

# 联合TDOA-SA的扫描辐射源半正定松弛定位算法

张海蕊,张兆林\*,谢 坚,陶明亮,王 伶

(西北工业大学电子信息学院,陕西西安 710072)

**摘 要:** 扫描辐射源因其主瓣信号信噪比高、波束窄、扫描周期稳定等特点,在军事领域和民用领域获得了广泛的应用。针对扫描辐射源无源定位中单一量测体制信息有限的问题,本文提出一种联合时差(Time Difference Of Arrival, TDOA)和扫描角度(Scanning Angle, SA)的半正定松弛扫描辐射源定位算法。首先,构建了联合TDOA-SA的扫描辐射源最大似然定位模型。其次,针对联合体制非凸代价函数存在的初始值敏感、易陷入局部最优的问题,通过引入辅助变量对原始非凸的观测模型进行松弛处理,将问题转化为可高效求解的凸优化形式,从而获得稳定的全局最优解。在此基础上,结合距离二阶锥约束与扫描角度有界约束进行可行域分析,缩小松弛后引起的可行域扩张,实现扫描辐射源的精确定位。最后,进行了联合体制的克拉美罗下界(Cramér-Rao Lower Bound, CRLB)推导和最小观测站数目分析,并通过仿真试验分析所提算法的定位性能。仿真结果表明,在量测误差较大场景下,联合TDOA-SA的定位精度优于单一SA量测定位体制。当扫描角度测量均方根误差小于 $1^\circ$ 、时差测量均方根误差小于 $50 \mu\text{s}$ 时,本文所提算法定位精度逼近克拉美罗性能界。

**关键词:** 无源定位;扫描辐射源;扫描角度;到达时差;半正定松弛

**基金项目:** 国家自然科学基金(No.62571444, No.62271412)

**中图分类号:** TN958.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112(2026)03-1221-13

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.12263/DZXB.20260058

## Semidefinite Relaxation-Based Localization of Scanning Emitters Using Joint SA and TDOA Measurements

ZHANG Hairui, ZHANG Zhaolin\*, XIE Jian, TAO Mingliang, WANG Ling

(School of Electronics and Information, University of Northwestern Polytechnical of China, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

**Abstract:** Scanning emitters are characterized by high main-lobe signal-to-noise ratios, narrow beams, and stable scan periods, and have been widely deployed in both military and civilian applications. To address the limited information offered by a single measurement modality in passive localization of scanning emitters, this paper proposes a semidefinite-relaxation localization algorithm that jointly exploits time difference of arrival (TDOA) and scanning angle (SA) measurements. We first formulate a maximum-likelihood localization model under the combined TDOA-SA measurement scheme. To overcome the strong nonconvexity of the resulting cost function—manifested by sensitivity to initialization and susceptibility to local minima—we introduce auxiliary variables to relax the original nonconvex observation model and recast the problem into an efficiently solvable convex optimization program, yielding a stable globally optimal solution to the relaxed formulation. On this basis, feasible-set analysis is conducted by incorporating second-order cone constraints on range and bounded constraints on scanning angle, which effectively suppresses the feasible-set expansion induced by relaxation and enables accurate emitter localization. Furthermore, the Cramér-Rao lower bound (CRLB) under the joint measurement scheme is derived, and the minimum number of required receiving stations is analyzed. Simulation studies are conducted to evaluate the localization performance of the proposed algorithm. Simulation results demonstrate that, under scenarios with relatively large measurement errors, the proposed joint TDOA-SA scheme achieves higher localization accuracy than the scheme relying solely on SA measurements. When the root-mean-square error (RMSE) of SA measurement is below  $1^\circ$  and the RMSE of TDOA is below  $50 \mu\text{s}$ , localization performance of the proposed algorithm approaches the CRLB.

**Keywords:** passive localization; scanning emitters; scanning angle; time difference of arrival; semidefinite relaxation

**Foundation Item(s):** National Natural Science Foundation of China (No.62571444, No.62271412)

## 0 引言

无源定位技术,又称被动定位技术,通过接收并测量非合作信号中包含位置信息的参数来确定辐射源位置,在侦察、监视、预警等领域中得到广泛关注和深入研究<sup>[1]</sup>。目前常用的参数信息包括辐射源的到达角(Angle Of Arrival, AOA)<sup>[2]</sup>、到达时间(Time Of Arrival, TOA)<sup>[3]</sup>、到达时间差(Time Difference Of Arrival, TDOA)<sup>[4]</sup>、到达频率(Frequency Of Arrival, FOA)<sup>[5]</sup>、到达频率差(Frequency Difference Of Arrival, FDOA)<sup>[6]</sup>以及对应的组合等,通过利用上述参数构建相关定位方程实现目标位置求解。不同量测体制在设备复杂度、同步要求、适用场景等方面存在显著差异,如何在特定应用场景下选择并融合有效量测信息,是提升无源定位能力的核心问题之一。

在典型辐射源类型中,扫描辐射源(Scanning Emitters, SE)通常指在空域内进行周期性扫描的雷达系统,包括机械扫描雷达和相位扫描雷达。该类型辐射源具有主瓣信噪比高、波束窄、扫描周期稳定等特点,在军事领域和民用领域获得了广泛的应用<sup>[7]</sup>。针对扫描辐射源的被动定位问题,传统基于 AOA 的定位体制,在实际工程应用中由于坐标系转换和观测站姿态等引入了额外误差项,导致定位模型复杂化。除此之外,该体制的定位精度依赖于多通道的幅相一致性<sup>[8]</sup>,对阵列规模和接收机性能要求较高。

近年来,面向扫描辐射源的研究主要利用主瓣信号截获时间(Time Of Interception, TOI)进行定位。TOI 定义为信号主瓣峰值到达观测站的时刻,通过将多个观测站的一组 TOI 转换成截获时间差(Time Difference Of Interception, TDOI)。并结合已知或估计扫描周期计算扫描角度(Scanning Angle, SA),进一步利用该量测构造与辐射源位置有关的几何模型,实现位置解算<sup>[9]</sup>。随着时间测量及同步技术的发展,在具备较高稳定度的时钟基准和较高精度授时同步支撑的多站被动侦察场景中,时间量测精度可达纳秒量级<sup>[10-11]</sup>。经扫描速率映射后,SA 量测精度显著优于传统 AOA 参数,可实现较高精度的辐射源定位。

2007 年,文献[12]首次系统开展扫描体制无源定位研究,并推导相应的克拉美罗下界(Cramér-Rao Lower Bound, CRLB),为后续扫描辐射源场景建模与精度分析提供了较为完整的理论基础。随着无源定位技术的飞速发展,非线性最小二乘(Nonlinear Least Squares, NLS)、总体最小二乘(Total Least Squares, TLS)<sup>[13]</sup>等典型方法相继被提出,基于 SA 单一观测量的定位方法趋于成熟。

在此基础上,诸多学者进一步联合 AOA 和 SA 异构量测对扫描辐射源进行定位,通过融合不同观测量

的互补优势实现定位精度的提升。文献[14]面向已知扫描周期的辐射源定位问题,提出一种基于 AOA 和 TDOI 的联合定位方法。通过将 TDOI 观测量转换成等效 AOA 观测量,并利用加权伪线性最小二乘(Weighted Pseudolinear Least Squares, WPLS)算法求解;为进一步消除观测矩阵相关噪声导致的估计偏差,提出加权辅助变量(Weighted Instrumental Variables, WIV)定位方法,在辐射源单个扫描周期内即可达到 CRLB。文献[15]针对扫描速率未知的情况,提出一种最大似然(Maximum Likelihood, ML)定位算法,该算法将各个量测分别投影至目标状态空间,并对目标状态进行修正、迭代和融合,实现对扫描速率和目标状态的联合估计。文献[16]针对扫描速率先验难以准确获取的问题,提出基于 AOA 与 SA 的扫描速率-位置联合估计框架,通过引入线性约束采用最大似然方法实现扫描速率自适应估计,并在融合更新 AOA 信息后采用加权最小二乘(Weighted Least Squares, WLS)实现定位。

综上所述,现有关于扫描辐射源的定位方法大多联合 AOA-SA,但两者的适用场景存在一定差异。其中, AOA 依赖观测站多通道间的幅度差或相位差进行参数估计,适用于可部署多天线阵列的侦察场景。SA 则利用辐射源扫描波束的周期特性,利用单通道即可实现参数的准确估计,适用于分布式、低硬件复杂度的侦察场景。除此之外, AOA 和 SA 本质上均属于角度量测信息,两者可相互映射,存在一定的信息冗余,定位精度提升有限。

为克服上述不足,在多站侦察场景中,可仅利用单通道天线完成站间脉内 TDOA 和脉间 TDOI 的提取。在降低硬件复杂度的同时,利用 TDOA 提供的距离差约束与 SA 的角度约束,构建 TDOA-SA 异构量测的定位体制,形成较强的几何互补,实现目标位置求解。但现有联合 TDOA-SA 的算法依赖距离先验信息<sup>[17]</sup>,且最大似然算法受限于模型的高维非线性特征,存在易发散、难收敛等问题。

半正定松弛技术(Semi-Definite Relaxation, SDR)作为一种求解非凸优化问题的有效方法,通过将原始非凸优化问题重构为可高效求解的凸优化问题,从而在精确松弛的前提下获得稳健的全局最优解。近年来,凸松弛技术已应用于信号处理的许多领域,如辐射源与传感器网络定位<sup>[18]</sup>、波束成形<sup>[19]</sup>、MIMO 检测<sup>[20]</sup>等。大量研究表明,在中低信噪比以及强噪声扰动条件下,半正定松弛方法可实现更为稳健的参数估计。

针对联合体制下的扫描辐射源无源定位问题,本文提出了基于 TDOA-SA 的半正定松弛扫描辐射源定位算法。首先构建了联合 TDOA-SA 的异构量测几何定位模型,并推导了对应的 CRLB。其次,采用半正

定松弛技术,构建基于凸优化的定位求解框架。通过引入辅助变量将原始非凸观测模型松弛为凸优化模型,并结合距离和扫描角度有界约束进行可行域分析,缩小松弛后引起的可行域扩张,实现辐射源位置的精确求解。最后通过仿真验证本文所提算法,在量测误差较大的场景下,联合 TDOA-SA 定位精度优于单一 SA 量测信息定位体制,且定位精度逼近 CRLB。

## 1 扫描辐射源定位模型

考虑二维空间定位场景,假设存在  $n$  个静止观测站,在二维笛卡儿直角坐标系下,位置表示为  $\mathbf{p}_i = [x_i, y_i]^T, i = 1, 2, 3, \dots, n$ 。扫描体制辐射源保持静止,位置表示为  $\mathbf{u} = [x_0, y_0]^T$ 。其主瓣扫描速度为固定值  $w$ ,扫描模式为  $360^\circ$  圆周扫描。假设观测站均在其扫描范围内,在观测时间窗内处于共视条件,能够同步截获辐射源信号,典型工作场景如图 1 所示。

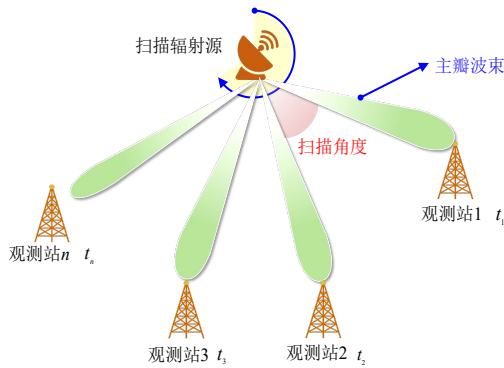


图 1 扫描辐射源定位场景示意图

Figure 1 Passive localization scenario for scanning emitters

当待观测辐射源的主瓣扫过第  $i$  个观测站时,截获时间为  $t_i$ 。以观测站 1 作为参考站,则其他观测站相对参考站的截获时间差量测可表示为

$$\eta_i = t_i - t_1 = \psi_i(w, \mathbf{u}) + v_i, i = 2, \dots, n \quad (1)$$

其中,  $v_i$  为截获时间差量测噪声,服从均值为 0、方差为  $\sigma_i^2$  的高斯分布;  $\psi_i(w, \mathbf{u})$  为第  $i$  个观测站相对参考站的测量方程,即

$$\psi_i(w, \mathbf{u}) = \frac{1}{w} \arccos \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{u})^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{u})}{\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{u}\| \|\mathbf{p}_i - \mathbf{u}\|} \quad (2)$$

其中,  $\|\cdot\|$  表示欧几里得范数。

当扫描速率  $w$  已知时,利用截获时间差即可计算扫描角度:

$$f_i(\mathbf{u}) = w\eta_i = \arctan\left(\frac{y-y_i}{x-x_i}\right) - \arctan\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right) + \Delta\alpha_i \quad (3)$$

基于观测站位置和扫描角度构造等角度圆,利用不同站点的等角度圆之间的几何关系即可确定辐射源的位置。相较于利用扫描角度的辐射源定位方法,

基于时差的无源定位技术则是通过测量辐射源的同一脉冲到达不同观测站的时间差,构造与辐射源位置有关的双曲线几何模型。通过利用多站的若干组时差双曲线进行交汇求解,实现对辐射源的无源定位<sup>[21]</sup>。以第一个观测站为参考站,可得时差定位方程:

$$\tau_i = g_i(\mathbf{u}) = \frac{(\|\mathbf{u} - \mathbf{p}_i\| - \|\mathbf{u} - \mathbf{p}_1\|)}{c} + \Delta\tau_i \quad (4)$$

其中,  $\tau_i$  表示信号到达观测站  $i$  与参考站的传播时间差;  $c$  表示光速;  $\Delta\tau_i$  为时间测量噪声,服从均值为 0、方差为  $\sigma_{\tau_i}^2$  的高斯分布。

通过联合脉内时差和脉间截获时间差,构造双曲线和等角度圆,形成几何互补,提升扫描辐射源的定位精度,几何定位场景示意图如图 2 所示。

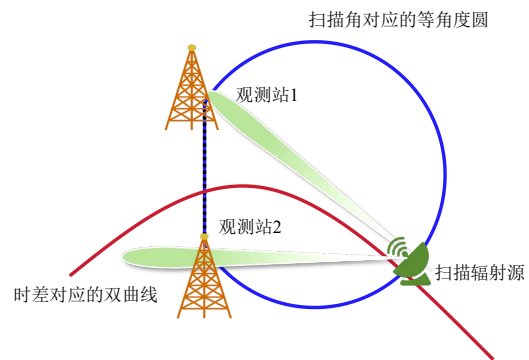


图 2 联合时差和扫描角几何定位示意图

Figure 2 Geometric localization using TDOA and SA

## 2 联合时差和扫描角的定位方法

### 2.1 基于最大似然的扫描辐射源定位方法

最大似然估计为参数估计的有效方法<sup>[22]</sup>,本文针对静止扫描辐射源定位场景,在多站共视的前提下,利用 TDOA 和 SA 作为观测量,对辐射源位置进行估计。根据观测误差的概率密度函数构建目标位置的最大似然估计模型,利用牛顿迭代方法更新位置并逐步逼近最优解。

通过联合 TDOA-SA 的定位方程,构造系统整体的观测函数为

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\tau_2 \\ \vdots \\ \Delta\tau_n \\ \Delta\alpha_2 \\ \vdots \\ \Delta\alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ g_n(\mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{u}) \end{bmatrix} = H(\mathbf{u}) + \mathbf{N} \quad (5)$$

其中,  $\boldsymbol{\theta}$  为多个观测站的联合量测集合;  $H(\cdot)$  为联合观测函数;  $\mathbf{N} = [\Delta\tau_2 \cdots \Delta\tau_n, \Delta\alpha_2 \cdots \Delta\alpha_n]^T \in \mathbb{R}^{2(n-1) \times 1}$  为扫描角度和时差的联合观测量误差,服从零均值、协方

差矩阵为  $\mathbf{Q}$  的高斯分布。

构建基于扫描角度和时差观测量的概率密度函数:

$$\rho(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}-H(\mathbf{u})]^T \mathbf{Q}^{-1}[\boldsymbol{\theta}-H(\mathbf{u})]\right)}{(2\pi)^{n-1} |\mathbf{Q}|^{1/2}} \quad (6)$$

对式(6)进行对数运算,并去掉常数项,得到关于目标位置的对数似然函数:

$$\Psi(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}-H(\mathbf{u})]^T \mathbf{Q}^{-1}[\boldsymbol{\theta}-H(\mathbf{u})] \quad (7)$$

因此,以最小化量测误差的平方和构建目标函数,实现扫描辐射源位置估计:

$$\hat{\mathbf{u}} = \operatorname{argmax}(\Psi(\mathbf{u})) \quad (8)$$

网格搜索方法通过在离散二维位置空间内遍历代价函数,获取代价函数最大值实现目标位置的初始估计<sup>[23]</sup>。一般而言,该方法估计精度与网格步长有关,假设网格粗搜步长为  $\Delta g$ ,典型信噪比场景下,搜索估计误差为

$$\{|\Delta x|, |\Delta y|\} \leq \frac{\Delta g}{2} \quad (9)$$

其中,  $\Delta x$ 、 $\Delta y$  分别为  $x$ 、 $y$  维位置估计误差。

在二维搜索空间内,网格划分越精细,定位精度越高,但搜索时长也同步增加<sup>[24]</sup>。为在保证定位精度的同时降低搜索时长,本文采用牛顿迭代方法更新位置信息,并逐步逼近最优解。以网格粗搜结果作为辐射源位置的初始估计值  $\mathbf{u}_0$ ,并将似然函数式(7)在  $\mathbf{u}_0$  处进行泰勒展开,忽略三阶展开项:

$$\Psi(\mathbf{u}) \approx \Psi(\mathbf{u}_0) + (\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)^T \mathbf{A} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)^T \mathbf{B}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0) \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{A}$  为一阶偏导数矩阵,  $\mathbf{B}$  为二阶偏导数矩阵:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \Psi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} = \Phi(\mathbf{u})^T \mathbf{Q}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-H(\mathbf{u})) \quad (11)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}^T} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{u})}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{u})}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{u})}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{u})}{\partial y \partial y} \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中,  $\Phi(\mathbf{u})$  为联合观测函数  $H(\mathbf{u})$  关于  $\mathbf{u}_0$  的 Jacobian 矩阵:

$$\Phi(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x} = \frac{1}{c} \left( \frac{x-x_i}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_i\|} - \frac{x-x_1}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|} \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial y} = \frac{1}{c} \left( \frac{y-y_i}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_i\|} - \frac{y-y_1}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{-(y-y_i)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_i\|^2} + \frac{(y-y_1)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{(x-x_i)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_i\|^2} - \frac{(x-x_1)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|^2} \quad (17)$$

似然函数  $\Psi(\mathbf{u})$  关于辐射源位置的二阶偏导为

$$\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{u})}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 H(\mathbf{u})}{\partial u_i \partial u_j} \mathbf{Q}^{-1}[\boldsymbol{\theta}-H(\mathbf{u})] - \left( \frac{\partial H(\mathbf{u})}{\partial u_i} \right)^T \mathbf{Q}^{-1} \frac{\partial H(\mathbf{u})}{\partial u_j} \quad (18)$$

其中,  $u_i$ 、 $u_j$  表示变量  $\mathbf{u}$  中包含的  $x$ 、 $y$  元素;  $H(\mathbf{u})$  的二阶偏导由  $f(\mathbf{u})$  和  $g(\mathbf{u})$  函数的偏导组成。

令一阶偏导数置零,计算目标函数  $\Psi(\mathbf{u})$  极大值:

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0) = 0 \quad (19)$$

对式(19)求解即为  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$ 。当第  $i$  次循环迭代,满足  $\|\mathbf{u}^{(i)} - \hat{\mathbf{u}}^{(i-1)}\| \leq \varepsilon$  时,认为算法已达到收敛条件,  $\hat{\mathbf{u}}^{(i)}$  即为辐射源位置的估计值。该方法可实现对辐射源的精确定位,但对初始位置要求较高,当初始值设计不合理时,易导致迭代收敛到局部极值或定位失效。

## 2.2 基于半正定松弛的扫描辐射源定位方法

半正定松弛技术可将原始非凸问题松弛转化为凸优化问题,此时局部最优解即为全局最优解<sup>[25]</sup>。本文通过引入辅助变量对非线性扫描角度、时差定位模型进行凸松弛,并结合距离和扫描角度有界约束进行可行域分析,缩小松弛后引起的可行域扩张,在无需初始位置先验的条件下,获得扫描辐射源位置的全局最优解。

首先构造基于 TDOA-SA 残差的加权最小二乘代价函数:

$$\begin{aligned} & \min [\mathbf{U} \quad \mathbf{V}] \mathbf{Q} [\mathbf{U} \quad \mathbf{V}]^T \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \tau_i = \frac{(\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_i\| - \|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|)}{c} + \Delta \tau_i \\ \alpha_i = \arctan\left(\frac{y-y_i}{x-x_i}\right) - \arctan\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right) + \Delta \alpha_i \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

其中,  $\mathbf{Q}$  表示加权矩阵;  $\mathbf{U} = [\Delta \tau_2, \Delta \tau_3, \dots, \Delta \tau_n]^T$ 、 $\mathbf{V} = [\Delta \alpha_2, \Delta \alpha_3, \dots, \Delta \alpha_n]^T$  表示多个观测站间的 TDOA 和 SA 测量误差。

为了将非凸目标函数转化为凸优化函数,引入半正定矩阵将目标函数式(20)转化为二次形式,即

$$f = \{(\varepsilon, \boldsymbol{\delta}): \varepsilon \geq \|\boldsymbol{\delta}\|_2^2\} \quad (21)$$

其中,  $\varepsilon$  为引入的误差辅助变量;  $\boldsymbol{\delta} = \Phi[\mathbf{U}, \mathbf{V}] \in \mathbb{R}^{2(n-1) \times 1}$  表示联合加权量测误差,  $\Phi$  为  $\mathbf{Q}$

的平方根分解因子,满足  $\mathbf{Q} = \Phi^T \Phi$  的分解条件。采用 Schur 补定理<sup>[26]</sup>将目标函数式(21)转化为半正定约束:

$$\begin{aligned} \min \quad & \varepsilon \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} \varepsilon & \delta^T \\ \delta & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

其中,  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2(n-1) \times 2(n-1)}$  表示单位阵。为了将非线性非凸的约束函数转化为线性凸约束形式,首先将 TDOA 定位方程中的距离项进行平方展开:

$$r_i^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{p}_i\|^2 = (x^2 + y^2) - 2(xx_i + yy_i) + (x_i^2 + y_i^2) \quad (23)$$

利用正切差公式将 SA 定位方程转换为

$$\tan \alpha_i = \frac{(y - y_i)(x - x_1) - (y - y_1)(x - x_i)}{(x - x_i)(x - x_1) + (y - y_i)(y - y_1)} \quad (24)$$

式(23)和式(24)均含有  $x^2$ 、 $y^2$ 、 $xy$  等非线性变量,因此构建增广向量  $\mathbf{z} = [x, y, 1]^T$ , 转化为矩阵形式:

$$\mathbf{X} = \mathbf{z}\mathbf{z}^T = \begin{bmatrix} x^2 & xy & x \\ xy & y^2 & y \\ x & y & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (25)$$

此时  $\mathbf{X}$  为实对称矩阵,满足  $\mathbf{X} \succeq 0$  约束,且  $\text{rank}(\mathbf{X}) = 1$ 。为进一步凸松弛非线性变量,定义矩阵:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_i \\ 0 & 0 & y_i \\ x_i & y_i & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

原始方程(23)中的非线性变量可描述为

$$x^2 + y^2 = \langle \mathbf{E}, \mathbf{X} \rangle = \text{tr}(\mathbf{E}^T \mathbf{X}) \quad (27)$$

$$xx_i + yy_i = \langle \mathbf{S}_i, \mathbf{X} \rangle = \text{tr}(\mathbf{S}_i^T \mathbf{X}) \quad (28)$$

其中,  $\langle \cdot \rangle$  表示 Frobenius 内积;  $\text{tr}(\cdot)$  表示求矩阵的迹。因此原始非线性 TDOA 方程被凸松弛为线性形式:

$$r_i^2 = \langle \mathbf{E} - 2\mathbf{S}_i, \mathbf{X} \rangle \quad (29)$$

同理,基于 SA 定位方程通过交叉相乘即可得  $N_i(\mathbf{u}) - \tan \alpha_i D_i(\mathbf{u}) = 0$ ,  $N_i(\mathbf{u})$  和  $D_i(\mathbf{u})$  均为  $x^2$ 、 $y^2$ 、 $x$ 、 $y$  的一次组合,即

$$N_i(\mathbf{u}) = (y_1 - y_i)x + (x_i - x_1)y + x_1 y_i - x_i y_1 = \langle \mathbf{P}_i, \mathbf{X} \rangle \quad (30)$$

$$\begin{aligned} D_i(\mathbf{u}) &= x^2 + y^2 - (x_i + x_1)x - (y_1 + y_i)y + x_i x_1 + y_i y_1 \\ &= \langle \mathbf{Q}_i, \mathbf{X} \rangle \end{aligned} \quad (31)$$

$\mathbf{P}_i$  和  $\mathbf{Q}_i$  为与观测站位置有关的常数矩阵,即

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(y_1 - y_i) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(x_i - x_1) \\ \frac{1}{2}(y_1 - y_i) & \frac{1}{2}(x_i - x_1) & x_1 y_i - x_i y_1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}(x_i + x_1) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}(y_1 + y_i) \\ -\frac{1}{2}(x_i + x_1) & -\frac{1}{2}(y_1 + y_i) & x_i x_1 + y_i y_1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

因此,原始非线性 SA 定位方程式(24)被凸松弛为线性形式:

$$\langle \mathbf{P}_i - k_i \mathbf{Q}_i, \mathbf{X} \rangle = 0 \quad (34)$$

其中,  $k_i = \tan \alpha_i$  为与扫描角度观测有关的常数。

经过上述松弛过程,基于 TDOA 和 SA 的非凸非线性定位问题已转换为凸优化问题。但由于辅助变量  $\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}^T$  被松弛为  $\hat{\mathbf{X}} \succeq \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}^T$ , 且舍弃了秩一约束,使得变量之间的内在耦合关系被削弱,可行域相较于原始非凸问题发生了扩张。当测量误差较大时,容易引起较大的定位偏差。因此,进一步引入距离二阶锥约束(Second-Order Cone, SOC)和扫描角度几何有界约束,收紧可行域,使得松弛后的凸优化问题更加近似原定位问题。

假设松弛后的凸优化问题存在可行解  $(\mathbf{X}, \mathbf{z})$ , 其中  $\mathbf{z}$  包含位置分量,因此观测站和辐射源的距离可表示为

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{p}_i\|^2 = \|\mathbf{G}_i \mathbf{z}\|^2 = \mathbf{z}^T \mathbf{F}_i \mathbf{z} = \text{tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{X}) \quad (35)$$

其中,  $\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_i \\ 0 & 1 & -y_i \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{F}_i = \mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i \succeq 0$ 。

由于构建辅助变量  $\hat{\mathbf{X}} \succeq \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}^T$  时舍弃了秩一约束,则  $\|\mathbf{u} - \mathbf{p}_i\|^2 \leq \text{tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{X})$ , 此时的可行域边界由矩阵变量  $\mathbf{X}$  控制,约束能力下降,因此引入距离约束收紧可行域:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{p}_i\|^2 \leq r_i^2 \quad (36)$$

此时式(36)是非凸的,根据 Schur 补定理将原始的 2 范数约束转换为二阶锥约束,即

$$\begin{bmatrix} r_i & (\mathbf{u} - \mathbf{p}_i)^T \\ \mathbf{u} - \mathbf{p}_i & r_i \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (37)$$

进一步,采用  $k\sigma_a$  置信界原则添加扫描角度几何约束:

$$|\hat{\alpha} - \alpha| \leq k\sigma_a \quad (38)$$

其中,  $\hat{\alpha}$  表示 SA 测量值;  $\alpha$  表示 SA 理论值;  $\sigma_a$  为扫描角度测量统计标准差;  $k$  为置信度参数,通常取非负数。一般而言,  $k$  值越大,可行域收紧效果越差。但较小的  $k$  值容易导致可行域偏离真值范围,从而引起较大的定位偏差。

根据扫描角度的等角度圆几何模型,半径计算公式为  $R_i = d_i / 2 \sin \hat{\alpha}_i$ ,  $d_i$  表示观测站  $i$  与参考站的距离,圆心计算方式为

$$C_i = \frac{(p_i + p_1)}{2} + \Delta \frac{\xi(p_i - p_1)H_i}{R_i} \quad (39)$$

其中,  $\xi(\cdot)$  表示计算向量的正交向量;  $\Delta = \pm 1$  表示辐射源位置与观测站基线的相对关系;  $H_i$  为圆心到观测站组成基线的正交距离。因此可建立如下约束:

$$R_{in} \leq \|u - C\| \leq R_{out} \quad (40)$$

采用 Schur 定理将角度几何约束转化为凸约束, 即

$$\begin{bmatrix} R_{out} & (u - C)^T \\ u - C & R_{out} I \end{bmatrix} \succeq 0, \begin{bmatrix} u - C & R_{in} I \\ R_{in} & (u - C)^T \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (41)$$

如图 3 所示, 通过引入距离二阶锥约束和角度几何约束, 将可行域收紧至较小有限区域, 使松弛后的凸优化问题更接近原问题, 因此经过可行域约束后的增强半正定 (Enhanced Semi-Definite Relaxation, ESDR) 凸优化模型可表示为

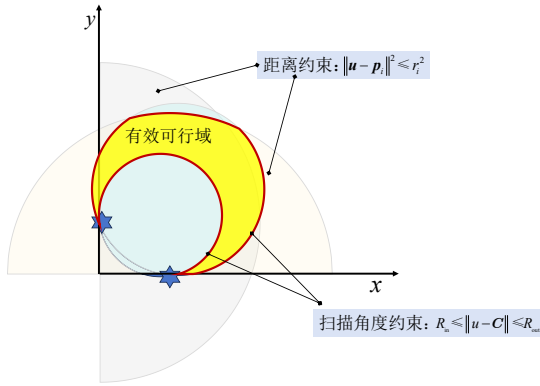


图 3 添加约束条件后的可行域

Figure 3 Feasible region with constraints applied

$$\begin{aligned} \min \quad & \varepsilon \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} X \succ 0, X_{33} = 1 \\ \begin{bmatrix} \varepsilon & \delta^T \\ \delta & I \end{bmatrix} \succeq 0 \\ r_i^2 = \langle E - 2S_i, X \rangle \\ r_i - r_1 = \tau_i c \\ \langle P_i - k_i Q_i, X \rangle = 0 \\ \begin{bmatrix} R_i & (u - p_i)^T \\ u - p_i & R_i I_2 \end{bmatrix} \succeq 0 \\ \begin{bmatrix} R_{out} & (u - C)^T \\ u - C & R_{out} I \end{bmatrix} \succeq 0 \\ \begin{bmatrix} (u - C) & R_{in} I \\ R_{in} & (u - C)^T \end{bmatrix} \succeq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (42)$$

上述凸优化问题可采用 Matlab 中的 Yalmip 工具箱进行高效求解, 实现目标函数的精确求解。求解该半正定松弛问题的最大计算复杂度为<sup>[27]</sup>

$$O\left(\sqrt{n} \max\{m, n\}^4 \log\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right) \quad (43)$$

其中,  $n$  为半正定松弛问题求解的变量数目;  $m$  为约束函数的数量;  $\sigma$  为求解的精度。在本文中,  $n = 2$ ,  $m = 8$ , 因此最大计算复杂度  $O(4096\sqrt{2} \log(1/\sigma))$ 。

若估计结果  $\hat{X}$  满足秩一约束, 即  $\hat{X} = zz^T$ , 则扫描辐射源位置估计结果为:  $\hat{u} = z(1:2)/z(3)$ 。

当  $\text{rank}(\hat{X}) \neq 1$  时, 对求解结果  $\hat{X}$  进行特征值分解:

$$\hat{X} = \lambda_1 v_1 v_1^H + \sum_{i=2}^3 \lambda_i v_i v_i^H \quad (44)$$

其中,  $\lambda_1$  和  $v_1$  分别表示矩阵分解后的主特征值和特征向量;  $\lambda_i (i = 2, 3)$  和  $v_i (i = 2, 3)$  表示较小的特征值及特征向量。

进一步利用其主特征向量  $v_1$  实现辐射源位置估计:

$$\hat{u} = \frac{v_1(1:2)}{v_1(3)} \quad (45)$$

经过增强半正定松弛处理后的优化问题, 其全局最优解更近似原始问题的解。

### 2.3 CRLB 分析

CRLB 表示无偏估计量的协方差下界, 本文通过推导联合 TDOA-SA、AOA-SA 体制的 CRLB, 对不同体制的理论定位性能界进行定量对比。CRLB 通常利用 Fisher 信息矩阵进行推导:

$$F = JW^{-1}J \quad (46)$$

其中,  $W$  为联合体制协方差矩阵;  $J$  为联合定位方程在扫描辐射源位置处的 Jacobian 矩阵。

本文所联合的 TDOA 与 TDOI 量测虽源自不同的时间戳, 具有不同的时间物理含义, 但共享时钟偏移, 导致误差之间存在相关项。以观测站 1 为参考站, 其他观测站相对参考站的时钟偏移方差为  $b = [\sigma_{\text{clk},2}, \sigma_{\text{clk},3}, \dots, \sigma_{\text{clk},n}]^T$ , 则联合 TDOA-SA 体制的协方差矩阵为

$$\begin{aligned} W_{\text{TDOA+SA}} &= \begin{bmatrix} I \\ wI \end{bmatrix} \Sigma_b \begin{bmatrix} I \\ wI \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \Sigma_\tau & 0 \\ 0 & \Sigma_a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_b + \Sigma_\tau & w\Sigma_b \\ w\Sigma_b & w^2 \Sigma_b + \Sigma_a \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

其中,  $I \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  为单位阵;  $w$  为扫描速率;  $\Sigma_b = \text{diag}(\sigma_{\text{clk},2}^2, \sigma_{\text{clk},3}^2, \dots, \sigma_{\text{clk},n}^2)$  为时钟偏移方差;  $\text{diag}(\cdot)$  表示将矢量对角化为矩阵形式;  $\Sigma_\tau = \text{diag}(\sigma_{t,2}^2, \sigma_{t,3}^2, \dots, \sigma_{t,n}^2)$ ,  $\Sigma_a = \text{diag}(\sigma_{a,2}^2, \sigma_{a,3}^2, \dots, \sigma_{a,n}^2)$  表示 TDOA、SA 的测量方差。

由于 AOA 和 SA 的量测机理不同, 通常近似认为相互独立。因此联合 AOA-SA 体制的协方差矩阵为

$$W_{\text{AOA+SA}} = \begin{bmatrix} \Sigma_\theta & 0 \\ 0 & w^2 \Sigma_b + \Sigma_a \end{bmatrix} \quad (48)$$

其中,  $\Sigma_\theta = \text{diag}(\varsigma_1^2, \varsigma_2^2, \dots, \varsigma_n^2)$  表示 AOA 测量误差。

进一步推导分析联合体制的 Jacobian 矩阵,  $J_1$  和  $J_2$  分别表示 AOA-SA 体制、TDOA-SA 体制的 Jacobian 矩阵:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{-(y-y_2)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|^2} & \frac{(x-x_2)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|^2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{-(y-y_2)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_n\|^2} & \frac{(x-x_n)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_n\|^2} \\ \frac{-(y-y_2)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_2\|^2} + \frac{(y-y_1)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|^2} & \frac{(x-x_2)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_2\|^2} - \frac{(x-x_1)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|^2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{-(y-y_n)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_n\|^2} + \frac{(y-y_1)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|^2} & \frac{(x-x_n)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_n\|^2} - \frac{(x-x_1)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|^2} \end{bmatrix}^T \quad (49)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \left( \frac{x-x_2}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_2\|} - \frac{x-x_1}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|} \right) & \frac{1}{c} \left( \frac{y-y_2}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_2\|} - \frac{y-y_1}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|} \right) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{c} \left( \frac{x-x_n}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_n\|} - \frac{x-x_1}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|} \right) & \frac{1}{c} \left( \frac{y-y_n}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_n\|} - \frac{y-y_1}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|} \right) \\ \frac{-(y-y_2)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_2\|^2} + \frac{(y-y_1)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|^2} & \frac{(x-x_2)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_2\|^2} - \frac{(x-x_1)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|^2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{-(y-y_n)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_n\|^2} + \frac{(y-y_1)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|^2} & \frac{(x-x_n)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_n\|^2} - \frac{(x-x_1)}{\|\mathbf{u}-\mathbf{p}_1\|^2} \end{bmatrix}^T \quad (50)$$

由式(49)和式(50)分析可得,联合 AOA-SA 体制相较于单量测 AOA 体制的 Jacobian 矩阵并未增加额

外的信息维度,存在一定信息冗余。联合 TDOA-SA 体制的 Jacobian 矩阵属于异构方向的叠加,可有效提升信息维度并改善条件数。

对 Fisher 信息矩阵求逆,即可得到联合定位体制的 CRLB:

$$\text{CRLB} = (\mathbf{J}W^{-1}\mathbf{J})^{-1} \quad (51)$$

对应多站场景下定位几何精度因子(Geometric Dilution Of Precision, GDOP)为

$$\text{GDOP} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{\text{tr}(\text{CRLB})} \quad (52)$$

### 2.4 最小观测站数目分析

在扫描速率已知的前提下,联合 TDOA-SA 的扫描辐射源定位方法待估计参数为 2 维位置信息,即  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ 。在  $n$  个观测站场景下,量测维度为  $2(n-1)$ 。从观测方程数量的必要条件分析,至少需要<sup>[28]</sup>:

$$2(n-1) \geq 2 \quad (53)$$

因此双站即可实现扫描辐射源位置的求解。然而,基于双站的联合定位体制在工程上难以保证唯一性与稳健性。从几何角度分析,双站场景下形成的双曲线和等角度圆,二者在平面场景下一般可出现多个交点,在噪声较大的条件下易出现解的跳变。除此之外,当辐射源处于基线延长线附近或远场等区域,TDOA 和 SA 约束的梯度方向趋于共线,此时  $\det(\mathbf{J}_{\text{TDOA+SA}}) \approx 0$ ,条件数恶化,将导致定位结果对噪声更为敏感。

因此,在工程应用中为获得稳健的定位性能,通常需要引入三个及以上观测站形成超定约束,实现辐射源位置的精确求解。

### 3 仿真结果及性能分析

通过仿真试验验证所提算法在扫描辐射源定位场景下的有效性,并将性能与 SA-LS<sup>[12]</sup>、SA-TLS<sup>[13]</sup>、SA-ML<sup>[15]</sup>、TDOA+SA-ML、TDOA+SA-SDR 和 TDOA+SA-ESDR 等方法进行对比,试验环境如表 1 所示。其中,TDOA+SA-SDR 表示普通半正定松弛方法,TDOA+SA-ESDR 表示收紧可行域的增强半正定松弛方法。

表 1 试验环境表

Table 1 Experimental environment

序号	类别	组件	型号
1	硬件环境	CPU	13th Gen Intel(R) Core(TM) i5-13500H (2.60 GHz)
2		内存	32 GB
3		仿真软件	MATLAB R2025a
4	软件环境	工具箱	Yalmip
5		求解器	Mosek

此外,通过蒙特卡罗试验分析所提算法定位精度,定义辐射源定位的均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^{(m)}\|^2} \quad (54)$$

其中,  $M$  为蒙特卡罗次数;  $\hat{\mathbf{u}}^{(m)}$  为第  $m$  次蒙特卡罗试验位置估计结果。

本文采用误差椭圆表征二维位置估计的不确定性。置信度为  $\alpha$  的误差椭圆定义为固定马氏距离的等值域:

$$\varepsilon_\alpha = \left\{ p: (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})^\top \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \leq A \right\}, A = \chi_{2,\alpha}^2 \quad (55)$$

其中,  $\hat{\mathbf{u}}$  表示蒙特卡罗试验估计结果;  $\chi_{2,\alpha}^2$  为自由度为 2 的卡方分布在置信度  $\alpha$  下的分位数;  $\mathbf{P}$  为位置估计协方差矩阵:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

对  $\mathbf{P}$  进行特征值分解得到  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 误差椭圆的长轴为  $a = \sqrt{A\lambda_1}$ , 短轴为  $b = \sqrt{A\lambda_2}$ 。长轴方向对应最大特征值  $\lambda_1$  的特征向量, 在该方向约束最弱。短轴方向对应最小特征值  $\lambda_2$  的特征向量, 该方向通常具有较强的几何约束。

#### 试验一: 定位精度分析

假设观测站和扫描辐射源均静止, 为保证定位求解的稳健性和唯一性, 观测站数目设置为 5, 观测站位置如表 2 所示。辐射源位置为  $[60, 60]$  km, 扫描模式为圆周扫描, 扫描周期设置为 5 s。以观测站 1 为参考站, 其他观测站间相对参考站的时钟偏移均方根误差均为 30 ns, 时差测量的均方根误差均为 100 ns, 扫描角度测量的均方根误差设置为  $0.5^\circ$ 。为保证结果统计可信度, 进行 500 次蒙特卡罗独立重复试验, 分析本文所提最大似然方法与半正定松弛方法的估计性能。其中, 最大似然方法以采用网格粗搜结果作为初始值, 网格步长设置为 10 km。

表 2 观测站布站位置

单位: km

Table 2 Positions of passive sensors

unit: km

观测站号	1	2	3	4	5
位置 X	0	0	0	50	100
位置 Y	100	50	0	0	0

在图 4 的几何相对构型下, 验证本文 2.1 节所提的最大似然牛顿迭代方法性能。单次试验的迭代轨迹图如图 5 所示, 可以看出算法能够从给定的初始值正确收敛至辐射源真实位置。图 6 为本文方法在  $X$ - $Y$  平面中的定位结果散点图和定位误差椭圆曲线, 表 3 为详细的统计结果。

仿真表明, 随着置信度增加, TDOA+SA-ML 方法

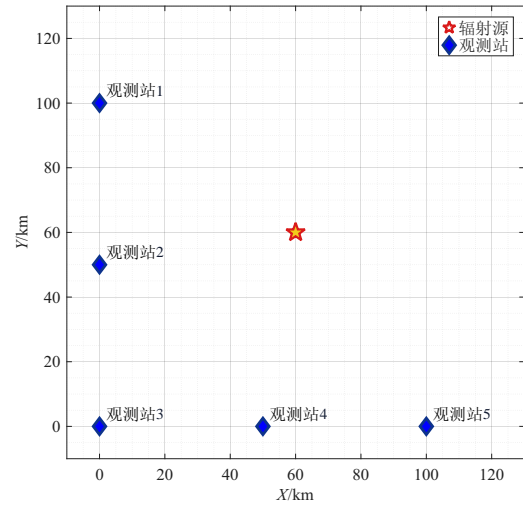


图 4 观测站与辐射源相对位置关系

Figure 4 Sensors-emitter relative positions

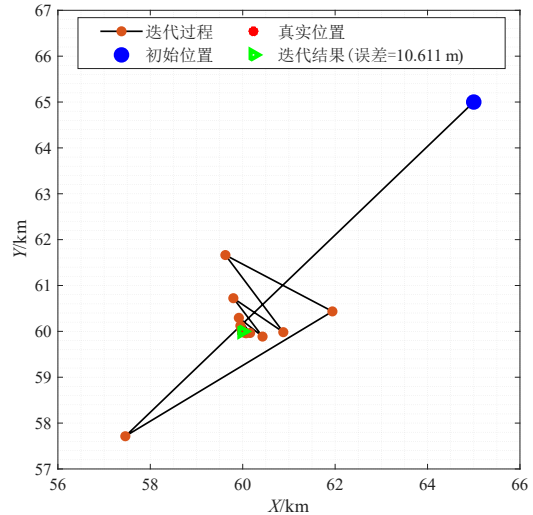


图 5 第 1 次重复实验最大似然迭代结果

Figure 5 ML iteration results of the 1st experiment

与 TDOA+SA-ESDR 方法误差椭圆长短轴均逐渐增加, 且定位误差椭圆形状均沿 L 型构型布站夹角方向倾斜。其原因在于误差椭圆的倾斜方向由协方差矩阵的特征向量决定, 而在 L 型构型下, TDOA 双曲线和 SA 等角度圆在布站夹角方向约束不足, 故误差椭圆主轴沿该方向倾斜。

对比两种方法的 RMSE, 由于 TDOA+SA-ESDR 方法是原问题的近似, 性能略差于 TDOA+SA-ML 方法。但半正定松弛方法无需依赖初始值进行迭代求解, 避免了因初始位置不准确而导致的定位失效问题。

#### 试验二: CRLB 对比分析

在试验一的仿真条件下, 对比不同体制的 CRLB, 分析联合 TDOA-SA 体制的性能优势。其中, 在不同 TDOA 测量误差的性能对比试验中, 均方根误差从 10 ns 以

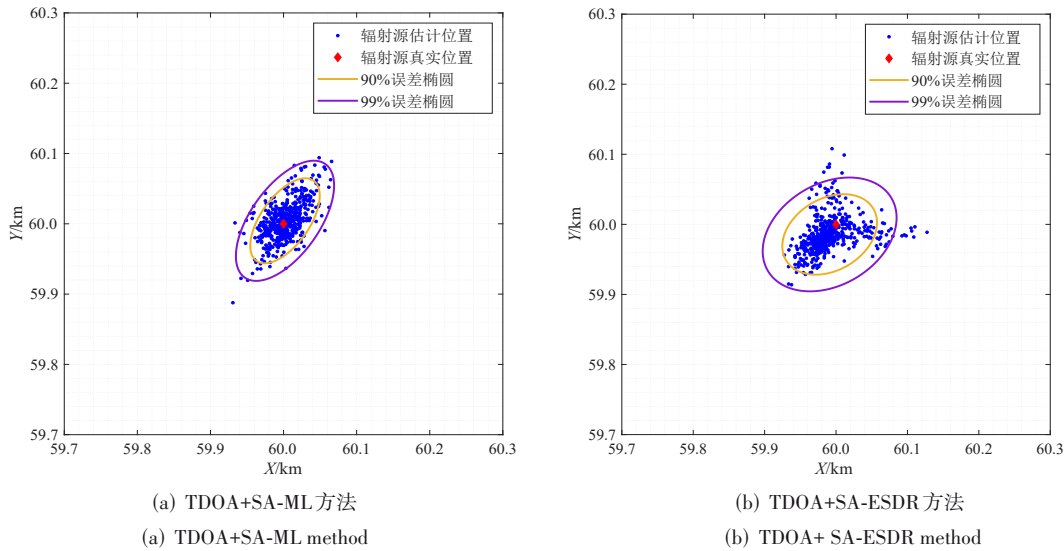


图 6 定位结果与误差椭圆示意图

Figure 6 Localization results and error ellipse

表 3 500 次独立重复实验统计结果

Table 3 Statistical results for 500 monte carlo trials

方法	RMSE/ km	倾角/ $^{\circ}$	90% 椭圆参数		99% 椭圆参数	
			长轴/ km	短轴/ km	长轴/ km	短轴/ km
TDOA+SA-ML	0.029 9	56.270 3	0.069 2	0.033 6	0.097 8	0.047 5
TDOA+SA-ESDR	0.038 2	31.917 0	0.071 4	0.051 0	0.100 9	0.072 2

指数级步进增加至  $100 \mu\text{s}$ , SA 均方根误差为  $0.5^{\circ}$ , AOA 测量均方根误差为  $1^{\circ}$ 。在不同 SA 测量误差下的性能对比试验中,均方根误差从  $0.01^{\circ}$  增加至  $3^{\circ}$ , TDOA 均方根误差为  $100 \text{ ns}$ , 仿真结果如表 4 和图 7 所示。

由图 7(a) 可得,随着时差测量均方根误差的增大,单一量测 TDOA 体制 CRLB 性能迅速退化,而联合 TDOA-SA 体制可有效抑制该退化现象,鲁棒性较强。当均方根误差小于  $1 \mu\text{s}$  时,联合 TDOA-SA 体制相较于单量测 SA 体制提升增益大于  $63.8\%$ 。当均方根误差大于  $10 \mu\text{s}$  时,相较于 TDOA 体制提升增益大于  $76.99\%$ 。由图 7(b) 可得,随着扫描角度测量均方根

误差的增大,单一量测 SA 体制性能退化较大,而联合体制可保持较高的定位性能。当均方根误差大于  $1^{\circ}$  时,联合 TDOA-SA 体制相较于单量测 SA 体制提升增益大于  $97.7\%$ 。

综上所述,联合 TDOA-SA 体制通过双曲线和等角度圆几何互补约束,在不同噪声水平下可有效改善定位性能并提升鲁棒性。

试验三:不同时间量测误差性能对比分析

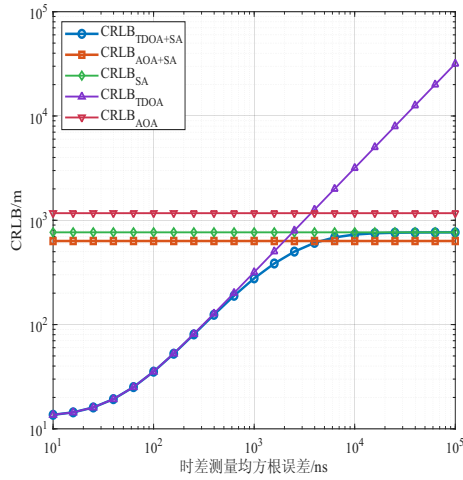
在上述仿真条件下,进一步通过 500 次蒙特卡罗试验验证不同时差测量误差下的定位精度。时差量测均方根误差从  $100 \text{ ns}$  以指数级步进增加至  $100 \mu\text{s}$ , 扫描角度量测误差设置为  $0.5^{\circ}$ 。分析本文所提算法与传统 SA-LS、SA-TLS、TDOA+SA-ML 算法的估计性能。其中,在最大似然方法的独立重复试验中,采用网格粗搜结果作为初始位置,搜索步长为  $10 \text{ km}$ , 仿真结果如图 8 所示。

随着时间测量误差的增加,所有方法估计精度均下降。最大似然方法作为一种统计最优估计方法,能够在渐进意义上达到 CRLB, SDR 方法的优势在于提

表 4 联合体制 CRLB 提升增益

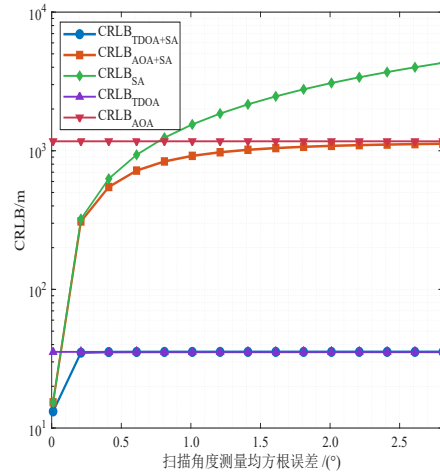
Table 4 CRLB enhancement gain using TDOA and SA

时差测量均方根误差	10 ns	100 ns	$1 \mu\text{s}$	$10 \mu\text{s}$	$100 \mu\text{s}$
$(\text{CRLB}_{\text{TDOA}} - \text{CRLB}_{\text{TDOA+SA}}) / \text{CRLB}_{\text{TDOA}}$	0.4%	2.3%	12.7%	76.99%	97.58%
$(\text{CRLB}_{\text{SA}} - \text{CRLB}_{\text{TDOA+SA}}) / \text{CRLB}_{\text{SA}}$	98.22%	95.38%	63.8%	4.74%	0.5%
$(\text{CRLB}_{\text{AOA}} - \text{CRLB}_{\text{AOA+SA}}) / \text{CRLB}_{\text{AOA}}$	45.92%	45.92%	45.92%	45.92%	45.92%
扫描角度测量均方根误差	$0.01^{\circ}$	$0.5^{\circ}$	$1^{\circ}$	$1.5^{\circ}$	$2^{\circ}$
$(\text{CRLB}_{\text{TDOA}} - \text{CRLB}_{\text{TDOA+SA}}) / \text{CRLB}_{\text{TDOA}}$	62.79%	3.4%	1.5%	0.9%	0.1%
$(\text{CRLB}_{\text{SA}} - \text{CRLB}_{\text{TDOA+SA}}) / \text{CRLB}_{\text{SA}}$	14.02%	94.38%	97.7%	98.56%	98.85%
$(\text{CRLB}_{\text{AOA}} - \text{CRLB}_{\text{AOA+SA}}) / \text{CRLB}_{\text{AOA}}$	98.69%	53.18%	21.48%	13.16%	7.28%



(a) 随时差测量均方根误差变化曲线

(a) CRLB comparison vs. RMSE of TDOA measurement



(b) 随扫描角度测量均方根误差变化曲线

(b) CRLB comparison vs. RMSE of SA measurement

图7 不同体制CRLB对比分析

Figure 7 Comparison of different measurement schemes

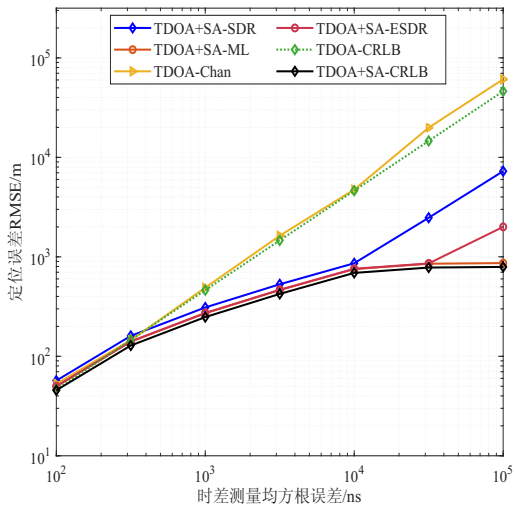


图8 时差测量均方根误差性能对比曲线

Figure 8 Localization RMSE vs. TDOA measurement RMSE

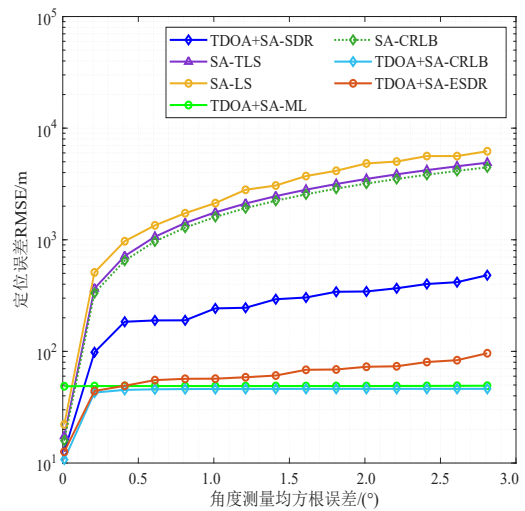


图9 角度测量均方根误差性能对比曲线图

Figure 9 Localization RMSE vs. SA measurement RMSE

供全局最优解,但由于松弛后的问题并不等价于原问题,定位精度略差于最大似然方法。由于松弛后可行域的扩张,随着噪声的增加,普通SDR方法定位性能偏离CRLB,而引入距离和角度约束,有效缓解了可行域的扩张,变化趋势较为平稳。当时间测量误差小于50 μs时,本文所提算法逼近CRLB。

#### 试验四:不同扫描角度测量误差性能对比分析

在上述仿真条件下,进一步通过500次蒙特卡罗试验验证不同扫描角度测量误差下的定位精度。SA测量均方根误差从0.01°增加至3°,步进为0.2°,TDOA测量均方根误差设置为100 ns。分析本文所提算法的估计性能,仿真结果如图9所示。

结果表明,随着扫描角度测量误差的增加,5种

方法的定位误差随之增加。从整体性能分析,联合TDOA-SA的定位算法性能优于单量测SA的定位算法。其中,SA-LS和SA-TLS算法本质上依赖角度测量,角度误差较大时,定位精度较差。而TDOA+SA-ML、TDOA+SA-SDR、TDOA+SA-ESDR方法,对角度敏感性较低,随着误差的增加,精度变化相对平稳。ESDR方法通过引入有界约束收紧可行域,相较于普通SDR方法定位精度提升一个量级,当量测误差小于1°时,定位性能逼近CRLB。

#### 试验五:不同构型对定位误差影响分析

观测站数目设置为5,详细位置信息如表5所示。假设各个观测站扫描角度均方根误差均为0.5°,时差测量误差均为100 ns,不同布站构型下GDOP仿真结

果如图 10 所示。

四种构型中均呈现一致规律:随着目标与布站几何中心距离增大,定位误差逐渐升高,等廓线分布更为密集,误差增量较大。在阵型覆盖核心区域内,距离越近时,GDOP 变化增量更为平缓。

在不同构型对比方面,菱形构型下具有最优的空间对称性,低 GDOP 区域范围最广,分布最均衡,等廓线类似“同心环状”,表明能够在较大空间内形成稳定的几何交汇。“L”形构型在夹角内部及其领域范围内,形成相对连续、平滑的低 GDOP 区域,但在 L 形内侧边缘存在几何退化区,表现为 GDOP 等阔线出现明显的尖脊结构并伴随数值迅速增加,定位几何条件显著恶化。

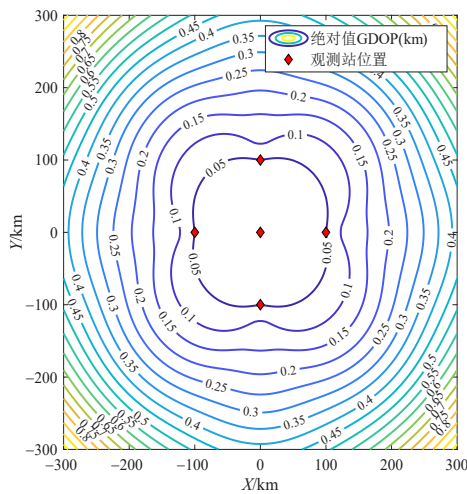
“1”字构型和“—”字构型呈现显著的各向异性,

沿布站连线方向定位误差较大,但在目标活动区域具有先验约束或主要分布于阵列法线方向时,该构型仍可实现较优的定位效果。综上,工程部署应结合任务覆盖范围、场地约束等因素,择优选择布站构型以平衡定位精度与可实施性。

表 5 不同构型下观测站位置

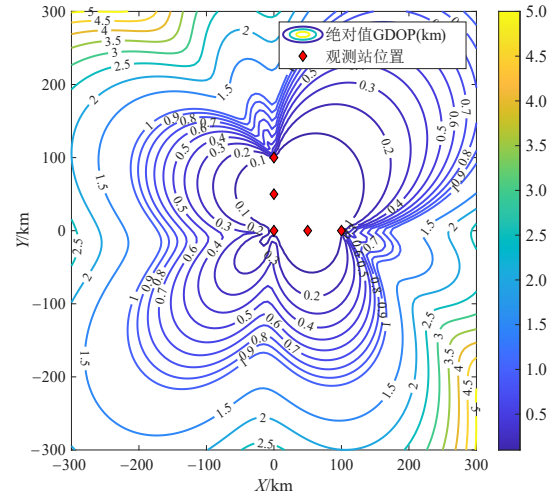
Table 5 Positions of passive sensors under different configurations

	菱形构型	L 形构型	“1”字构型	“—”字构型
观测站 1	(0, 100) km	(0, 100) km	(0, -100) km	(-100, 0) km
观测站 2	(0, -100) km	(0, 50) km	(0, -50) km	(-50, 0) km
观测站 3	(0, 0) km	(0, 0) km	(0, 0) km	(0, 0) km
观测站 4	(100, 0) km	(50, 0) km	(0, 50) km	(50, 0) km
观测站 5	(-100, 0) km	(100, 0) km	(0, 100) km	(100, 0) km



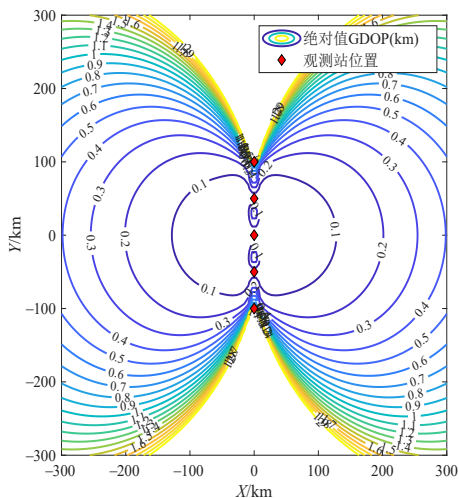
(a) 菱形构型

(a) Rhombus configuration



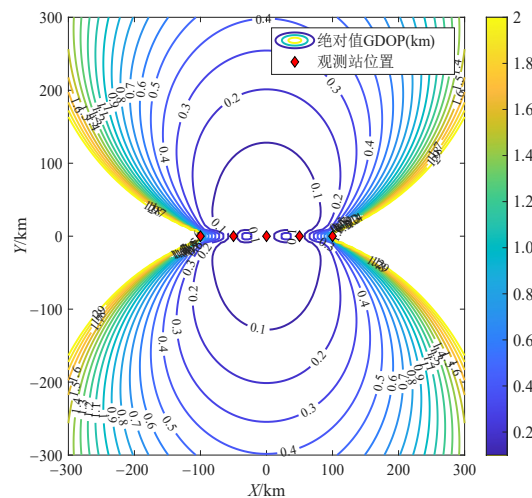
(b) “L”形构型

(b) L-shaped configuration



(c) “1”字构型

(c) Vertical linear configuration



(d) “—”字构型

(d) Horizontal linear configuration

图 10 典型布站构型 GDOP 图

Figure 10 GDOP of typical configurations

## 4 结论

本文提出了一种联合 TDOA-SA 的半正定松弛扫描辐射源定位方法。该方法利用半正定松弛技术,构建基于凸优化的定位求解框架,通过定义辅助变量和半正定松弛处理,并引入距离二阶锥和扫描角度几何有界约束进行可行域分析,在无需初始位置先验的条件下,获得稳定的全局最优解。通过仿真验证,所提方法可实现扫描辐射源的精确定位,整体性能优于 SA-LS、SA-TLS、TDOA-Chan 等算法。此外,在量测误差较大的条件下,联合 TDOA-SA 定位精度优于单一 SA 量测信息的定位体制,且定位精度逼近 CRLB。

### 参考文献

- [1] 郭福成, 李金洲, 张敏. 无源定位原理与方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2021.  
Guo Fucheng, Li Jinzhou, Zhang Min. Passive location theories and methods[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2021. (in Chinese)
- [2] Sun Yimao, Ho K C, Wan Qun. Eigenspace solution for AOA localization in modified polar representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 2256-2271.
- [3] 汤新民, 周杨, 鲁其兴, 等. 基于信号到达时间建模的广域多点定位时间同步方法[J]. 电子与信息学报, 2025, 47(5): 1434-1449.  
Tang Xinmin, Zhou Yang, Lu Qixing, et al. Wide-Area multilateration time synchronization method based on signal arrival time modeling[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2025, 47(5): 1434-1449. (in Chinese)
- [4] Sun Yimao, Ho K C, Xing Tianyi, et al. Projection-based algorithm and performance analysis for TDOA localization in MPR[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2024, 72: 896-911.
- [5] Wang Gang, Yang Shuli, Pei Jian, et al. Bias-reduced SDR method for locating a noncooperative moving source using TOAs and FOAs[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2024, 60(5): 6146-6162.
- [6] 关浩亮, 张顺生, 王文钦. 基于频控阵的无源定位对抗技术[J]. 雷达学报, 2021, 10(6): 833-841.  
Guan Haoliang, Zhang Shunsheng, Wang Wenqin. Passive localization countermeasure based on frequency diverse array[J]. Journal of Radars, 2021, 10(6): 833-841. (in Chinese)
- [7] 谌东, 鄢勃, 贾朝文, 等. 浅析机载有源相控阵雷达的特点及对抗技术[J]. 电子信息对抗技术, 2022, 37(3): 95-100.  
Chen Dong, Yan Bo, Jia Chaowen, et al. Brief analysis of characteristics and countermeasure technology for airborne active phase array radar[J]. Electronic Information Warfare Technology, 2022, 37(3): 95-100. (in Chinese)
- [8] Zhang Guangbin, Liu Hengyan, Dai Wei, et al. Passive joint emitter localization with sensor self-calibration[J]. Remote Sensing, 2023, 15(3): 671.
- [9] Zhang Yifei, Zhang Min, Guo Fucheng. Recursive instrumental variable method for locating a scanning emitter by a single observer using time of interception[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2017, 11(12): 1839-1844.
- [10] Merlo J M, Mghabghab S R, Nanzer J A. Wireless picosecond time synchronization for distributed antenna arrays[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2023, 71(4): 1720-1731.
- [11] Xin Jihao, Ge Xuyang, Zhang Yuan, et al. High-precision time difference of arrival estimation method based on phase measurement[J]. Remote Sensing, 2024, 16(7): 1197.
- [12] Hmam H. Scan-based emitter passive localization[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(1): 36-54.
- [13] Li Wanchun, Li Yingxiang, Wei Ping, et al. A closed-form localization algorithm using angle-of-arrival and difference time of scan time measurements in scan-based radar[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2019, 55(1): 511-515.
- [14] 张翼飞, 张敏, 郭福成. 基于 DOA 和 TDOI 的主瓣扫描辐射源定位方法[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(12): 2921-2928.  
Zhang Yifei, Zhang Min, Guo Fucheng. Scanning emitter localization using DOA and TDOI measurements[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2017, 39(12): 2921-2928. (in Chinese)
- [15] 何友, 孙顺, 董凯, 等. 扫描辐射源的最大似然定位算法[J]. 控制与决策, 2017, 32(7): 1293-1300.  
He You, Sun Shun, Dong Kai, et al. Maximum likelihood algorithm for scan-based emitter localization[J]. Control and Decision, 2017, 32(7): 1293-1300. (in Chinese)
- [16] Li Wanchun, Wang Li, Yang Tianliu, et al. Joint scan rate and emitter location estimation algorithm in SBR system based on AOA and DTOST measurements[J]. IEEE Access, 2020, 8: 66598-66608.
- [17] 邓兵, 姚山峰, 杨宇翔, 等. 到达时间差与扫描时间差定位精度分析[J]. 兵器装备工程学报, 2024, 45(1): 249-255.  
Deng Bing, Yao Shanfeng, Yang Yuxiang, et al. Precision analysis for TDOA-TDOS localization[J]. Journal of Ordnance Equipment Engineering, 2024, 45(1): 249-255. (in Chinese)
- [18] 杨静, 刘成城, 黄洁, 等. 联合时延-多普勒-角度的无源雷达目标定位凸优化算法[J]. 电子学报, 2024, 52(6):

2091-2102.

Yang Jing, Liu Chengcheng, Huang Jie, et al. Convex solution for target localization in passive MIMO radar using delay, doppler and angle measurements[J]. Acta Electronica Sinica, 2024, 52(6): 2091-2102. (in Chinese)

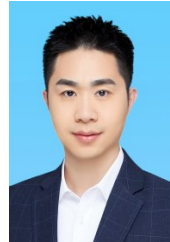
- [19] Wang Yiqiu, Tao Meixia, Sun Shu. Cramér-Rao bound analysis and beamforming design for integrated sensing and communication with extended targets[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2024, 23(11): 15987-16000.
- [20] Singh K, Makarim A F, Albinsaid H, et al. Passive beamforming design and DNN-based signal detection in RIS-assisted MIMO systems with generalized spatial modulation[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2023, 72(2): 1879-1892.
- [21] 秦兆涛, 王俊, 魏少明, 等. 基于目标高度先验信息的多站时差无源定位方法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(9): 2219-2226.  
Qin Zhaotao, Wang Jun, Wei Shaoming, et al. Passive localization using TDOA measurements from multiple sensors based on priori knowledge of target altitude[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2018, 40(9): 2219-2226. (in Chinese)
- [22] Zhou Qiyu, Yuan Ye, Venturino L, et al. Direct target localization for distributed passive radars with direct-path interference suppression[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2024, 72: 3611-3625.
- [23] Li Jiaqi, Dong Xudong, Shi Xinlei, et al. An enhanced direct position determination of non-circular sources via sparse Bayesian inference and grid refinement strategy[J]. Digital Signal Processing, 2024, 151: 104564.
- [24] Bianco G M, Giuliano R, Mazzenga F, et al. Multi-slope path loss and position estimation with grid search and experimental results[J]. IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks, 2021, 7: 551-561.
- [25] Wang Gang, Xiao Yudong, Ho K C, et al. Unified near-field and far-field TDOA source localization without the knowledge of signal propagation speed[J]. IEEE Transactions on Communications, 2024, 72(4): 2166-2181.
- [26] Dai Zichao, Wang Gang, Chen Hongyang. Sensor selection for TDOA-based source localization using angle and range information[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2021, 57(4): 2597-2604.
- [27] Luo Zhiquan, Ma W K, So A M C, et al. Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2010, 27(3): 20-34.
- [28] Jiao Xiaoshuang, Chen Jinming, Jiang Lifeng, et al. A distributed low-degree-of-freedom aerial target localization method based on hybrid measurements[J]. Remote Sensing, 2025, 17(10): 1705.

## 作者简介



张海蕊 女, 2001年3月出生于河北省定州市。现为西北工业大学电子信息学院硕士研究生。主要研究方向为阵列信号处理、辐射源定位等。

E-mail: zhr2001@mail.nwpu.edu.cn



陶明亮 男, 1989年8月出生于湖南省株洲市。现为西北工业大学电子信息学院教授、博士研究生导师。主要研究方向雷达信号处理、目标智能探测与侦察等。中国电子学会会员编号: E190014868S。

E-mail: mltao@nwpu.edu.cn



张兆林 男, 1978年1月出生于河南省濮阳市。现为西北工业大学电子信息学院副教授、硕士研究生导师。主要研究方向为阵列信号处理、通信抗干扰技术等。

E-mail: z184@nwpu.edu.cn



王伶 男, 1978年10月出生于贵州省仁怀市。现为西北工业大学电子信息学院教授、博士研究生导师。研究方向为通信抗干扰技术、阵列信号处理、导航通信技术等。中国电子学会会员编号: E190014837S。

E-mail: lingwang@nwpu.edu.cn



谢坚 男, 1986年11月出生于江苏省南通市。现为西北工业大学电子信息学院教授、博士研究生导师。主要研究方向为电子侦察、阵列信号处理、辐射源定位技术等。中国电子学会会员编号: E190020092M。

E-mail: xiejian@nwpu.edu.cn