武汉 430072;
5. 深圳理工大学计算机科学与技术工程学院, 广东深圳 518107)

摘要: 本文研究非平衡有向通信图下欧拉-拉格朗日群体智能系统的分布式时变优化问题。考虑由多个具有欧拉-拉格朗日动力学的智能体组成的群体智能系统, 其信息交互建模为强连通且非平衡的有向图, 每个智能体拥有私有的局部时变代价函数, 目标是为每个智能体设计控制输入, 使所有智能体实时状态达成一致并共同收敛至全局代价函数的时变最优解。实际应用中, 通信拓扑非平衡导致的加权一致性偏差、时变代价函数引起的解漂移, 与系统固有的非线性及参数不确定性交织耦合, 为设计分布式优化算法带来了严峻的理论挑战。为克服上述挑战, 本文提出一种融合分布式优化器与自适应控制器的新型双层算法框架。在优化层, 设计了一种适用于非平衡有向图的分布式优化器, 通过在线估计拉普拉斯矩阵零特征值对应的左特征向量以消除通信拓扑的非平衡性影响, 同时引入时变梯度补偿器以动态修正最优轨迹漂移, 生成参考速度信号。在控制层, 针对每个智能体设计了基于系统参数自适应律的跟踪控制器, 利用欧拉-拉格朗日系统的线性参数化性质在线更新未知参数估计值, 使智能体的实际速度能够精确跟踪参考速度, 从而抑制模型不确定性对跟踪性能的影响。为分析算法的收敛性, 首先, 利用输入-状态稳定性理论分析优化器的动态演化, 证明当跟踪误差有界且收敛时智能体状态能够达成一致; 其次, 构造 Lyapunov 函数分析最优跟踪步骤, 结合 Barbalat 引理证明全局梯度之和渐近趋于零; 基于此, 严格证明了当控制器参数满足给定的不等式条件时, 所有智能体的实时状态全局渐近收敛于时变最优轨迹; 最后, 通过包含十个双连杆机械臂的数值仿真验证了所提算法的有效性, 仿真结果表明所有智能体的关节角度轨迹均能快速、准确地跟踪最优轨迹。

关键词: 分布式优化; 欧拉-拉格朗日群体智能系统; 非平衡有向图; 时变函数; 自适应控制; 协同控制

基金项目: 国家自然科学基金(No.62325304, No.U2541220); 江苏省自然科学基金(No.BK20253020); 浙江省“尖兵”研发攻关计划(No.2025C01055); 江苏省应用数学科学研究中心(No.BK20233002)

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2026)03-0938-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.12263/DZXB.20251219

Distributed Time-Varying Optimization for Euler-Lagrange Swarm Intelligent Systems over Unbalanced Directed Graphs

ZHANG Yunfei¹, LUAN Meng^{2*}, ZHAO Dan³, HUANG Di⁴, HUANG Tingwen⁵

(1. School of Science, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123032, China;

2. School of Data Science, Lingnan University, Hong Kong SAR, China;

3. School of Automation, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China;

4. Hubei LuoJia Laboratory, Wuhan, Hubei 430072, China;

5. Faculty of Computer Science and Control Engineering, Shenzhen University of Advanced Technology, Shenzhen, Guangdong 518107, China)

Abstract: This paper investigates a distributed time-varying optimization problem for Euler-Lagrange swarm intelligent systems over unbalanced directed communication topologies. Consider a swarm intelligent system composed of multiple agents with Euler-Lagrange dynamics, where information exchange is modeled as a strongly connected and unbalanced directed graph, and each agent possesses its own private local time-varying cost function. The objective is to design control inputs for each agent such that all agents' real-time states achieve consensus and collectively converge to the time-varying optimal solution of the global cost function. In practical applications, the coupling of weighted consensus bias caused by unbalanced communication topologies, solution drift induced by time-varying cost functions, and inherent system nonlinearities and parameter uncertainties presents severe theoretical challenges for the design of distributed optimization algorithms.

To overcome the aforementioned challenges, this paper proposes a novel dual-layer algorithm framework that integrates a distributed optimizer and an adaptive controller. In the optimization layer, a distributed optimizer tailored for unbalanced directed graphs is designed. It eliminates the impact of communication topology imbalance by online estimation of the left eigenvector associated with the zero eigenvalue of the Laplacian matrix, while introducing a time-varying gradient prediction compensation term to dynamically correct the optimal trajectory drift, thus generating a reference velocity signal. In the control layer, a tracking controller with a system parameter adaptation law is designed for each agent. Utilizing the linear parameterization property of Euler-Lagrange systems, it updates estimates of unknown parameters online, enabling the agents' actual velocities to accurately track the reference velocity, thus mitigating the impact of model uncertainties on tracking performance. To analyze the convergence of the proposed algorithm, first, the input-to-state stability theory is utilized to analyze the optimizer dynamics, demonstrating that the states of agents achieve consensus when the tracking error is bounded and convergent. Second, a Lyapunov function is constructed to analyze the optimal tracking step, and Barbalat's lemma is applied to prove that the sum of global gradients asymptotically approaches zero. Consequently, it is rigorously proven that the real-time states of all agents globally and asymptotically converge to the time-varying optimal trajectory provided the controller parameters satisfy the certain inequality conditions. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm is validated through numerical simulations involving ten two-link manipulators. The results demonstrate that the joint angle trajectories of all agents can accurately track the optimal trajectory.

Keywords: distributed optimization; Euler-Lagrange swarm intelligent systems; unbalanced directed graph; time-varying function; adaptive control; cooperative control

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.62325304, No.U2541220); Basic Research Program of Jiangsu (No.BK20253020); Key Research and Development Program of Zhejiang Province (No.2025C01055); Jiangsu Provincial Scientific Research Center of Applied Mathematics (No.BK20233002)

0 引言

随着智能无人集群系统在军事与工业等领域的广泛应用,实现群体智能体间高效、自主的协同已成为提升整体效能的核心^[1-2]。此类协同任务(如编队、覆盖与协同决策)在理论层面可抽象为分布式优化与控制问题,其物理实现则紧密依赖于对智能体动力学的精确描述以及对模型中参数不确定性与非线性的有效处理^[3-4]。欧拉-拉格朗日(Euler-Lagrange, EL)系统因能精确刻画机械臂、无人机等装备的动力学,成为实现此类协同的理想物理模型^[5]。相较于单个EL智能体,EL群体智能系统通过智能体间的协同合作,在任务执行效率、系统鲁棒性及功能涌现等方面展现出显著优势,并广泛应用于多机器人协同装配、无人任务分配问题及环境监测问题等多个领域^[6-7]。

在此背景下,EL群体智能系统的分布式优化与控制研究近年来备受关注,并已形成系列成果。多智能体系统一致性理论与分析框架,为分布式优化算法的设计与收敛性证明提供了重要的理论基础^[8]。早期研究主要集中于分布式静态优化问题,文献[9]在无向图下提出基于梯度下降与反馈线性化的策略,实现了异构EL系统全局收敛;文献[10]通过设计自适应辅助系统,实现了完全分布式优化;文献[11]进一步考虑了约束条件,提出了基于投影辅助动力学的优化方法;文献[12]则为平衡有向图设计了基于内外环结构的分布式非线性控制器。近年来,随着任务动

态性要求的提高,分布式时变优化成为新的研究焦点。文献[13]在固定无向图下提出了基于实时状态反馈的算法,实现了对时变最优轨迹的零误差跟踪;文献[14]进一步将框架拓展至切换拓扑,并通过引入光滑函数消除了控制抖振。然而,上述针对EL系统的优化算法,其有效性均依赖于无向图或平衡有向图的通信拓扑假设,难以直接应用于存在非对称交互的非平衡有向图场景。

有向图通信拓扑的非平衡性使一致性协议收敛到加权平均而非算术平均,导致梯度信息估计存在偏差,这是算法设计面临的一个根本性挑战。为此,近期研究在非平衡有向图下的分布式优化方面取得了进展。例如,文献[15]设计了基于梯度跟踪与动量项的离散时间算法,通过特定的权重矩阵设计,在非平衡图下实现了凸优化问题的线性收敛;文献[16]提出了一种随机约束求解算法,能够处理时变非平衡有向图下带有一般性约束的优化问题。这些工作从优化算法层面有效解决了非平衡拓扑带来的收敛性难题。然而,它们通常基于简单的静态或离散时间系统模型,其算法设计与收敛性分析尚未充分考虑EL系统所固有的非线性动力学与参数不确定性。

基于上述讨论,本文针对非平衡有向图下的EL群体智能系统,研究其分布式时变优化问题。然而,通信拓扑非平衡导致的加权一致性偏差、时变代价函数引起最优轨迹的持续漂移以及系统动力学固有的

非线性与参数不确定性,致使现有方法难以适用。为此,本文提出一种融合分布式优化器与自适应控制器的双层算法框架。主要贡献如下:(1)提出了一种新的分布式优化-控制算法,通过在线估计通信拓扑图的拉普拉斯矩阵零特征值对应的左特征向量,构建了适用于非平衡有向图的分布式优化器,突破了文献[9-14]中方法对平衡通信拓扑的依赖,通过引入具有时变梯度补偿机制的自适应控制器,在线抵消代价函数变化引起的不确定性,克服了文献[9-12]中静态优化目标的局限,结合参数自适应律,实现了对动态最优轨迹的实时跟踪;(2)基于Lyapunov稳定性理论与非光滑系统分析,通过协调步骤与最优跟踪步骤的推导,结合输入-状态稳定性理论与Barbalat引理,严格证明了所有智能体的状态能全局渐近收敛至时变最优轨迹,并给出了确保算法收敛性的参数选取条件。

1 预备知识

1.1 符号说明

本文中, \mathbf{R} 、 $\mathbf{R}_{\geq 0}$ 和 \mathbf{R}^p 分别表示实数集、非负实数集和 p 维实列向量空间。对于集合 S , $|S|$ 表示其基数;对于实数 $x \in \mathbf{R}^p$, $|x|$ 表示其绝对值。矩阵 \mathbf{A} 的转置记为 \mathbf{A}^T 。对于向量 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_p]^T \in \mathbf{R}^p$, 定义其范数为: $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^p |x_i|$, $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,p} |x_i|$ 。对称矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 的特征值记为 $\lambda_1(\mathbf{A}) \leq \dots \leq \lambda_p(\mathbf{A})$ 。 $\sigma_{\max}(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的最大奇异值。矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的 Kronecker 积记为 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 。 $\mathbf{0}_n$ 和 $\mathbf{1}_n$ 分别表示 n 维的全零列向量和全一列向量。 \mathbf{I}_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵。 $\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 表示以 a_1, a_2, \dots, a_n 为对角线元素的对角矩阵。定义函数空间:

$$\mathcal{L}_\infty^p = \left\{ \mathbf{x}: \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}^p \left| \sup_{t \in \mathbf{R}_{\geq 0}} \|\mathbf{x}(t)\|_\infty < \infty \right. \right\},$$

$$\mathcal{L}_2^p = \left\{ \mathbf{x}: \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}^p \left| \int_0^\infty \mathbf{x}^T(t) \mathbf{x}(t) dt < \infty \right. \right\}.$$

对于时变函数 $f: \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}$, 其梯度记为 $\nabla f(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^p$, Hessian 矩阵记为 $H(\mathbf{q}, t) \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 。

1.2 图论说明

考虑有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为结点集, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 为有向边集, $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{N \times N}$ 为加权邻接矩阵, 其元素 $a_{ij} > 0$ 表示从结点 i 指向结点 j 的边的权重, 其中 $i, j \in \mathcal{N}$ 。 (i, j) 表示从结点 i 指向结点 j 的边, 且 $(i, j) \in \mathcal{E}$ 当且仅当 $a_{ij} > 0$ 。本文假设图中不存在自环, 即对所有 $i \in \mathcal{N}$, 有 $a_{ii} = 0$ 。与邻接矩阵 \mathcal{A} 对

应的拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L} = [l_{ij}]_{N \times N}$ 的元素定义为: 其非对角元素 $l_{ij} = -a_{ij}$; 对角元素 $l_{ii} = \sum_{k=1}^N a_{ik}$ 。该矩阵满足 $\sum_{k=1}^N l_{ik} = 0$ 。若对所有 $i \neq j$, 有 $l_{ij} = l_{ji}$, 则该图为无向图。若图中任意两个不同结点间存在有向路径, 则称该有向图为强连通的。若对于任意结点 i 满足 $\sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$, 即 $\mathbf{1}_N^T \mathbf{L} = \mathbf{0}$, 则称该有向图为平衡的, 反之则为非平衡的。

对于有向图 \mathcal{G} , 其拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 具有以下性质。

引理 1^[17-18] 若 \mathcal{G} 为强连通有向图, 则其拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 不可约, 且满足: (1) $\mathbf{L} \mathbf{1}_N = \mathbf{0}$; (2) 存在零特征值相关的左特征向量 $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N]^T$, 满足 $\xi_i > 0, \forall i \in \mathcal{N}$ 和 $\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{1}_N = 1$, 使得 $\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{L} = \mathbf{0}$; (3) 存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{\Xi} = \text{diag}\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$, 使得 $\hat{\mathbf{L}} = [\hat{l}_{ij}]_{N \times N} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Xi} \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Xi})$ 为对称矩阵, 且对所有 $i \in \mathcal{N}$, 有 $\sum_{j=1}^N \hat{l}_{ij} = \sum_{j=1}^N \hat{l}_{ji} = 0$; (4) $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\mathbf{L}t} = \mathbf{1}_N \boldsymbol{\xi}^T$ 。

基于上述引理, 引入如下定义。

定义 1^[19] 对于具有拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 的强连通有向图 \mathcal{G} , 定义其广义代数连通度为

$$a(\mathbf{L}) = \min_{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\xi} = 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^T \hat{\mathbf{L}} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Xi} \mathbf{x}},$$

其中, $\hat{\mathbf{L}}$ 、 $\boldsymbol{\Xi}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 由引理 1 给出。若 \mathcal{G} 为无向图, 则此时广义代数连通度退化为 \mathbf{L} 的第二小特征值, 即 $a(\mathbf{L}) = \lambda_2(\mathbf{L})$ 。如果 \mathcal{G} 是强连通的, 则 $a(\mathbf{L}) > 0$ 。

2 问题描述

本文考虑由 N 个智能体组成的多智能体系统, 其信息交互由有向图 \mathcal{G} 描述。第 i 个智能体的动力学方程为

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \boldsymbol{\tau}_i \quad (1)$$

其中: $\mathbf{q}_i \in \mathbf{R}^p$ 为实时状态; $\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 为惯性矩阵; $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 为科里奥利与离心力矩阵; $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) \in \mathbf{R}^p$ 为重力力矩向量; $\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbf{R}^p$ 为控制力矩向量。该系统具有以下三个基本性质。

性质 1: 惯性矩阵 $\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)$ 对称且一致正定, 即存在正常数 k_M , 使得对 $\forall i \in \mathcal{N}$ 和 $\forall \mathbf{q}_i \in \mathbf{R}^p$, 有 $\lambda_1(\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)) \geq k_M$ 。此外, 存在正常数 k_c 和 k_β , 对 $\forall i \in \mathcal{N}$ 使得以下不等式成立:

$$\|\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\|_2 \leq k_c \|\dot{\mathbf{q}}_i\|_2, \|\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)\|_2 \leq k_\beta.$$

性质 2: 矩阵 $M_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)$ 为反对称矩阵。

性质 3: 系统动力学关于未知常参数向量 $\mathbf{g}_i \in \mathbf{R}^m$ 是线性的, 即控制力矩向量 $\boldsymbol{\tau}_i$ 可通过参数向量 \mathbf{g}_i 与回归矩阵 $Y_i(q_i, \dot{q}_i, \mathbf{y}, \mathbf{x})$ 线性表示。对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$, 存在 $M_i(q_i)x + C_i(q_i, \dot{q}_i)y + \mathbf{g}_i(q_i) = Y_i(q_i, \dot{q}_i, \mathbf{y}, \mathbf{x})\mathbf{g}_i$ 。

本文的目标是在非平衡有向通信拓扑下, 设计 EL 智能体的控制输入 $\boldsymbol{\tau}_i$, 使得每个智能体能够协同跟踪由全局时变代价函数所定义的最优轨迹 $\mathbf{q}^* \in \mathbf{R}^p$:

$$\mathbf{q}^* = \arg \min \sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{q}_i, t), \text{ s.t. } \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j, \forall i \neq j \quad (2)$$

其中, $\mathbf{q}_i = [q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{ip}]^T \in \mathbf{R}^p$; $f_i(\mathbf{q}_i, t): \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}$ 是智能体 $i \in \mathcal{N}$ 私有的局部时变代价函数。在后续分析中, 假设 $\mathbf{q}^* \in \mathcal{L}_\infty$, 在所关注的一类典型应用场景中, 该条件往往成立^[13]。

进一步, 对通信拓扑和代价函数作出如下假设。

假设 1 有向图 \mathcal{G} 是强连通的。

假设 2 每个代价函数 $f_i(\mathbf{q}_i, t)$ 关于 $\mathbf{q}_i \in \mathbf{R}^p$ 和 $t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ 二阶连续可微, 关于 \mathbf{q}_i 强凸, 且关于 t 一致凸。具体地, 其 Hessian 矩阵 $H_i(\mathbf{q}_i, t)$ 对所有 $\mathbf{q}_i \in \mathbf{R}^p$ 和 $t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ 一致正定, 即存在常数 $\underline{m} > 0$, 使得对 $\forall i \in \mathcal{N}$, 有 $\lambda_1(H_i(\mathbf{q}_i, t)) \geq \underline{m}$ 。此外, $H_i(\mathbf{q}_i, t)$ 一致有界, 即存在常数 $\bar{m} > 0$, 使得对 $\forall i \in \mathcal{N}$, 有 $\|H_i(\mathbf{q}_i, t)\|_2 \leq \bar{m}$ 。

假设 3 对 $\forall i, j \in \mathcal{N}$, Hessian 矩阵满足 $H_i(\mathbf{q}_i, t) = H_j(\mathbf{q}_j, t)$ 。

假设 4 对于每个智能体 $i \in \mathcal{N}$, 若其实时状态 \mathbf{q}_i 有界, 则 $\frac{\partial}{\partial t} \nabla f_i(\mathbf{q}_i, t)$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla f_i(\mathbf{q}_i, t)$, $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}_i^2} \nabla f_i(\mathbf{q}_i, t)$ 和 $\frac{\partial^2}{\partial t \partial \mathbf{q}_i} \nabla f_i(\mathbf{q}_i, t)$ 均有界。

上述假设在分布式时变优化研究中具有一般性^[20-22]。假设 2 保证了最优轨迹 \mathbf{q}^* 的唯一性以及 Hessian 矩阵 $H_i(\mathbf{q}_i, t)$ 的可逆性。假设 4 关于高阶导数有界性的要求为系统的稳定性分析奠定了理论基础。

3 主要结果

对于每个智能体 $i \in \mathcal{N}$, 设计参考速度信号 $\mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^p$:

$$\dot{\mathbf{v}}_i = -\hat{\xi}_{ii} \sum_{j=1}^N a_{ij} [\alpha(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) + \beta(\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_j)] + \phi_i \quad (3)$$

$$-\gamma \hat{\xi}_{ii} \mathbf{h} \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} [\alpha(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) + \beta(\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_j)] \right)$$

$$\dot{\hat{\xi}}_i = -\sum_{j=1}^N a_{ij} (\hat{\xi}_i - \hat{\xi}_j) \quad (4)$$

其中, α, β 和 γ 是待确定的正常数。非光滑函数 $\mathbf{h}(\mathbf{x})$

的定义为: 当 $\|\mathbf{x}\|_2 \neq 0$ 时, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2}$, 否则 $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ 。

时变梯度补偿器 ϕ_i 设计为

$$\phi_i = -\dot{F}_i(\mathbf{q}_i, t) - H_i(\mathbf{q}_i, t) \nabla f_i(\mathbf{q}_i, t) \quad (5)$$

$$F_i(\mathbf{q}_i, t) = H_i^{-1}(\mathbf{q}_i, t) \left[\frac{\partial}{\partial t} \nabla f_i(\mathbf{q}_i, t) + \nabla f_i(\mathbf{q}_i, t) \right] \quad (6)$$

通信图的拉普拉斯矩阵零特征值相关的左特征向量估计为 $\hat{\xi}_i = [\hat{\xi}_{i1}, \hat{\xi}_{i2}, \dots, \hat{\xi}_{iN}]^T \in \mathbf{R}^N$, 其中 $\hat{\xi}_{ii} \in \mathbf{R}$ 为智能体 i 对 ξ_i 的估计, 且满足初值条件: 对任意 $i \neq j$, $\hat{\xi}_{ij}(0) = 0$, 对任意 $i \in \mathcal{N}$, $\hat{\xi}_{ii}(0) = 1$ 。进一步, 定义误差变量:

$$\mathbf{s}_i = \dot{\mathbf{q}}_i - \mathbf{v}_i \quad (7)$$

针对 EL 系统(1)设计如下自适应控制器:

$$\boldsymbol{\tau}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + Y_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{v}_i, \dot{\mathbf{v}}_i) \hat{\boldsymbol{\theta}}_i \quad (8)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i = -\boldsymbol{\Gamma}_i Y_i^T(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{v}_i, \dot{\mathbf{v}}_i) \mathbf{s}_i \quad (9)$$

其中, \mathbf{K}_i 和 $\boldsymbol{\Gamma}_i$ 是对称正定矩阵, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ 是 $\boldsymbol{\theta}_i$ 的估计值。

本文算法(3)~(9)采用双层设计, 包括分布式优化器(3)~(6)和自适应控制器(7)~(9)。首先, 分布式优化器基于局部邻居信息与梯度计算, 实时生成参考速度信号 \mathbf{v}_i , 其中, 一致性协议项 $-\hat{\xi}_{ii} \sum_{j=1}^N a_{ij} [\alpha(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) + \beta(\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_j)]$ 利用智能体与邻居的相对状态信息, 使得系统状态达成一致; 非光滑项 $-\gamma \hat{\xi}_{ii} \mathbf{h} \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} [\alpha(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) + \beta(\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_j)] \right)$ 在动态环境下维持智能体间的一致, 抑制因时变梯度引起的跟踪误差; 时变梯度补偿 ϕ_i 通过推算梯度未来的变化, 动态补偿因代价函数时变所造成的最优解漂移, 确保系统能够紧跟动态最优轨迹; 拉普拉斯矩阵零特征值相关的左特征向量估计量 $\hat{\xi}_i$, 使算法能自适应非平衡有向图结构。其次, 自适应控制器通过跟踪误差 \mathbf{s}_i 构成负反馈, 在线调整控制输入, 使智能体的真实速度实时跟踪期望的参考速度。

由假设 2 和假设 4 可知, 式(5)、式(6)所定义的时变梯度补偿器 ϕ_i 存在且具有良好的解析性质。本文对 ϕ_i 做出如下假设。

假设 5^[13] 对任意 $i, j \in \mathcal{N}$, 存在正常数 c_1 和 c_2 , 使得 $\|\phi_i - \phi_j\|_1 \leq c_1 (\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|_1 + \|\dot{\mathbf{q}}_i - \dot{\mathbf{q}}_j\|_1) + c_2$ 。

令 $\mathbf{q} = [q_1^T, q_2^T, \dots, q_N^T]^T$, $\mathbf{v} = [v_1^T, v_2^T, \dots, v_N^T]^T$, $\mathbf{s} = [s_1^T, s_2^T, \dots, s_N^T]^T$, $\boldsymbol{\phi} = [\phi_1^T, \phi_2^T, \dots, \phi_N^T]^T$, $\hat{\xi} = [\hat{\xi}_1^T, \hat{\xi}_2^T, \dots, \hat{\xi}_N^T]^T$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \text{diag} \{ \hat{\xi}_{11}, \hat{\xi}_{22}, \dots, \hat{\xi}_{NN} \}$ 。动态系统(3)和(4)可以改写为

$$\dot{q} = v + s \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} = & -(\hat{\Xi}L \otimes I_p)(\alpha q + \beta v + \beta s) + \phi \\ & -\gamma(\hat{\Xi} \otimes I_p)h[(L \otimes I_p)(\alpha q + \beta v + \beta s)] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{\hat{\xi}} = -(L \otimes I_N)\hat{\xi} \quad (12)$$

引理 2 若假设 1 成立且 $\hat{\xi}(0)$ 满足初值条件: 对任意 $i \neq j, \hat{\xi}_{ij}(0) = 0$, 对任意 $i \in \mathcal{N}, \hat{\xi}_i(0) = 1$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\Xi} = \Xi$ 。

证明 由式 (12) 可解得, $\hat{\xi} = e^{-(L \otimes I_N)t} \hat{\xi}(0)$ 。利用矩阵指数与 Kronecker 积的性质, 结合引理 1, 可知:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(L \otimes I_N)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-Lt} \otimes I_N] = (\mathbf{1}_N \xi^T) \otimes I_N$$

根据初始条件可得 $\hat{\xi}(0) = [e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T]^T$, 其中 $e_i \in \mathbf{R}^N$, 其第 i 个元素为 1, 其余为 0, 进而可得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\xi} = [(\mathbf{1}_N \xi^T) \otimes I_N] \hat{\xi}(0) = \mathbf{1}_N \otimes \xi$$

因此每个智能体的估计向量 $\hat{\xi}_i$ 都收敛到 ξ , 即

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\Xi} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \text{diag} \{ \hat{\xi}_{11}, \hat{\xi}_{22}, \dots, \hat{\xi}_{NN} \} \\ &= \text{diag} \{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N \} = \Xi \end{aligned}$$

证毕

引理 3 考虑由式 (10)~(12) 描述的多智能体系统。若假设 1~5 成立, 参数 α, β 和 γ 满足 $\alpha > \frac{2k}{\underline{\zeta} a(L)}, \beta >$

$$\max \left\{ \frac{3k+2\sqrt{k[\alpha \underline{\zeta} a(L) + 2k] + 4\alpha \underline{\zeta} a(L) - k}}{4\alpha \underline{\zeta} a(L) - k}, \alpha, \sqrt{\frac{\alpha}{2\alpha(L)\underline{\zeta}}} \right\}$$

和 $\gamma > \frac{c_2 \sigma_{\max}(L) N \sqrt{Np}}{\alpha(L)\underline{\zeta}}$, 其中 $k = \frac{c_1 \sigma_{\max}(L) N p}{a}$, $\underline{\zeta} =$

$\min_{i \in \mathcal{N}} \{ \xi_i \}$, c_1 和 c_2 在假设 5 中给出, 则对 $\forall i \in \mathcal{N}$, 以下两个结论成立: (1) 如果 $s_i \in \mathcal{L}_\infty^p \cap \mathcal{L}_2^p$, 则 $q_i - q^* \in \mathcal{L}_\infty^p$; (2) 如果 $s_i \in \mathcal{L}_\infty^p \cap \mathcal{L}_2^p$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} s_i = \mathbf{0}_p$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} q_i = q^*$ 。

证明 本引理的证明分为协调步骤与最优跟踪步骤两部分。在协调步骤中, 证明当 s_i 有界且收敛于零时, 协调误差 $q_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_j$ 和 $v_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j$ 亦有界且收敛于零。在最优跟踪步骤中, 证明若 $s_i \in \mathcal{L}_2^p$, 则 $\sum_{j=1}^N \nabla f_j(q_j, t) \in \mathcal{L}_\infty^p$; 进一步, 若 $s_i \in \mathcal{L}_2^p$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} s_i = \mathbf{0}_p$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \nabla f_j(q_j, t) = \mathbf{0}_p$ 。综合上述两步即可完成证明。

定义 $x = (M \otimes I_p)q, y = (M \otimes I_p)v, \tilde{\Xi} = \hat{\Xi} - \Xi$, 其中 $M = I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T$, 则

$$\dot{x} = y + (M \otimes I_p)s \quad (13)$$

$$\dot{y} = Y_1 + Y_2 \quad (14)$$

其中函数 Y_1 和 Y_2 分别定义如下:

$$\begin{aligned} Y_1 = & -(\Xi L \otimes I_p)(\alpha x + \beta y + \beta s) + (M \otimes I_p)\phi \\ & -\gamma(M\Xi \otimes I_p)h[(L \otimes I_p)(\alpha x + \beta y + \beta s)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 = & -[M\tilde{\Xi}L \otimes I_p](\alpha x + \beta y + \beta s) \\ & -\gamma[M\tilde{\Xi} \otimes I_p]h[(L \otimes I_p)(\alpha x + \beta y + \beta s)]. \end{aligned}$$

首先, 考虑协调步骤。定义函数 $V =$

$$\frac{1}{2} [x^T y^T] P [x^T y^T]^T, \text{ 其中 } P = \begin{bmatrix} 2\alpha\beta\hat{L} & \alpha I_N \\ \alpha I_N & \beta I_N \end{bmatrix} \otimes I_p, \hat{L} =$$

$$\frac{1}{2} (\Xi L + L^T \Xi). \text{ 由 } \beta > \sqrt{\frac{\alpha}{2\alpha(L)\underline{\zeta}}}, \text{ 可得 } V \text{ 是正定函数。}$$

沿系统 (13)、(14) 的轨迹对函数 V 求导, 可得:

$$\dot{V} = U_1 + U_2 + U_3 \quad (15)$$

其中, 函数 U_1, U_2 和 U_3 分别定义如下:

$$\begin{aligned} U_1 = & -\alpha^2 x^T (\hat{L} \otimes I_p) x - y^T [(\beta^2 \hat{L} - \alpha I_N) \otimes I_p] y \\ & + \alpha \beta x^T (L^T \Xi \otimes I_p) s - \beta^2 y^T (\Xi L \otimes I_p) s + \alpha y^T (M \otimes I_p) s, \end{aligned}$$

$$U_2 = z^T (M \otimes I_p) \phi - \gamma z^T (M\Xi \otimes I_p) h[(L \otimes I_p)(z + \beta s)],$$

$$U_3 = -z^T (M\tilde{\Xi}L \otimes I_p)(z + \beta s)$$

$$- \gamma z^T (M\tilde{\Xi} \otimes I_p) h[(L \otimes I_p)(z + \beta s)],$$

其中, $z = \alpha x + \beta y$ 。令 $\zeta = [x^T, y^T]^T$ 。对于 U_1 , 由于 $\|(L \otimes I_p)s\|_2 = \sqrt{s^T (L^T L \otimes I_p) s} \leq \sigma_{\max}(L) \|s\|_2$, 可知:

$$U_1 \leq -X^T Q_1 X + c_M \sqrt{2Np} \|\zeta\|_2 \|s\|_\infty \quad (16)$$

其中: $X = [\|x\|_2, \|y\|_2]^T$; $Q_1 = \text{diag} \{ \alpha^2 \underline{\zeta} a(L), \beta^2 a(L) \underline{\zeta} - \alpha \}$; $c_M = \max \{ \alpha \beta \sigma_{\max}(L), \beta^2 \sigma_{\max}(L) + \alpha \}$ 。函数 U_2 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} U_2 = & z^T (M \otimes I_p) \phi \\ & - \gamma z^T (M\Xi \otimes I_p) h[(L \otimes I_p)(z + \beta s)] \end{aligned} \quad (17)$$

考虑函数 U_2 中的第一项, 根据 Holder 不等式, 可得:

$$z^T (M \otimes I_p) \phi \leq \|z\|_1 \sum_{i=1}^N \left\| \phi_i - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi_k \right\|_1 \quad (18)$$

由假设 5 可知:

$$\begin{aligned} & \left\| \phi_i - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi_k \right\|_1 \\ & \leq \frac{c_1}{N} \sum_{k=1}^N (\|q_i - q_k\|_1 + \|\dot{q}_i - \dot{q}_k\|_1) + c_2, \end{aligned}$$

注意到, $\|q_i - q_k\|_1 \leq \frac{|\mathcal{E}|}{a} \|(L \otimes I_p)q\|_1 = \frac{|\mathcal{E}|}{a} \|(L \otimes I_p)x\|_1$,

$\|\dot{q}_i - \dot{q}_k\|_1 \leq \frac{|\mathcal{E}|}{a} \|(L \otimes I_p)v\|_1 \leq \frac{|\mathcal{E}|}{a} \|(L \otimes I_p)(y + s)\|_1$,

其中 $\underline{a} = \min \{a_{ij} | i, j \in \mathcal{N}, a_{ij} \neq 0\}$, 将其代入上式, 可得:

$$\left\| \phi_i - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \phi_k \right\|_1 \leq \frac{c_1 |\mathcal{E}| \sigma_{\max}(\mathbf{L}) \sqrt{Np}}{\underline{a}} (\|x\|_2 + \|y\|_2 + \|z\|_2) + c_2 \quad (19)$$

再将式 (19) 代入式 (18), 可得:

$$z^T (\mathbf{M} \otimes \mathbf{I}_p) \phi \leq X^T \mathbf{Q}_2 X + k_1 (\zeta)_2 \|s\|_\infty + k_2 \|z\|_2 \quad (20)$$

其中, $\mathbf{Q}_2 = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 2\alpha & \alpha + \beta \\ \alpha + \beta & 2\beta \end{bmatrix}$, $k = \frac{c_1 |\mathcal{E}| \sigma_{\max}(\mathbf{L}) N^2 p}{\underline{a}}$, $k_1 = \sqrt{Np(\alpha^2 + \beta^2)} k$, $k_2 = c_2 N \sqrt{Np}$ 。考虑函数 U_2 中的第二项, 通过对其加减项 $-\gamma \beta s^T (\mathbf{M} \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_p) \mathbf{h}[(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p)(z + \beta s)]$, 可知:

$$\begin{aligned} & -\gamma z^T (\mathbf{M} \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_p) \mathbf{h}[(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p)(z + \beta s)] \\ & = -\gamma (z + \beta s)^T (\mathbf{M} \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_p) \mathbf{h}[(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p)(z + \beta s)] \\ & \quad + \gamma \beta s^T (\mathbf{M} \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_p) \mathbf{h}[(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p)(z + \beta s)] \end{aligned} \quad (21)$$

对于 $-\gamma (z + \beta s)^T (\mathbf{M} \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_p) \mathbf{h}[(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p)(z + \beta s)]$, 可得:

$$\begin{aligned} & -\gamma (z + \beta s)^T (\mathbf{M} \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_p) \mathbf{h}[(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p)(z + \beta s)] \\ & = -\gamma \frac{(z + \beta s)^T (\mathbf{M} \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_p) (\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p) (z + \beta s)}{\|(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p)(z + \beta s)\|_2} \\ & \leq -\gamma k_3 \|z\|_2 + \beta \gamma \sqrt{Np} k_3 \|s\|_\infty \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $k_3 = \frac{a(\mathbf{L}) \zeta}{\sigma_{\max}(\mathbf{L})}$ 。另一方面, 对于 $\gamma \beta s^T (\mathbf{M} \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_p) \mathbf{h}[(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p)(z + \beta s)]$, 可知:

$$\begin{aligned} & \gamma \beta s^T (\mathbf{M} \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_p) \mathbf{h}[(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p)(z + \beta s)] \\ & \leq \beta \gamma \|s\|_2 \left\| (\mathbf{M} \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_p) \right\|_2 \left\| \mathbf{h}[(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p)(z + \beta s)] \right\|_2 \\ & \leq \beta \gamma \sqrt{Np} \|s\|_\infty \end{aligned} \quad (23)$$

将式 (22)、(23) 代入式 (21) 可得:

$$\begin{aligned} & -\gamma z^T (\mathbf{M} \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_p) \mathbf{h}[(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p)(z + \beta s)] \\ & \leq -\gamma k_3 \|z\|_2 + \beta \gamma \sqrt{Np} (k_3 + 1) \|s\|_\infty \end{aligned} \quad (24)$$

再将式 (20)、(15) 代入式 (17) 可得:

$$\begin{aligned} U_2 \leq & -(\gamma k_3 - k_2) \|z\|_2 + X^T \mathbf{Q}_2 X \\ & + k_1 \|\zeta\|_2 \|s\|_\infty + \beta \gamma \sqrt{Np} (k_3 + 1) \|s\|_\infty \end{aligned} \quad (25)$$

进一步, 由引理 2 可知, $\|\tilde{z}\|_2$ 指数收敛到 0, 则存在时间 $t \geq T_1$ 和正实数 $\bar{\epsilon}$, 使得当 $t \geq T_1$ 时, 有 $\|\tilde{z}\|_2 \leq \bar{\epsilon}$ 。于是对于函数 U_3 , 可知:

$$\begin{aligned} U_3 = & -z^T (\mathbf{M} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p) (z + \beta s) \\ & - \gamma z^T (\mathbf{M} \tilde{\mathbf{E}} \otimes \mathbf{I}_p) \mathbf{h}[(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_p)(z + \beta s)] \\ & \leq k_4 \|\tilde{\mathbf{E}}\|_2 \|\zeta\|_2^2 + k_5 \|\zeta\|_2 \|s\|_\infty + k_6 \|\Delta \zeta\|_\infty \|\zeta\|_2 \end{aligned} \quad (26)$$

其中, $\Delta \zeta = [\hat{\zeta}_{11} - \zeta_1, \hat{\zeta}_{22} - \zeta_2, \dots, \hat{\zeta}_{NN} - \zeta_N]^T$, $k_4 = (\alpha^2 + \beta^2) \|\mathbf{L}\|_2$, $k_5 = \beta \tilde{\mathbf{E}} \sqrt{Np(\alpha^2 + \beta^2)} \|\mathbf{L}\|_2$, $k_6 = \gamma \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ 。因此, 将式 (16)、(25) 和 (26) 代入式 (15) 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -X^T \mathbf{Q} X - (\gamma k_3 - k_2) \|z\|_2 + k_4 \|\zeta\|_2^2 \|\tilde{\mathbf{E}}\|_\infty \\ & + (c_M \sqrt{2Np} + k_1 + k_5 + k_6) \|\zeta\|_2 \|u\|_2 \\ & + \beta \gamma \sqrt{Np} (k_3 + 1) \|u\|_\infty, \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2$, $u = [\Delta \zeta^T, s^T]^T$ 。注意到若 $\alpha > \frac{2k}{\zeta a(\mathbf{L})}$ 且 $\beta > \frac{3k + 2 \sqrt{k[\alpha \zeta a(\mathbf{L}) + 2k] + 4\alpha \zeta a(\mathbf{L}) - k}}{4\alpha \zeta a(\mathbf{L}) - k}$, 则 \mathbf{Q}

是正定矩阵。于是有 $-X^T \mathbf{Q} X \leq -\lambda_1(\mathbf{Q}) \|X\|_2^2$ 。进而可得 $\dot{V} \leq -\lambda_1(\mathbf{Q}) (1 - 3\eta) \|\zeta\|_2^2 - (\gamma k_3 - k_2) \|z\|_2 - 3\lambda_1(\mathbf{Q}) \eta \|\zeta\|_2^2 + k_4 \|\zeta\|_2^2 \|\tilde{\mathbf{E}}\|_2 + (c_M \sqrt{2Np} + k_1 + k_5 + k_6) \|\zeta\|_2 \|u\|_\infty + \beta \gamma \sqrt{Np} (k_3 + 1) \|u\|_\infty$ 。其中 $\eta \in (0, \frac{1}{3})$ 。由引理 2 可知, 存在时间 T_2 , 当 $t \geq T_2$ 时, 有 $\|\tilde{\mathbf{E}}\|_2 \leq \frac{\lambda_1(\mathbf{Q}) \eta}{k_4}$, 即

$$-\lambda_1(\mathbf{Q}) \eta \|\zeta\|_2^2 + k_4 \|\zeta\|_2^2 \|\tilde{\mathbf{E}}\|_2 \leq 0。$$

另一方面, 当 $\|\zeta\|_2 \geq \max\{d_1 \|u\|_\infty, d_2 \sqrt{\|u\|_\infty}\}$ 时, 可知:

$$\begin{aligned} & (c_M \sqrt{2Np} + k_1 + k_5 + k_6) \|\zeta\|_2 \|u\|_\infty \\ & + \beta \gamma \sqrt{Np} (k_3 + 1) \|u\|_\infty - 2\lambda_1(\mathbf{Q}) \eta \|\zeta\|_2^2 \leq 0, \end{aligned}$$

其中, $d_1 = \frac{c_M \sqrt{2Np} + k_1 + k_5 + k_6}{\lambda_1(\mathbf{Q}) \eta}$, $d_2 = \sqrt{\frac{\beta \gamma \sqrt{Np} (k_3 + 1)}{\lambda_1(\mathbf{Q}) \eta}}$ 。

定义 $\rho(r) = \max\{d_1 r, d_2 \sqrt{r}\}$, 其为 \mathcal{K} 类函数^[23]。于是可得:

$$\begin{aligned} V \leq & -\lambda_1(\mathbf{Q}) (1 - 3\eta) \|\zeta\|_2^2 - (\gamma k_3 - k_2) \|z\|_2, \\ \forall \|\zeta\|_2 \geq & \rho(\|u\|_\infty), t \geq T, \end{aligned}$$

其中, $T = \max\{T_1, T_2\}$ 。

根据 [23, Theorem 4.19] 和输入-状态稳定性理论 [23, Definition 4.7] 可知, 若 $s \in \mathcal{L}_\infty^{Np}$, 又由引理 2 可知, $\Delta \zeta \in \mathcal{L}_\infty^N$, 则 $u \in \mathcal{L}_\infty^{Np+N}$, 从而 $x \in \mathcal{L}_\infty^{Np}$ 且 $y \in \mathcal{L}_\infty^{Np}$; 进一步, 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} s = \mathbf{0}_{Np}$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x = \mathbf{0}_{Np}$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} y = \mathbf{0}_{Np}$ 。结合 x 与 y 的定义, 可得协调步骤的结论成立。

接下来,考虑最优跟踪步骤。令 $\chi = \sum_{j=1}^N \nabla f_j(\mathbf{q}_j, t)$

且 $\psi = \sum_{j=1}^N [\mathbf{v}_j + \mathbf{F}_j(\mathbf{q}_j, t)]$, 并构造 Lyapunov 候选函数

$W = \frac{1}{2} \chi^T \chi + \frac{1}{2} \psi^T \psi$ 。对 W 求导可得:

$$\dot{W} = -\chi^T \chi + \chi^T \left[\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j(\mathbf{q}_j, t) \mathbf{s}_j \right] - \psi^T \Pi,$$

其中:

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{j=1}^N (\hat{\xi}_{jj} - \xi_j) \sum_{k=1}^N a_{jk} [\alpha(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k) + \beta(\dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_k)] \\ & + \gamma \sum_{j=1}^N (\hat{\xi}_{jj} - \xi_j) \mathbf{h} \left(\sum_{k=1}^N a_{jk} [\alpha(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k) + \beta(\dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_k)] \right). \end{aligned}$$

由引理 2 及其证明过程可知, $\hat{\xi}_j$ 指数收敛到 ξ , 即存在常数 $c_\xi > 0$ 和 $\lambda_\xi > 0$, 使得对于任意 $j \in \mathcal{N}$, 有 $\sum_{j=1}^N |\hat{\xi}_{jj} - \xi_j| \leq c_\xi e^{-\lambda_\xi t}$ 。又由协调步骤可知, \mathbf{q}_j 、 $\dot{\mathbf{q}}_j$ 和 \mathbf{v}_j 有界, 从而存在 $C_z > 0$, 使得

$$\left\| \sum_{k=1}^N a_{jk} [\alpha(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k) + \beta(\dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_k)] + \gamma \mathbf{h} \left(\sum_{k=1}^N a_{jk} [\alpha(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_k) + \beta(\dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_k)] \right) \right\|_2 \leq C_z.$$

另一方面, 结合假设 2 和 4 可知, 存在 $C_\psi > 0$, 使得 $\|\psi\|_2 \leq C_\psi$ 。于是有 $|\psi^T \Pi| \leq C_\psi C_z c_\xi e^{-\lambda_\xi t}$ 。注意到 $\chi^T \left[\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j(\mathbf{q}_j, t) \mathbf{s}_j \right] \leq \frac{1}{2} \|\chi\|_2^2 + \frac{N \bar{m}^2}{2} \sum_{j=1}^N \|\mathbf{s}_j\|_2^2$, 因此可得:

$$\dot{W} \leq -\frac{1}{2} \|\chi\|_2^2 + \frac{N \bar{m}^2}{2} \sum_{j=1}^N \|\mathbf{s}_j\|_2^2 + C_\psi C_z c_\xi e^{-\lambda_\xi t}.$$

故 $2\dot{W} + \|\chi\|_2^2 \leq N \bar{m}^2 \sum_{j=1}^N \|\mathbf{s}_j\|_2^2 + 2C_\psi C_z c_\xi e^{-\lambda_\xi t}$ 成立。

若 $\mathbf{s}_j \in \mathcal{L}_2^p$, 则 $\int_0^t \|\mathbf{s}_j(\tau)\|_2^2 d\tau < \infty, \forall t \geq 0$ 。注意到 $W \geq 0$ 且 $\int_0^t e^{-\lambda_\xi \tau} d\tau < \infty, \forall t \geq 0$, 则 $2W + \int_0^t \|\chi(\tau)\|_2^2 d\tau < \infty, \forall t \geq 0$, 这意味着 $W \in \mathcal{L}_\infty^p$ 且 $\chi \in \mathcal{L}_2^p$ 。因此, $\chi \in \mathcal{L}_\infty^p$ 且 $\psi \in \mathcal{L}_\infty^p$ 。由于 $\mathbf{q}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{q}_j \in \mathcal{L}_\infty^p$, 则对 $\forall i \in \mathcal{N}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}^* \in \mathcal{L}_\infty^p$ 。结论(1)得证。

若对任意 $j \in \mathcal{N}$ 有 $\mathbf{s}_j \in \mathcal{L}_\infty^p$, 则由假设 2 和 4 可得 $\dot{\chi} \in \mathcal{L}_\infty^p$ 。结合 $\chi \in \mathcal{L}_2^p$, 根据 Barbalat 引理^[24]可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \nabla f_j(\mathbf{q}_j, t) = \mathbf{0}_p$ 。进一步, 由协调步骤可知, 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{s}_i = \mathbf{0}_p$, 则对任意 $i, j \in \mathcal{N}$ 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) = \mathbf{0}_p$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) = \mathbf{0}_p$, 从而对 $\forall i \in \mathcal{N}$ 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}_i = \mathbf{q}^*$ 。结论(2)得证。证毕

引理 4 若假设 1~5 成立, 则对于系统(10)~(12),

若对任意 $j \in \mathcal{N}$ 有 $\mathbf{s}_i \in \mathcal{L}_\infty^p \cap \mathcal{L}_2^p$, 那么所有 $\phi_i \in \mathcal{L}_\infty^p$ 。

证明 该结论可由引理 3 及式(5)、式(6), 结合假设 2、4 直接推出。

定理 1 考虑由式(1)描述的 EL 系统, 采用分布式优化器(3)~(6)和自适应控制器(7)~(9)所构成的分布式优化控制算法。若假设 1~5 成立, 参数 α, β 和 γ 满足 $\alpha > \frac{2k}{\underline{\xi} a(\mathbf{L})}, \beta >$

$$\max \left\{ \frac{3k+2 \sqrt{k [\alpha \underline{\xi} a(\mathbf{L}) + 2k] + 4\alpha \underline{\xi} a(\mathbf{L}) - k}}{4\alpha \underline{\xi} a(\mathbf{L}) - k} \alpha, \sqrt{\frac{\alpha}{2\alpha(\mathbf{L}) \underline{\xi}}} \right\} \text{ 和}$$

$$\gamma > \frac{c_2 \sigma_{\max}(\mathbf{L}) N \sqrt{Np}}{a(\mathbf{L}) \underline{\xi}}, \text{ 其中 } k = \frac{c_1 \sigma_{\max}(\mathbf{L}) N p}{a}, \underline{\xi} =$$

$\min_{i \in \mathcal{N}} \{\xi_i\}, c_1$ 和 c_2 在假设 5 中给出, 则所有智能体的状态能够全局渐近收敛至全局时变代价函数的最优轨迹, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}_i = \mathbf{q}^*, \forall i \in \mathcal{N}$ 。

证明 对任意 $i \in \mathcal{N}$, 定义 Lyapunov 候选函数 $V_i = \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{g}}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\mathbf{g}}_i$, 其中 $\tilde{\mathbf{g}}_i = \hat{\mathbf{g}}_i - \mathbf{g}_i$ 。利用性质 2 和自适应律(9), 沿系统轨迹对 V_i 求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & \mathbf{s}_i^T [\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i] + \tilde{\mathbf{g}}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\hat{\mathbf{g}}}_i \\ = & -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i \leq 0, \end{aligned}$$

因此, V_i 有界, 进而 $\mathbf{s}_i \in \mathcal{L}_\infty^p$ 且 $\tilde{\mathbf{g}}_i \in \mathcal{L}_\infty^m$, 故 $\hat{\mathbf{g}}_i \in \mathcal{L}_\infty^m$ 。由于 V_i 非负且 $\dot{V}_i = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i \leq 0, V_i$ 收敛到某一有限值。进一步, $\int_0^t \mathbf{s}_i^T(\tau) \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i(\tau) d\tau = V_i(0) - V_i(t) < \infty$, 因此对 $\forall i \in \mathcal{N}$ 可得 $\mathbf{s}_i \in \mathcal{L}_2^p$ 。

由于 $\mathbf{s}_i \in \mathcal{L}_\infty^p \cap \mathcal{L}_2^p$, 由引理 4 可知 $\phi_i \in \mathcal{L}_\infty^p$ 。根据引理 3 可知 $\mathbf{q}_i - \mathbf{q}^* \in \mathcal{L}_\infty^p$, 又因 $\mathbf{q}^* \in \mathcal{L}_\infty^p$, 则 $\mathbf{q}_i \in \mathcal{L}_\infty^p$ 。进一步, 由引理 3 协调步骤的证明可知 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}_\infty^{Np}$, 且 \mathbf{v} 是 \mathbf{y} 的线性变换, 则 $\mathbf{v}_i \in \mathcal{L}_\infty^p$ 。由式(10)可得 $\dot{\mathbf{q}}_i \in \mathcal{L}_\infty^p$ 。另一方面, 考虑式(11), 由于 $\mathbf{q}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{s}_i, \phi_i$ 均有界, 则 $\dot{\mathbf{v}}_i \in \mathcal{L}_\infty^p$ 。

将控制器(8)代入动力学方程(1), 并利用性质 3, 可得:

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \tilde{\mathbf{g}}_i,$$

由于 $\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{v}_i, \dot{\mathbf{v}}_i, \mathbf{s}_i, \tilde{\mathbf{g}}_i$ 均有界, 进而 $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i), \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i$ 和 $\mathbf{Y}_i \tilde{\mathbf{g}}_i$ 亦有界, 又 $\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)$ 一致正定, 则 $\dot{\mathbf{s}}_i \in \mathcal{L}_\infty^p$ 。因此, 对 $\forall i \in \mathcal{N}, \mathbf{s}_i$ 是一致连续的。由于 $\mathbf{s}_i \in \mathcal{L}_2^p$ 且一致连续, 根据 Barbalat 引理^[24]可知, 对 $\forall i \in \mathcal{N}$ 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{s}_i = \mathbf{0}_p$ 。进而, 由引理 3 可知, 对 $\forall i \in \mathcal{N}, \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}_i = \mathbf{q}^*$ 。证毕

4 仿真实验

本节通过数值算例验证算法(3)~(9)的有效性。考虑一组由 10 个双连杆旋转关节机械臂组成的多智能体系统, 每个机械臂视为一个智能体, 各机械臂的动力学由式(1)描述^[5], 编号为 1, 2, ..., 10。每个机械

臂 i 具有如下局部代价函数:

$$f_i(\mathbf{q}_i, t) = [q_{i_1} - i \sin(t)]^2 + [q_{i_2} - i \cos(t)]^2,$$

其中, $\mathbf{q}_i = [q_{i_1}, q_{i_2}]^T, \forall i \in \mathcal{N}$ 。智能体之间的信息交互边集为 $\mathcal{E} = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (9, 10), (10, 1), (1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ 。

在分布式优化算法(8)和(9)中,对 $\forall i \in \mathcal{N}$, 令 $\Gamma_i = 0.09I_5$ 和 $K_i = 14I_2$, 并选取控制器参数为 $\alpha = 50$ 、 $\beta = 100$ 以及 $\gamma = 200$ 。设 $\mathbf{q}^* = [q_1^*, q_2^*]^T$ 表示最小化所有局部代价函数 $f_i(\mathbf{q}_i, t)$ 之和的最优轨迹。图 1 分别展示了各智能体状态轨迹的 q_{i_1} 分量和 q_{i_2} 分量与最优轨迹 q_1^* 和 q_2^* 的演化过程, 可以看出, 所有智能体的状态均收敛至最优轨迹, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} q_{i_1} = q_1^*$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} q_{i_2} = q_2^*$ 。

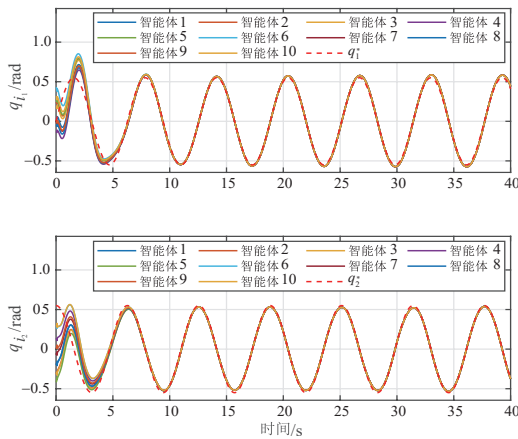


图 1 各智能体运动轨迹及最优轨迹

Figure 1 Motion trajectories of agents and the optimal trajectory

5 结束语

本文解决了非平衡有向图下 EL 群体智能系统的分布式时变优化问题。结合拉普拉斯矩阵零特征值相关的左特征向量在线估计与带有梯度补偿的自适应控制器, 提出了分布式优化-控制算法, 突破了传统方法对平衡通信拓扑结构和静态优化目标的限制。理论分析证明了系统能够渐近收敛至时变最优轨迹, 仿真实验进一步验证了算法的有效性。未来研究将进一步探索切换拓扑下的分布式优化算法设计, 以增强算法的实用性与普适性。

参考文献

[1] 江碧涛, 温广辉, 周佳玲, 等. 智能无人集群系统跨域协同技术研究现状与展望[J]. 中国工程科学, 2024, 26(1): 117-126.
Jiang Bitao, Wen Guanghui, Zhou Jialing, et al. Cross-domain cooperative technology of intelligent unmanned

swarm systems: Current status and prospects[J]. Strategic Study of CAE, 2024, 26(1): 117-126. (in Chinese)

[2] 雷兴明, 邢昌风, 吴玲, 等. 基于分布式约束优化的多平台导弹协同航路规划[J]. 电子学报, 2012, 40(10): 2068-2072.
Lei Xingming, Xing Changfeng, Wu Ling, et al. Path planning for multi-platform missiles based on distributed constrained optimization[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(10): 2068-2072. (in Chinese)

[3] 温广辉, 余星火, 黄廷文, 等. 模型参数不确定下多无人艇系统固定时间二分编队跟踪控制[J]. 自动化学报, 2025, 51(3): 669-677.
Wen Guanghui, Yu Xinghuo, Huang Tingwen, et al. Fixed-time bipartite formation tracking control for multi-USV systems with uncertain model parameters[J]. Acta Automatica Sinica, 2025, 51(3): 669-677. (in Chinese)

[4] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.

[5] Spong M W, Hutchinson S, Vidyasagar M. Robot modeling and control[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006.

[6] 饶凌风, 耿娜, 张勇, 等. 不确定环境下无人机任务分配的种群交互式粒子群算法[J]. 电子学报, 2025, 53(8): 2678-2690.
Rao Lingfeng, Geng Na, Zhang Yong, et al. Population interactive particle swarm optimization algorithm for UAV task allocation in uncertain environments[J]. Acta Electronica Sinica, 2025, 53(8): 2678-2690. (in Chinese)

[7] 蒋伟进, 杜熙晨, 蒋意容, 等. 基于自适应联邦学习的环境监测群感知算法[J]. 电子学报, 2025, 53(3): 821-835.
Jiang Weijin, Du Xichen, Jiang Yirong, et al. Adaptive federated learning based crowd sensing algorithm for environmental monitoring[J]. Acta Electronica Sinica, 2025, 53(3): 821-835. (in Chinese)

[8] 朱旭, 闫建国, 屈耀红. 高阶多智能体系统的一致性分析[J]. 电子学报, 2012, 40(12): 2466-2471.
Zhu Xu, Yan Jianguo, Qu Yaohong. Consensus analysis for high-order multi-agent systems[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(12): 2466-2471. (in Chinese)

[9] Zhang Yanqiong, Deng Zhenhua, Hong Yiguang. Distributed optimal coordination for multiple heterogeneous Euler-Lagrangian systems[J]. Automatica, 2017, 79: 207-213.

[10] Zou Yao, Meng Ziyang, Hong Yiguang. Adaptive distributed optimization algorithms for Euler-Lagrange systems[J]. Automatica, 2020, 119: 109060.

[11] Zou Yao, Huang Bomim, Meng Ziyang. Distributed continuous-time algorithm for constrained optimization of networked Euler-Lagrange systems[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2021, 8(2): 1034-1042.

[12] Qin Zhengyan, Jiang Liangze, Liu Tengfei, et al. Distrib-

- uted optimization for uncertain Euler-Lagrange systems with local and relative measurements[J]. Automatica, 2022, 139: 110113.
- [13] Ding Yong, Wang Hanlei, Ren Wei. Distributed continuous-time optimization for networked Lagrangian systems with time-varying cost functions under fixed graphs[C]// 2022 American Control Conference (ACC). Piscataway: IEEE, 2022: 2779-2784.
- [14] Ding Yong, Wang Hanlei, Ren Wei. Distributed continuous-time time-varying optimization for networked Lagrangian systems with quadratic cost functions[J]. Automatica, 2025, 171: 111882.
- [15] Luan Meng, Wen Guanghui, Liu Hongzhe, et al. Distributed discrete-time convex optimization with closed convex set constraints: Linearly convergent algorithm design[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2024, 54(4): 2271-2283.
- [16] Luan Meng, Wen Guanghui, Lyu Yuezhu, et al. Distributed constrained optimization over unbalanced time-varying digraphs: A randomized constraint solving algorithm[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2024, 69(8): 5154-5167.
- [17] Wen Guanghui, Zheng Weixing, Wan Ying. Distributed robust optimization for networked agent systems with unknown nonlinearities[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2023, 68(9): 5230-5244.
- [18] Li Zhenhong, Ding Zhengtao, Sun Junyong, et al. Distributed adaptive convex optimization on directed graphs via continuous-time algorithms[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(5): 1434-1441.
- [19] Wen Guanghui, Duan Zhisheng, Yu Wenwu, et al. Consensus in multi-agent systems with communication constraints[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2012, 22(2): 170-182.
- [20] Simonetto A, Mokhtari A, Koppel A, et al. A class of prediction-correction methods for time-varying convex optimization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(17): 4576-4591.
- [21] Rahili S, Ren Wei. Distributed continuous-time convex optimization with time-varying cost functions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(4): 1590-1605.
- [22] Huang Bomin, Zou Yao, Meng Ziyang, et al. Distributed time-varying convex optimization for a class of nonlinear multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(2): 801-808.
- [23] Khalil H K. Nonlinear systems[M]. 3rd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
- [24] Slotine J J, Li Weiping. Applied nonlinear control[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hal, 1991.

作者简介



张云飞 男,1998年出生于江苏省宿迁市。现为辽宁工程技术大学硕士研究生。主要研究方向为最优化理论与应用。
E-mail: zhangyflgd@163.com



栾萌 女,1996年出生于河北省衡水市。现为岭南大学数据科学学院博士后。主要研究方向为多智能体系统的分布式优化与博弈决策。
E-mail: mengluan@ln.edu.hk



赵丹 女,1992年出生于陕西省西安市。现为东南大学自动化学院助理研究员。主要研究方向为分布式攻击隔离与弹性协同控制。
E-mail: danzhao@seu.edu.cn



黄 颀 男,1989年出生于湖北省武汉市。现为湖北珞珈实验室副研究员,硕士生导师。主要研究方向为复杂系统协同控制、空天飞行器智能控制、姿态与轨道控制。
E-mail: dhuang@whu.edu.cn



黄廷文 男,1967年出生于重庆市。现为深圳理工大学计算机科学与控制工程学院教授。主要研究方向为多智能体系统、自适应控制、最优控制。
E-mail: huangtw2024@163.com