

中继收发器未知的TDOA/TDOA-AOA无源定位算法

张 烁¹, 孙 霆^{1*}, 王 威¹, 尉泽华², 董阳阳², 董春曦²

(1. 长安大学信息工程学院, 陕西西安 710064; 2. 西安电子科技大学电子工程学院, 陕西西安 710071)

摘 要: 远距离目标定位在无线通信、电子侦察、目标监视及智能感知等领域具有重要的应用价值。然而,随着目标与接收站距离的增加,信号传播过程中将面临严重的路径损耗、阴影衰落及非视距效应等挑战。这些因素会显著降低接收信号质量,从而削弱传统无源定位系统的性能。利用中继收发器辅助信号放大与转发,构建视距传播路径,可以在一定程度上克服上述问题。尽管如此,现有中继辅助的定位研究多聚焦于主动或合作定位场景,且需要依赖多次获取目标-中继-接收站传播时间以实现高精度定位。在电子侦察、隐蔽目标探测等无源目标定位场景中,观测系统难以与目标进行协同交互,现有中继辅助定位方法无法直接应用。针对上述问题,本文开展中继位置未知条件下的远距离无源目标定位研究,并提出一种基于时空观测信息的目标与中继联合定位算法。首先,利用目标-同一中继-不同接收站和目标-不同中继-同一接收站这两路信号传播路径,构建两组瞬时到达时间差(Time Difference Of Arrival, TDOA)观测模型,并结合参考接收站获取的目标信号到达角(Angle Of Arrival, AOA)信息,建立角度观测模型。随后,基于TDOA观测信息分别构建中继位置和目标位置的优化问题,并利用半定松弛(Semidefinite Relaxation, SdR)技术将非凸问题转化为凸优化问题,从而获得中继与目标位置的粗略估计。由于所提算法前两步未能充分利用观测信息,第三步分别基于TDOA及联合TDOA-AOA修正估计误差以提升定位精度。此外,通过理论推导给出了仅利用TDOA信息与联合TDOA-AOA信息的克拉美罗下界(Cramér-Rao Lower Bound, CRLB),并明确了实现定位所需的节点条件。理论分析证明了在适度测量噪声或误差条件下,所提联合定位算法对于目标与中继位置估计均可实现CRLB性能。数值仿真实验进一步验证了理论分析的正确性,同时表明引入单一接收站的角度信息能够显著提升目标与中继的联合定位精度。

关键词: 远距离目标; 中继收发器; 无源定位; 到达时间差; 克拉美罗下界

基金项目: 国家自然科学基金(No.62501079)

中图分类号: TN971.5

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2026)06-2776-14

电子学报URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20260212

Passive Localization Method Using TDOA/TDOA-AOA with Unknown Transceivers

ZHANG Shuo¹, SUN Ting^{1*}, WANG Wei¹, YU Zehua², DONG Yangyang², DONG Chunxi²

(1. School of Information Engineering, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064, China;

2. School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: Far-field object localization plays an important role in wireless communications, electronic reconnaissance, object surveillance, and intelligent sensing applications. However, as the distance between the object and receiving stations increases, severe path loss, shadow fading, and Non-Line-Of-Sight (NLOS) effects significantly degrade the received signal quality, thereby deteriorating the performance of conventional passive localization systems. To address this issue, transceiver-aided localization techniques employ transceivers to amplify and forward signals, thereby establishing line-of-sight propagation paths and improving localization performance. Nevertheless, existing transceiver-aided localization studies mainly focus on active or cooperative localization scenarios and rely on multiple measurements of the object-transceiver-receiver propagation time to achieve high localization accuracy. In passive localization applications, such as electronic reconnaissance and covert object detection, the observation system cannot interact cooperatively with the object, rendering existing transceiver-aided localization methods inapplicable. To address this challenge, this paper investigates far-field passive localization with unknown transceiver positions and proposes a joint object and transceiver localization algorithm based on spatio-temporal observations. Specifically, two instantaneous time difference of arrival (TDOA) measurement models are constructed by exploiting the signal propagation paths of object-common transceiver-different receivers and object-different transceivers-common receiver, respectively. In addition, an angle of arrival (AOA) measurement model is es-

tablished using the angle information obtained at a reference receiver. Subsequently, two optimization problems corresponding to transceiver localization and object localization are formulated based on the TDOA measurements. By applying semi-definite relaxation (SdR) technique, the resulting nonconvex problems are transformed into convex optimization problems, yielding coarse estimates of both transceiver and object positions. Since the first two stages do not fully exploit the available measurements, a third-stage refinement procedure is developed based on TDOA-only and joint TDOA-AOA observations to further improve localization accuracy. Furthermore, the Cramér-Rao lower bound (CRLB) corresponding to TDOA-only and joint TDOA-AOA observations is derived, and the minimum node requirements for localization feasibility are established. Theoretical analysis demonstrates that, under moderate measurement noise and error conditions, the proposed joint localization algorithm can achieve the CRLB performance for both object and transceivers position estimation. Numerical simulation results further validate the theoretical analysis and show that incorporating AOA information from a single receiver can significantly enhance the joint localization accuracy of both the object and transceivers.

Keywords: far-field object; transceiver; passive localization; time difference of arrival; Cramér-Rao lower bound

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.62501079)

0 引言

目标定位在雷达、声呐、无线传感器网络以及物联网等领域应用广泛^[1-6]。目标定位常见的观测信息包含到达时间(Time Of Arrival, TOA)、到达时间差(Time Difference Of Arrival, TDOA)、双基地距离(Bi-static Range, BR)、到达角(Angle Of Arrival, AOA)等^[7-14]。当目标与接收传感器之间存在相互运动时,结合频率信息可确定目标速度,并进一步提升定位性能^[15-18]。

现有目标定位算法多通过构建伪线性方程或转化半定规划问题求解,在目标与定位系统距离较近时,这些算法在适度条件下能够逼近克拉美罗下界(Cramér-Rao Lower Bound, CRLB)^[19],但对远距离目标定位时容易产生“门限效应”^[15]。其根本原因在于远场条件下目标信号波前曲率趋零,到达各传感器的波前可视为平行平面波,使得传统基于时差的定位算法难以有效区分距离信息。尽管可借助高精度角度估计技术^[20-22]获取目标方位,但此类研究本质上缺乏距离信息,难以实现完整定位。此外,远距离目标定位在实际应用中还面临信号功率衰减导致的低信噪比问题,以及非视距传播效应增强所引起的模型失配与系统偏差,从而使定位精度显著下降甚至失效。

针对远距离目标定位问题,国内外学者已开展了大量研究。其中,修正极坐标表示(Modified Polar Representation, MPR)的近远场统一定位模型^[23-24],在一定程度上突破了传统定位算法远场定位的局限性,实现了近远场定位的统一表征。然而,在远场极限条件下(即目标距离倒数趋近于零),该模型仍不可避免地退化为测向模型,目标距离信息难以有效分辨,未能从根本上突破远场定位的物理约束。近年来,可重构智能表面(Reconfigurable Intelligent Surface, RIS)因其可通过动态调控反射波束、增强特定方向信号能量并优化定位几何构型,被引入目标定位领域^[25-26],

为远距离目标高精度定位提供了新的技术范式。然而,RIS阵列在实际部署过程中仍面临系统复杂度高、实时调控难度大以及额外硬件成本和能耗增加等工程实现挑战。

为降低系统复杂度并增强远距离定位的可行性,文献[27]利用中继收发器(如低成本无人机等)作为执行放大转发功能的信号桥梁,系统分析了基于间接视距传播路径实现远距离目标定位的可行性。在此基础上,文献[28-29]分别构建了基于TOA和联合TOA-AOA的观测模型,并提出未知中继与目标联合定位算法,在适度的高斯观测噪声下,该算法可实现CRLB。尽管如此,中继辅助的定位算法仍存在若干局限性:一方面,文献[28-29]所提算法依赖己方持续发射信号,难以适用于无源或非合作目标等定位场景,且频繁的主动辐射易暴露自身位置;另一方面,这些算法依赖多时刻观测信息累积,在复杂电磁环境下难以持续获取足够稳定、可靠的观测信息。因此,开展未知中继下远场目标无源定位方法研究,具有重要的理论意义与工程应用价值。

本文针对中继未知的远场目标无源定位问题,首先利用“目标-同一中继-不同接收站”和“目标-不同中继-同一接收站”两路传播路径,构建了两组TDOA观测模型,基于半定松弛(Semidefinite Relaxation, SdR)技术提出了中继与目标联合定位算法。理论分析表明,在适度测量噪声误差条件下,所提算法可实现CRLB。仿真结果验证了算法的有效性与优越性,并表明当参考接收站具备测向能力时,可进一步提升目标与中继的定位精度。

1 定位模型

本文所考虑的定位场景如图1所示,考虑在三维空间中利用 M 个中继收发器(以下简称中继)和 N 个接收站对远距离单一目标 $\mathbf{u}^0 = (x^0, y^0, z^0)^T$ 进行定位。

典型应用场景包括无人机目标定位与非视距区域监测等。中继负责放大转发信号等简易信号处理^[27-29],考虑中继未配备GPS等定位系统,其位置未知且已完全分辨,将第*i*个中继的真实位置记作 $\mathbf{t}_i^o = (x_i^o, y_i^o, z_i^o)^T$,其中*i*=1,2,...,*M*。考虑第*j*个接收站位置精确已知,记为 $\mathbf{s}_j = (x_j, y_j, z_j)^T$,其中*j*=1,2,...,*N*。令 $\boldsymbol{\psi}^o = (\mathbf{t}^{oT}, \mathbf{u}^{oT})^T$ 表示中继与目标的未知联合位置向量,其中 $\mathbf{t}^o = (t_1^o, t_2^o, \dots, t_M^o)^T$ 表示未知中继位置向量。

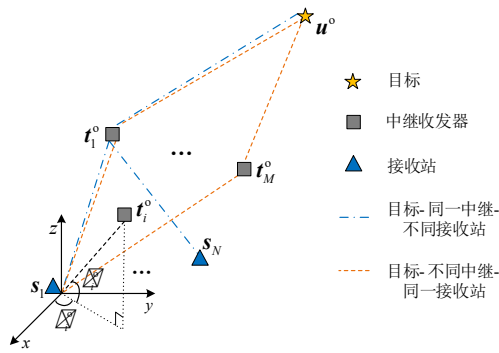


图1 定位场景示意图

Figure 1 Schematic diagram of the localization scenario

基于目标所辐射信号的传播路径,本文可定义两组TDOA观测信息,考虑接收站1和中继1为参考站,第一组TDOA可通过“目标-同一中继-接收站*j*”与“目标-同一中继-接收站1”得到,第二组则可由路径“目标-中继*i*-同一接收站”与“目标-中继1-同一接收站”得到。第一组TDOA乘以信号传播速度(电磁波在自由空间传播速度为 $c = 3 \times 10^8$ m/s)可得:

$$\begin{aligned} r_{i,j1}^o &= \|\mathbf{t}_i^o - \mathbf{u}^o\| + \|\mathbf{t}_i^o - \mathbf{s}_j\| - \|\mathbf{t}_i^o - \mathbf{u}^o\| - \|\mathbf{t}_i^o - \mathbf{s}_1\| \\ &= \|\mathbf{t}_i^o - \mathbf{s}_j\| - \|\mathbf{t}_i^o - \mathbf{s}_1\|, i=1,2,\dots,M, j=2,3,\dots,N \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $r_{i,j1}^o$ 表示真实距离差。从式(1)可以看出 $r_{i,j1}^o$ 与目标位置无关,这主要是由于目标与同一中继的距离已被抵消,且式(1)是通过相同中继获取,故转发时延与时钟误差同样可抵消。式(1)对应的测量版本可写为

$$r_{i,j1} = r_{i,j1}^o + \Delta r_{i,j1} \quad (2)$$

其中, $\Delta r_{i,j1}$ 为观测噪声,将所有的 $r_{i,j1}$ 写为向量形式可得:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^o + \Delta \mathbf{r} \quad (3)$$

其中,观测向量 $\mathbf{r}$ 为 $M(N-1)$ 维列向量, $\mathbf{r}^o = (r_{1,21}^o, r_{1,31}^o, \dots, r_{1,N1}^o, \dots, r_{M,21}^o, \dots, r_{M,N1}^o)^T$ 为真实距离差, $\Delta \mathbf{r} = (\Delta r_{1,21}, \Delta r_{1,31}, \dots, \Delta r_{1,N1}, \dots, \Delta r_{M,21}, \dots, \Delta r_{M,N1})^T$ 为观测噪声向量,建模为零均值高斯分布,协方差矩阵记为 $\mathbf{Q}_r$ 。

令第二组TDOA乘以信号传播速度所得真实距离差记作 $q_{j,i1}^o$,其表达式为

$$\begin{aligned} q_{j,i1}^o &= \|\mathbf{u}^o - \mathbf{t}_i^o\| + \|\mathbf{t}_i^o - \mathbf{s}_j\| - \|\mathbf{u}^o - \mathbf{t}_1^o\| \\ &\quad - \|\mathbf{t}_1^o - \mathbf{s}_j\| + \Delta \tau_{i1} + \Delta b_{i1} \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\Delta \tau_{i1} = \Delta \tau_i - \Delta \tau_1$ 表示第*i*个中继与第1个中继的信号转发时延差, $\Delta b_{i1} = \Delta b_i - \Delta b_1$ 表示中继节点的差分时钟偏差。在实际中继辅助系统中,当所有中继属于同一高精度同步网络,并采用相同的硬件配置与信号处理技术时,其转发延迟与时钟偏移可被合理建模为确定性常数^[30-33]。因此,式(4)中不同中继间的差分转发时延与差分时钟偏差可忽略不计,那么(4)对应的测量值可写为

$$q_{j,i1} = q_{j,i1}^o + \Delta q_{j,i1} \quad (5)$$

其中, $\Delta q_{j,i1}$ 为观测噪声,将式(5)写为向量形式得:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^o + \Delta \mathbf{q} \quad (6)$$

其中,观测向量 $\mathbf{q}$ 为 $N(M-1)$ 维列向量, $\mathbf{q}^o = (q_{1,21}^o, q_{1,31}^o, \dots, q_{1,M1}^o, \dots, q_{N,21}^o, \dots, q_{N,M1}^o)^T$,测量噪声向量 $\Delta \mathbf{q}$ 服从零均值、协方差为 $\mathbf{Q}_q$ 的高斯分布。将两组TDOA观测测量表示为向量形式有

$$\mathbf{m} = (\mathbf{r}^T, \mathbf{q}^T)^T = \mathbf{m}^o + \Delta \mathbf{m} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{m}^o = (\mathbf{r}^{oT}, \mathbf{q}^{oT})^T$, $\Delta \mathbf{m}$ 同样服从零均值高斯分布,协方差为 $\mathbf{Q}_m = \text{blkdiag}(\mathbf{Q}_r, \mathbf{Q}_q)$ 。

需要说明的是,两组TDOA观测由同一批TOA测量构造,在严格意义下其噪声项可能存在一定相关性。然而,该相关性仅在少量共享TOA的观测对之间出现,在整体协方差结构中呈现稀疏特性(对于包含*M*个中继和*N*个接收站的定位场景,相关观测对数量仅为 $O(MN)$,而总观测协方差矩阵规模为 $O(M^2N^2)$)。故当中继和接收站数目较多且观测噪声适中时,协方差矩阵块对角化处理对定位精度的影响可忽略不计,类似处理方式在相关定位问题的研究中也广泛使用^[34-35]。

当参考接收站1具备高精度测向能力时(兼顾工程化成本,仅考虑接收站1测向),可通过测量转发信号的波达方向,确定中继的方位角与俯仰角(远场目标信号微弱,不考虑目标角度测向),令 θ_i^o 和 ϕ_i^o 为第*i*个中继的真实方位角和俯仰角,那么可得:

$$\begin{aligned} \theta_i^o &= \arctan\left(\frac{y_{t_i}^o - y_{s_1}}{x_{t_i}^o - x_{s_1}}\right) \\ \phi_i^o &= \arctan\left(\frac{z_{t_i}^o - z_{s_1}}{(x_{t_i}^o - x_{s_1})\cos\theta_i^o + (y_{t_i}^o - y_{s_1})\sin\theta_i^o}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

由于存在观测误差 $\Delta \theta_i$ 与 $\Delta \phi_i$,实际角度为 $\theta_i = \theta_i^o + \Delta \theta_i$ 和 $\phi_i = \phi_i^o + \Delta \phi_i$,表示为向量形式可得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M)^T = \boldsymbol{\theta}^o + \Delta \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\phi} &= (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_M)^T = \boldsymbol{\phi}^o + \Delta \boldsymbol{\phi} \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\boldsymbol{\theta}^o$ 与 $\boldsymbol{\phi}^o$ 分别由真实值 θ_i^o 与 ϕ_i^o 组成, $\Delta \boldsymbol{\theta} =$

$(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_M)^T$ 与 $\Delta\phi = (\Delta\phi_1, \Delta\phi_2, \dots, \Delta\phi_M)^T$ 为零均值高斯噪声, 协方差矩阵分别为 $\mathbf{Q}_\theta$ 和 $\mathbf{Q}_\phi$ 。将式(7)和式(9)联立可得 TDOA-AOA 联合观测向量为

$$\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{m}^T, \boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\phi}^T)^T = \boldsymbol{\kappa}^o + \Delta\boldsymbol{\kappa} \quad (10)$$

其中, $\boldsymbol{\kappa}^o = (\mathbf{m}^{oT}, \boldsymbol{\theta}^{oT}, \boldsymbol{\phi}^{oT})^T$ 和 $\Delta\boldsymbol{\kappa} = (\Delta\mathbf{m}^T, \Delta\boldsymbol{\theta}^T, \Delta\boldsymbol{\phi}^T)^T$, 由于 $\Delta\mathbf{m}, \Delta\boldsymbol{\theta}$ 与 $\Delta\boldsymbol{\phi}$ 相互独立, 故 $\Delta\boldsymbol{\kappa}$ 服从均值为零的高斯分布, 协方差为 $\mathbf{Q}_\kappa = \text{blkdiag}(\mathbf{Q}_m, \mathbf{Q}_\theta, \mathbf{Q}_\phi)$ 。

本文定位场景考虑各中继转发信号在接收端可被正确区分, 在不同中继身份已被完全正确分辨的前提下开展定位研究, 该假设在实际场景中相对合理。当接收站无测向能力时, 可通过中继特定时频特征^[36-37] (如简易频域调制或信号标签机制), 并结合先进分选识别算法^[38-39] 进行分辨。而当接收站具备测向能力但精度较低时, 可大致计算得到中继区域, 结合空域信息分辨^[40]。

2 理论分析

在阐述所提算法前, 本章给出利用 TDOA 及联合 TDOA-AOA 无源定位时所能达到的性能。这里将基于 CRLB 展开分析, CRLB 是无偏估计量协方差矩阵的理论下限。观测信息与未知向量并非线性关系, 即定位问题本质上是非线性问题。然而, 在噪声水平较低的情况下, 估计量的平方偏差相对于方差可忽略不计, CRLB 可为定位性能提供具有重要意义的标准依据^[7-18]。

2.1 TDOA-AOA 联合定位的 CRLB

基于 TDOA-AOA 观测向量 $\boldsymbol{\kappa}$, 未知向量 $\boldsymbol{\psi}^o$ 的 CRLB 由下式给出^[19]:

$$\text{CRLB}(\boldsymbol{\psi}^o) = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^T & \mathbf{Z} \end{bmatrix}^{-1} \quad (11)$$

式(11)中分块矩阵的定义如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \left(\frac{\partial \mathbf{q}^o}{\partial \mathbf{u}^{oT}} \right)^T \mathbf{Q}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}^o}{\partial \mathbf{u}^{oT}}, \mathbf{Y} = \left(\frac{\partial \mathbf{q}^o}{\partial \mathbf{u}^{oT}} \right)^T \mathbf{Q}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}} \\ \mathbf{Z} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}} \right)^T \mathbf{Q}_r^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}} + \left(\frac{\partial \mathbf{q}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}} \right)^T \mathbf{Q}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\theta}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}} \right)^T \mathbf{Q}_\theta^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\phi}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}} \right)^T \mathbf{Q}_\phi^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, 偏导项每行元素定义如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}}(k_1, :) &= [\mathbf{0}_{3(i-1)}^T, (\boldsymbol{\rho}_{t_i^o, s_j}^T - \boldsymbol{\rho}_{t_i^o, s_1}^T), \mathbf{0}_{3(M-i)}^T] \\ \frac{\partial \mathbf{q}^o}{\partial \mathbf{u}^{oT}}(k_2, :) &= [\boldsymbol{\rho}_{u^o, t_i^o}^T - \boldsymbol{\rho}_{u^o, t_i^o}^T] \\ \frac{\partial \mathbf{q}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}}(k_2, :) &= [(\boldsymbol{\rho}_{u^o, t_i^o}^T - \boldsymbol{\rho}_{t_i^o, s_j}^T), \mathbf{0}_{3(i-2)}^T, (\boldsymbol{\rho}_{t_i^o, s_j}^T - \boldsymbol{\rho}_{u^o, t_i^o}^T), \mathbf{0}_{3(M-i)}^T] \\ \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}}(i, :) &= \mathbf{g}_{\theta i}^o / l_i^o, \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}}(i, :) = \mathbf{g}_{\phi i}^o / d_i^o \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\boldsymbol{\rho}_{a,b} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) / \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ 为单位向量, k_1 和 k_2 为索引指数, $k_1 = (i-1)(N-1) + j-1$ 且 $i=1, 2, \dots, M, j=2, 3, \dots, N$, $k_2 = (j-1)(M-1) + i-1$ 且 $i=2, 3, \dots, M, j=1, 2, \dots, N$, 此外, $\mathbf{g}_{\theta i}^o, \mathbf{g}_{\phi i}^o, d_i^o$ 以及 l_i^o 定义如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\theta i}^o &= [-\sin\theta_i^o, \cos\theta_i^o, 0]^T \\ \mathbf{g}_{\phi i}^o &= [-\sin\phi_i^o \cos\theta_i^o, -\sin\phi_i^o \sin\theta_i^o, \cos\phi_i^o]^T \\ d_i^o &= \|\mathbf{t}_i^o - \mathbf{s}_1\|, l_i^o = d_i^o \cos\phi_i^o \end{aligned} \quad (14)$$

2.2 仅利用 TDOA 定位的 CRLB

当参考接收站不具备高精度测向能力时, 仅有第 2.1 节所述的两组 TDOA 可利用。因此, 对于仅利用 TDOA 定位的 CRLB, 观测向量 $\boldsymbol{\kappa}$ 退化为 $\mathbf{m}$, 仅需将式(12)中的 $\mathbf{Z}$ 退化为式(15)即可。

$$\mathbf{Z} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}} \right)^T \mathbf{Q}_r^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}} + \left(\frac{\partial \mathbf{q}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}} \right)^T \mathbf{Q}_q^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}^o}{\partial \mathbf{t}^{oT}} \quad (15)$$

根据第 2.1 节和第 2.2 节的阐述, 两组 TDOA 观测信息中仅有偏导项 $\partial \mathbf{q}^o / \partial \mathbf{u}^{oT}$ 与目标位置有关, 该偏导项维度为 $N(M-1) \times 3$, 实质上仅有 $(M-1)$ 行非相关, 因此联合定位框架需要保证中继数目至少为 4。此外, 仅利用 TDOA 观测信息时, 为保证 CRLB 满秩, 偏导项 $\partial \mathbf{r}^o / \partial \mathbf{t}^{oT}$ 与 $\partial \mathbf{q}^o / \partial \mathbf{t}^{oT}$ 需列满秩, 即接收站数目至少为 4。因此, 联合目标与中继定位框架有效的前提是接收站与中继数目均不低于 4。当引入参考接收站的角度信息时, 需要满足 $M(N-1) + 2M \geq 3M$, 即接收站数目至少为 2。

3 所提算法

本章阐述所提算法的具体原理及步骤, 所提算法分为三步。其中, 第 3.1 节与第 3.2 节利用 SDR 技术将非凸定位问题转换为半定规划 (Semidefinite Programming, SdP) 凸问题, 先后给出中继和目标位置初始解。第 3.3 节则分别利用 TDOA 和联合 TDOA-AOA 重塑矩阵方程, 基于估计误差修正的思想进一步提升定位性能。

3.1 中继位置初始解

将式(1)移项, 两边同时平方整理可得:

$$\mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_j^T \mathbf{s}_j + r_{i,j1}^2 + 2r_{i,j1}^o \|\mathbf{t}_i^o - \mathbf{s}_1\| - 2(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_j)^T \mathbf{t}_i^o = 0 \quad (16)$$

将式(2)代入式(16)中, 忽略二阶及以上噪声项, 整理有

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_j^T \mathbf{s}_j + r_{i,j1}^2 - 2(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_j)^T \mathbf{t}_i^o + 2r_{i,j1} \|\mathbf{t}_i^o - \mathbf{s}_1\| \\ = 2\|\mathbf{t}_i^o - \mathbf{s}_j\| \Delta r_{i,j1} \end{aligned} \quad (17)$$

为了便于处理式(17), 定义未知向量 $\mathbf{z}_i^o = (\mathbf{t}_i^{oT}, \|\mathbf{t}_i^o - \mathbf{s}_1\|, \dots, \mathbf{t}_M^{oT}, \|\mathbf{t}_M^o - \mathbf{s}_1\|)^T$, 将所有满足式(17)的方程写成矩阵形式, 有如下伪线性方程:

$$\mathbf{h}_1 - \mathbf{G}_1 \mathbf{z}_1^o = \mathbf{B}_1 \Delta \mathbf{r} \quad (18)$$

其中, 观测向量 $\mathbf{h}_1$ 与观测矩阵 $\mathbf{G}_1$ 的表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 &= (\mathbf{h}_{11}^T, \mathbf{h}_{12}^T, \dots, \mathbf{h}_{1M}^T)^T \\ \mathbf{G}_1 &= \text{blkdiag}(\mathbf{G}_{11}, \mathbf{G}_{12}, \dots, \mathbf{G}_{1M}) \\ \mathbf{B}_1(k_1, k_1) &= \|\mathbf{t}_i^0 - \mathbf{s}_j\| \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $\mathbf{h}_{1i}$ 第 $j-1$ 行元素为 $\mathbf{h}_{1i}(j-1) = r_{i,j1}^2 + \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_j^T \mathbf{s}_j$, $\mathbf{G}_{1i}$ 第 $j-1$ 行向量为 $\mathbf{G}_{1i}(j-1, :) = 2[(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_j)^T, r_{i,j1}]$ 。此外, 伪线性方程式 (18) 是基于观测量 $r_{i,j1}$ 所构建, 因此索引 k_1 及其对应的 i 与 j 定义同第 2.1 节, 即 $k_1 = (i-1)(N-1) + j-1$ 且 $i = 1, 2, \dots, M, j = 2, 3, \dots, N$, 下文不再赘述。

利用辅助变量作为约束条件, 式 (18) 可转化为如下约束加权最小二乘 (Constrained Weighted Least Squares, CWLS) 问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}_1} & (\mathbf{G}_1 \mathbf{z}_1 - \mathbf{h}_1)^T \mathbf{W}_1 (\mathbf{G}_1 \mathbf{z}_1 - \mathbf{h}_1) \\ \text{s.t. } & \mathbf{z}_1(4i) = \|\mathbf{z}_1(4i-3:4i-1) - \mathbf{s}_1\|, i = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (20)$$

其中, 加权矩阵 $\mathbf{W}_1 = (\mathbf{B}_1 \mathbf{Q}_1 \mathbf{B}_1^T)^{-1}$ 。式 (20) 本质上为非凸定位问题, 本节拟利用半定松弛技术进一步求解^[16]。首先定义辅助矩阵变量 $\mathbf{H}_1 = \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_1^T$, 那么 CWLS 问题 (20) 中的目标函数可重写为

$$(\mathbf{G}_1 \mathbf{z}_1 - \mathbf{h}_1)^T \mathbf{W}_1^{-1} (\mathbf{G}_1 \mathbf{z}_1 - \mathbf{h}_1) = \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_1^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{F}_1 \right\} \quad (21)$$

其中,

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{h}_1 \\ -\mathbf{h}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{G}_1 & \mathbf{h}_1^T \mathbf{W}_1 \mathbf{h}_1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

此外, 约束条件可表示为关于 $\mathbf{H}_1$ 元素的形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(4i, 4i) &= \text{tr} \{ \mathbf{H}_1(4i-3:4i-1, 4i-3:4i-1) \} \\ &\quad - 2\mathbf{s}_1^T \mathbf{z}_1(4i-3:4i-1) + \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 \end{aligned} \quad (23)$$

另外, 约束条件 $\mathbf{H}_1 = \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_1^T$ 等价于 $\mathbf{H}_1 \succeq \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_1^T$ (且 $\mathbf{H}_1$ 的秩为 1)。忽略秩为 1 的约束条件, 那么 CWLS 问题式 (20) 可松弛为如下 SDP 问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{H}_1, \mathbf{z}_1} & (\mathbf{G}_1 \mathbf{z}_1 - \mathbf{h}_1)^T \mathbf{Q}_1^{-1} (\mathbf{G}_1 \mathbf{z}_1 - \mathbf{h}_1) = \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_1^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{F}_1 \right\} \\ \text{s.t. } & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_1^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \\ & \mathbf{H}_1(4i, 4i) = \text{tr} \{ \mathbf{H}_1(4i-3:4i-1, 4i-3:4i-1) \} \\ & \quad - 2\mathbf{s}_1^T \mathbf{z}_1(4i-3:4i-1) + \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 \end{aligned} \quad (24)$$

利用内点法或 CVX 工具箱^[16]即可得到未知向量的估计值 $\hat{\mathbf{z}}_1$, 从而可得第 i 个中继位置初始解为

$$\hat{\mathbf{t}}_i = \hat{\mathbf{z}}_1(4i-3:4i-1) \quad (25)$$

需要说明的是, 根据式 (18) 至式 (20), 计算加权矩阵 $\mathbf{W}_1$ 依赖于未知参数。为了解决该问题, 可将加权矩阵设置为单位矩阵^[15-18], 得到粗略解后更新 $\mathbf{B}_1$ 与 $\mathbf{W}_1$, 从而给出最终初始解。

3.2 目标位置初始解

将式 (4) 移项重写为

$$\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{t}_i^0\| = \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{t}_1^0\| + \|\mathbf{t}_1^0 - \mathbf{s}_j\| - \|\mathbf{t}_i^0 - \mathbf{s}_j\| + q_{j,i1}^0 \quad (26)$$

对式 (26) 两边同时平方, 整理可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{t}_i^{0T} \mathbf{t}_i^0 - \mathbf{t}_1^{0T} \mathbf{t}_1^0 - (\|\mathbf{t}_1^0 - \mathbf{s}_j\| - \|\mathbf{t}_i^0 - \mathbf{s}_j\| + q_{j,i1}^0)^2 \\ &= 2(\mathbf{t}_i^0 - \mathbf{t}_1^0)^T \mathbf{u}^0 + 2(\|\mathbf{t}_1^0 - \mathbf{s}_j\| - \|\mathbf{t}_i^0 - \mathbf{s}_j\| + q_{j,i1}^0) \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{t}_1^0\| \end{aligned} \quad (27)$$

式 (27) 中同时含有目标和中继的未知位置, 难以直接求解。利用第 3.1 节所得中继解代替真实中继位置, 并将式 (5) 代入式 (27), 只保留线性误差, 整理可得:

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{t}}_i^T \hat{\mathbf{t}}_i - \hat{\mathbf{t}}_1^T \hat{\mathbf{t}}_1 - (\|\hat{\mathbf{t}}_1 - \mathbf{s}_j\| - \|\hat{\mathbf{t}}_i - \mathbf{s}_j\| + q_{j,i1})^2 \\ &= 2(\hat{\mathbf{t}}_i - \hat{\mathbf{t}}_1)^T \mathbf{u}^0 + 2(\|\hat{\mathbf{t}}_1 - \mathbf{s}_j\| - \|\hat{\mathbf{t}}_i - \mathbf{s}_j\| + q_{j,i1}) \|\mathbf{u}^0 - \hat{\mathbf{t}}_1\| \\ &\quad - 2\|\mathbf{u}^0 - \hat{\mathbf{t}}_1\| \Delta q_{j,i1} \end{aligned} \quad (28)$$

与第 3.1 节类似, 联合所有式 (28) 有

$$\mathbf{h}_2 - \mathbf{G}_2 \mathbf{z}_2^0 = \mathbf{B}_2 \Delta \mathbf{q} \quad (29)$$

其中, $\mathbf{z}_2^0 = (\mathbf{u}^0, \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{t}_1\|)^T$ 为未知参数向量。此外:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_2 &= (\mathbf{h}_{21}^T, \mathbf{h}_{22}^T, \dots, \mathbf{h}_{2N}^T)^T \\ \mathbf{h}_{2j}(i-1) &= \hat{\mathbf{t}}_i^T \hat{\mathbf{t}}_i - \hat{\mathbf{t}}_1^T \hat{\mathbf{t}}_1 - (\|\hat{\mathbf{t}}_1 - \mathbf{s}_j\| - \|\hat{\mathbf{t}}_i - \mathbf{s}_j\| + q_{j,i1})^2 \\ \mathbf{G}_2 &= [\mathbf{G}_{21}^T, \mathbf{G}_{22}^T, \dots, \mathbf{G}_{2N}^T]^T \\ \mathbf{G}_{2j}(i-1, :) &= 2[(\hat{\mathbf{t}}_i - \hat{\mathbf{t}}_1)^T, \|\hat{\mathbf{t}}_1 - \mathbf{s}_j\| - \|\hat{\mathbf{t}}_i - \mathbf{s}_j\| + q_{j,i1}] \\ \mathbf{B}_2(k_2, k_2) &= -2\|\mathbf{u}^0 - \hat{\mathbf{t}}_1\| \end{aligned} \quad (30)$$

其中, 构建伪线性方程式 (29) 是基于观测量 $q_{j,i1}$, 所涉及 k_2 及其对应的 i, j 定义与第 2.1 节相同, 即 $k_2 = (j-1)(M-1) + i-1$ 且 $i = 2, 3, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N$, 下同。式 (29) 可改为如下 CWLS 问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}_2} & (\mathbf{G}_2 \mathbf{z}_2 - \mathbf{h}_2)^T \mathbf{W}_2 (\mathbf{G}_2 \mathbf{z}_2 - \mathbf{h}_2) \\ \text{s.t. } & \mathbf{z}_2(4) = \|\mathbf{z}_2(1:3) - \mathbf{s}_1\| \end{aligned} \quad (31)$$

其中, 加权矩阵为 $\mathbf{W}_2 = (\mathbf{B}_2 \mathbf{Q}_2 \mathbf{B}_2^T)^{-1}$ 。定义辅助矩阵变量 $\mathbf{H}_2 = \mathbf{z}_2 \mathbf{z}_2^T$, 利用与第 3.1 节构建半定规划问题类似思路, 定位问题式 (31) 可改写为如下半定规划问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{H}_2, \mathbf{z}_2} & (\mathbf{G}_2 \mathbf{z}_2 - \mathbf{h}_2)^T \mathbf{Q}_2^{-1} (\mathbf{G}_2 \mathbf{z}_2 - \mathbf{h}_2) = \text{tr} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_2^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{F}_2 \right\} \\ \text{s.t. } & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_2^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\mathbf{H}_2(4, 4) = \text{tr} \{ \mathbf{H}_2(1:3, 1:3) \} - 2\mathbf{t}_1^T \mathbf{z}_2(1:3) + \mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_1$$

其中,

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_2^T \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_2^T \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{h}_2 \\ -\mathbf{h}_2^T \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{G}_2 & \mathbf{h}_2^T \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

利用内点法或 CVX 工具箱即可给出未知向量的估计值 $\hat{\mathbf{z}}_2$, 从而可得目标位置初始估计值为

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{z}}_2(1:3) \quad (34)$$

此外, 根据式 (30) 可知, 获取目标位置初始解需

依靠未知参数。为解决该问题,同样需要将加权矩阵 $\mathbf{W}_2$ 设置为单位矩阵以得到目标位置估计值,随后利用该值更新加权矩阵,从而给出目标位置初始解。

在第 3.1 与第 3.2 节中,为了将非凸定位问题转化为可求解的 SDP 凸优化问题,虽然忽略了 rank-1 约束,但在本文所考虑的定位场景与设定的噪声水平下,SDP 解表现出显著的单一大特征值特性,即满足秩为 1 (见第 5.6 节的仿真结果)。即使观测量缺失等问题导致出现高秩解,也可通过提取最大特征值对应的特征向量构造近似解,并利用第 3.3 节联合修正步骤,进一步提升定位性能。

3.3 目标与中继位置联合修正解

前两步通过半定松弛技术分别给出目标和中继位置的初始估计解,但第 3.1 节估计中继位置并未充分利用两组 TDOA 信息,仅利用 $\mathbf{r}$ 这一组观测向量。此外,在估计目标位置时,利用中继初始解代替真实值,未考虑中继估计误差。因此,第 3.1 节和第 3.2 节所给的估计值难以实现 CRLB 性能。本节首先充分利用两组 TDOA 观测信息构建矩阵方程,通过 WLS 技术实现误差补偿,随后给出利用 TDOA-AOA 的联合修正模型,以进一步提升目标与中继的定位性能。

3.3.1 基于 TDOA 的误差修正

首先定义 $\hat{\mathbf{t}}_i = \mathbf{t}_i^\circ - \Delta \mathbf{t}_i$, $\Delta \mathbf{t}_i$ 为第 3.1 节中继位置估计误差,将 $\hat{\mathbf{t}}_i$ 与观测量代入式(1)利用线性泰勒级数展开有

$$r_{i,j1} - \|\hat{\mathbf{t}}_i - \mathbf{s}_j\| + \|\hat{\mathbf{t}}_i - \mathbf{s}_1\| = (\boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{t}}_i, \mathbf{s}_1}^\top - \boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{t}}_i, \mathbf{s}_j}^\top) \Delta \mathbf{t}_i + \Delta r_{i,j1} \quad (35)$$

联合式(35)可得:

$$\mathbf{h}_3 - \mathbf{G}_3 \Delta \mathbf{t} = \Delta \mathbf{r} \quad (36)$$

其中,未知向量为 $\Delta \mathbf{t} = (\Delta \mathbf{t}_1^\top, \Delta \mathbf{t}_2^\top, \dots, \Delta \mathbf{t}_M^\top)^\top$, $\mathbf{h}_3$ 和 $\mathbf{G}_3$ 可通过式(37)计算得到。

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_3 &= (\mathbf{h}_{31}^\top, \mathbf{h}_{32}^\top, \dots, \mathbf{h}_{3M}^\top)^\top \\ \mathbf{G}_3 &= [\mathbf{G}_{31}^\top, \mathbf{G}_{32}^\top, \dots, \mathbf{G}_{3M}^\top]^\top \end{aligned} \quad (37)$$

其中, $\mathbf{h}_{3i}$ 和 $\mathbf{G}_{3i}$ 的每一行元素为

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{3i}(j-1) &= r_{i,j1} - \|\hat{\mathbf{t}}_i - \mathbf{s}_j\| + \|\hat{\mathbf{t}}_i - \mathbf{s}_1\| \\ \mathbf{G}_{3i}(j-1,:) &= [\mathbf{0}_{3(i-1)}^\top, \boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{t}}_i, \mathbf{s}_1}^\top - \boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{t}}_i, \mathbf{s}_j}^\top, \mathbf{0}_{3(M-i)}^\top] \end{aligned} \quad (38)$$

定位目标位置估计为 $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^\circ - \Delta \mathbf{u}$, 其中 $\Delta \mathbf{u}$ 为估计误差。将 $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{t}}_i$ 以及观测量代入式(4), 利用线性泰勒级数展开可得:

$$\begin{aligned} q_{j,i1} - \|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{t}}_i\| - \|\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{s}_j\| + \|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{t}}_1\| + \|\hat{\mathbf{t}}_1 - \mathbf{s}_j\| \\ = \Delta q_{j,i1} + (\boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{s}_j}^\top - \boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{t}}_i}^\top) \Delta \mathbf{t}_1 \\ + (\boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{t}}_i}^\top - \boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{s}_j}^\top) \Delta \mathbf{t}_i + (\boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{t}}_1}^\top - \boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{s}_j}^\top) \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (39)$$

其中, $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^\circ - \Delta \mathbf{u}$, $\Delta \mathbf{u}$ 为目标位置的估计误差, 写为矩阵形式得:

$$\mathbf{h}_4 - \mathbf{G}_4 \Delta \boldsymbol{\psi} = \Delta \mathbf{q} \quad (40)$$

其中, $\Delta \boldsymbol{\psi} = (\Delta \mathbf{u}^\top, \Delta \mathbf{t}^\top)^\top$ 为未知向量。另外, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_4 &= (\mathbf{h}_{41}^\top, \mathbf{h}_{42}^\top, \dots, \mathbf{h}_{4N}^\top)^\top \\ \mathbf{G}_4 &= [\mathbf{G}_{41}^\top, \mathbf{G}_{42}^\top, \dots, \mathbf{G}_{4N}^\top]^\top \end{aligned} \quad (41)$$

其中, $\mathbf{h}_{4j}$ 与 $\mathbf{G}_{4j}$ 的第 $i-1$ 行元素为

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{4j}(i-1) &= q_{j,i1} - \|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{t}}_i\| - \|\hat{\mathbf{t}}_i - \mathbf{s}_j\| \\ &\quad + \|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{t}}_1\| + \|\hat{\mathbf{t}}_1 - \mathbf{s}_j\| \\ \mathbf{G}_{4j}(i-1,:) &= [(\boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{t}}_i}^\top - \boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{s}_j}^\top), (\boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{t}}_i, \mathbf{s}_j}^\top - \boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{t}}_i, \hat{\mathbf{t}}_1}^\top), \mathbf{0}_{3(i-2)}^\top, \\ &\quad (\boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{t}}_1}^\top - \boldsymbol{\rho}_{\hat{\mathbf{t}}_1, \mathbf{s}_j}^\top), \mathbf{0}_{3(M-i)}^\top] \end{aligned} \quad (42)$$

联合矩阵方程式(36)与式(40)可得基于 TDOA 的误差修正等式:

$$\mathbf{h}_5 - \mathbf{G}_5 \Delta \boldsymbol{\psi} = \Delta \mathbf{m} \quad (43)$$

其中, $\mathbf{h}_5$ 为 $M(N-1) + N(M-1)$ 维度的观测向量, $\mathbf{G}_5$ 为 $(M(N-1) + N(M-1)) \times 3(M+1)$ 维度观测矩阵, 它们定义如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_5 &= (\mathbf{h}_3^\top, \mathbf{h}_4^\top)^\top \\ \mathbf{G}_5 &= \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{G}_3 \\ \mathbf{G}_4(:, 1:3) & \mathbf{G}_4(:, 4:\text{end}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

未知向量 $\Delta \boldsymbol{\psi}$ 的 WLS 解为

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_1 = (\mathbf{G}_5^\top \mathbf{W}_5 \mathbf{G}_5)^{-1} \mathbf{G}_5^\top \mathbf{W}_5 \mathbf{h}_5 \quad (45)$$

其中, 加权矩阵 $\mathbf{W}_5 = \mathbf{Q}_m^{-1}$ 。因此, 仅利用 TDOA 时, 中继与目标位置的修正解为

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}} - \Delta \boldsymbol{\psi}_1(1:3) \\ \mathbf{t} &= \hat{\mathbf{t}} - \Delta \boldsymbol{\psi}_1(4:\text{end}) \end{aligned} \quad (46)$$

3.3.2 基于 TDOA-AOA 的误差修正

当参考站具备测向能力时, 联合 TDOA-AOA 观测信息进行误差修正可进一步提升定位性能, 式(8)可重写为

$$\begin{aligned} \sin \theta_i^\circ (x_{t_i}^\circ - x_{s_1}) - \cos \theta_i^\circ (y_{t_i}^\circ - y_{s_1}) &= 0 \\ (x_{t_i}^\circ - x_{s_1}) \cos \theta_i^\circ \sin \phi_i^\circ + \\ (y_{t_i}^\circ - y_{s_1}) \sin \theta_i^\circ \sin \phi_i^\circ - (z_{t_i}^\circ - z_{s_1}) \cos \phi_i^\circ &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

将 $\hat{\mathbf{t}}_i = \mathbf{t}_i^\circ - \Delta \mathbf{t}_i$ 和式(9)代入式(47), 忽略二阶误差项整理可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\theta i}^\top (\mathbf{s}_1 - \hat{\mathbf{t}}_i) + \mathbf{g}_{\theta i}^\top \Delta \mathbf{t}_i &= l_i \Delta \theta_i \\ \mathbf{g}_{\phi i}^\top (\mathbf{s}_1 - \hat{\mathbf{t}}_i) + \mathbf{g}_{\phi i}^\top \Delta \mathbf{t}_i &= d_i \Delta \phi_i \end{aligned} \quad (48)$$

其中, 向量 $\mathbf{g}_{\theta i}$ 和 $\mathbf{g}_{\phi i}$ 以及 l_i 和 d_i 与式(14)中的定义相同, 只需将真实值 θ_i° , ϕ_i° 与 $\mathbf{t}_i^\circ$ 替换为观测值 θ_i , ϕ_i 与初始解 $\hat{\mathbf{t}}_i$ 。

将式(48)对应的所有观测量写为矩阵形式有

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_\theta - \mathbf{G}_\theta \Delta \mathbf{t} &= \mathbf{B}_\theta \Delta \theta \\ \mathbf{h}_\phi - \mathbf{G}_\phi \Delta \mathbf{t} &= \mathbf{B}_\phi \Delta \phi \end{aligned} \quad (49)$$

其中, $\Delta \mathbf{t}$ 作为待估计量, 观测向量与矩阵定义如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_\theta(i) &= \mathbf{g}_{\theta i}^T (\mathbf{s}_1 - \mathbf{t}_i) \\ \mathbf{G}_\theta &= \text{blkdiag}(-\mathbf{g}_{\theta 1}^T, -\mathbf{g}_{\theta 2}^T, \dots, -\mathbf{g}_{\theta M}^T) \\ \mathbf{h}_\phi(i) &= \mathbf{g}_{\phi i}^T (\mathbf{s}_1 - \mathbf{t}_i) \\ \mathbf{G}_\phi &= \text{blkdiag}(-\mathbf{g}_{\phi 1}^T, -\mathbf{g}_{\phi 2}^T, \dots, -\mathbf{g}_{\phi M}^T) \end{aligned} \quad (50)$$

角度测量误差系数矩阵 $\mathbf{B}_\theta$ 与 $\mathbf{B}_\phi$ 分别为由元素 l_i 和 d_i 组成的对角矩阵, $i = 1, 2, \dots, M$ 。

将式(43)与式(49)联立可得:

$$\mathbf{h}_6 - \mathbf{G}_6 \Delta \boldsymbol{\psi} = \mathbf{B}_6 \Delta \boldsymbol{\kappa} \quad (51)$$

其中, $\mathbf{h}_6$ 为 $(M(N-1) + N(M-1) + 2M)$ 维观测向量, 矩阵 $\mathbf{G}_6$ 为 $(M(N-1) + N(M-1) + 2M) \times 3(M+1)$, 它们的定义如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_6 &= (\mathbf{h}_5^T, \mathbf{h}_\theta^T, \mathbf{h}_\phi^T)^T \\ \mathbf{G}_6 &= [\mathbf{G}_5^T, \mathbf{G}_\theta^T, \mathbf{G}_\phi^T]^T \end{aligned} \quad (52)$$

其中, $\mathbf{G}_\theta' = [\mathbf{O}_{M \times 3}, \mathbf{G}_\theta]$, $\mathbf{G}_\phi' = [\mathbf{O}_{M \times 3}, \mathbf{G}_\phi]$ 。另外, 矩阵 $\mathbf{B}_6 = \text{blkdiag}(\mathbf{I}_{M(N-1) + N(M-1)}, \mathbf{B}_\theta, \mathbf{B}_\phi)$, 再次利用 WLS 技术可得 $\Delta \boldsymbol{\psi}$ 的估计值为

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_2 = (\mathbf{G}_6^T \mathbf{W}_6 \mathbf{G}_6)^{-1} \mathbf{G}_6^T \mathbf{W}_6 \mathbf{h}_6 \quad (53)$$

其中, $\mathbf{W}_6 = (\mathbf{B}_6 \mathbf{Q}_\kappa \mathbf{B}_6^T)^{-1}$ 。那么, 联合 TDOA-AOA 所得中继与目标位置的修正解为

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}} - \Delta \boldsymbol{\psi}_2(1:3) \\ \mathbf{t} &= \hat{\mathbf{t}} - \Delta \boldsymbol{\psi}_2(4:\text{end}) \end{aligned} \quad (54)$$

需要说明的是, 本文算法主要聚焦单目标定位, 但对于相互独立的多目标定位场景, 可通过构建不同目标的观测方程, 利用观测方程块对角化扩展^[10]或目标逐一处理等思路实现多目标定位。而对于存在信号耦合交织的相关多目标定位场景, 首先需重点解决高精度数据关联及参数耦合等问题, 此部分内容将作为后续工作。

4 算法分析

本章首先以所提算法可实现唯一目标与中继位置为目的, 给出所需接收站与中继数目分析。随后, 进一步证明了所提算法在测量噪声/误差较小时可实现 CRLB 性能。

4.1 所提算法所需接收站与中继数目分析

为实现第 3.1 节给出的可靠中继位置初始估计值, 需保证伪线性方程式(18)非欠定, 因此必须满足 $M(N-1) \geq 4M$, 从而可得接收站数目至少为 5 个。另外, 第 3.2 节式(29)中的矩阵 $\mathbf{G}_2$ 维度为 $N(M-1) \times 4$, 但真正独立的观测信息数目为 $(M-1)$, 故第 3.2 节要给出可靠的目标位置初始解, 中继数目同样至少为 5 个。当接收站和中继数目均大于 4 时, 第 3.3 节满足列满秩, 可给出唯一解。因此, 所提算法所需接收站和中继的数目均为 5 个, 这与第 2 章中的分析略有差异, 主要原因在于为了构建凸优化问题, 所提算法引

入了辅助变量, 故需要额外数量的接收站和中继来保证算法的定位精度。

4.2 所提算法性能分析

本节进一步证明所提算法在观测噪声/误差较小时可实现 CRLB 性能, 首先定义如下小观测噪声/误差条件:

$$\begin{aligned} \Delta r_{i,j1}/r_{i,j1}^\circ &\approx 0, \Delta q_{j,i1}/q_{j,i1}^\circ \approx 0 \\ \Delta \theta_i/\theta^\circ &\approx 0, \Delta \phi_i/\phi^\circ \approx 0 \end{aligned} \quad (55)$$

根据第 3 章的阐述, 所提算法仅利用 TDOA 时, 目标与中继位置的最终估计误差可表示为

$$\Delta \boldsymbol{\delta}_1 = (\hat{\mathbf{u}}^T, \hat{\mathbf{t}}^T)^T - \boldsymbol{\psi}^\circ \quad (56)$$

将式(46)代入式(56)整理可得:

$$\Delta \boldsymbol{\delta}_1 = \Delta \boldsymbol{\psi}_1 - \Delta \boldsymbol{\psi} \quad (57)$$

由式(57)可知, 基于 TDOA 所提算法的估计误差等价于第 3.3.1 节的估计误差, 将式(45)代入式(57), 整理可得:

$$\Delta \boldsymbol{\delta}_1 = (\mathbf{G}_5^T \mathbf{W}_5 \mathbf{G}_5)^{-1} \mathbf{G}_5^T \mathbf{W}_5 (\mathbf{h}_5 - \mathbf{G}_5 \Delta \boldsymbol{\psi}) \quad (58)$$

对式(58)两边取期望, 并忽略二阶误差项可得 $E(\Delta \boldsymbol{\delta}_1) \approx 0$, 即所提算法近似无偏估计, 那么基于 TDOA 的所提算法估计误差的协方差矩阵为

$$\text{cov}(\Delta \boldsymbol{\delta}_1) = (\mathbf{G}_5^T \mathbf{W}_5 \mathbf{G}_5)^{-1} \quad (59)$$

将式(59)改写为矩阵形式有

$$\text{cov}(\Delta \boldsymbol{\delta}_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{E}_{12}^T & \mathbf{E}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (60)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{11} &= \mathbf{G}_4^T(:, 1:3) \mathbf{Q}_q^{-1} \mathbf{G}_4(:, 1:3) \\ \mathbf{E}_{12} &= \mathbf{G}_4^T(:, 1:3) \mathbf{Q}_q^{-1} \mathbf{G}_4(:, 4:\text{end}) \\ \mathbf{E}_{22} &= \mathbf{G}_3^T \mathbf{Q}_r^{-1} \mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_4^T(:, 4:\text{end}) \mathbf{Q}_q^{-1} \mathbf{G}_4(:, 4:\text{end}) \end{aligned} \quad (61)$$

不难发现, 式(60)与式(11)具有相同的形式, 通过矩阵乘法等代数运算操作^[41], 结合条件式(55), 可得:

$$\mathbf{G}_4(:, 1:3) \approx -\frac{\partial \mathbf{q}^\circ}{\partial \mathbf{u}^{\circ T}}, \mathbf{G}_4(:, 4:\text{end}) \approx -\frac{\partial \mathbf{q}^\circ}{\partial \mathbf{t}^{\circ T}}, \mathbf{G}_3 \approx -\frac{\partial \mathbf{r}^\circ}{\partial \mathbf{t}^{\circ T}} \quad (62)$$

因此, 基于 TDOA 的所提算法在观测噪声/误差较小时可实现 CRLB 性能。

对于联合 TDOA-AOA 的所提算法, 利用上述思路同样可得其估计误差协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \text{cov}(\Delta \boldsymbol{\delta}_2) &= (\mathbf{G}_6^T \mathbf{W}_6 \mathbf{G}_6)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (63)$$

其中, 矩阵 $\mathbf{P}_{11}$ 与 $\mathbf{E}_{11}$ 、 $\mathbf{P}_{12}$ 与 $\mathbf{E}_{12}$ 对应相同, $\mathbf{P}_{22}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{22} &= \mathbf{G}_3^T \mathbf{Q}_r^{-1} \mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_4^T(:, 4:\text{end}) \mathbf{Q}_q^{-1} \mathbf{G}_4(:, 4:\text{end}) \\ &\quad + (\mathbf{B}_\theta^{-1} \mathbf{G}_\theta)^T \mathbf{Q}_\theta^{-1} (\mathbf{B}_\theta^{-1} \mathbf{G}_\theta) + (\mathbf{B}_\phi^{-1} \mathbf{G}_\phi)^T \mathbf{Q}_\phi^{-1} (\mathbf{B}_\phi^{-1} \mathbf{G}_\phi) \end{aligned} \quad (64)$$

当观测噪声较小时, 经过矩阵代数运算可得:

$$\mathbf{B}_\theta^{-1} \mathbf{G}_\theta \approx \frac{\partial \theta^\circ}{\partial \mathbf{t}^{\text{OT}}}, \mathbf{B}_\phi^{-1} \mathbf{G}_\phi \approx \frac{\partial \phi^\circ}{\partial \mathbf{t}^{\text{OT}}} \quad (65)$$

因此,联合 TDOA-AOA 的所提算法在测量噪声较小时同样能够实现 CRLB 性能。

5 仿真实验

本章通过数值仿真进一步验证理论分析。其中,仿真过程中的接收站、中继与目标位置均随机产生,具体坐标界限见表 1。本文所提仅利用 TDOA 和联合 TDOA-AOA 的定位算法在仿真实验中分别记作“所提算法(TDOA)”与“所提算法(TDOA-AOA)”,它们对应的 CRLB 作为性能评价标准也一并给出。为进一步验证第 3.3 节联合修正的有效性,仿真实验对比算法添加了所提算法的初始解,在本章记作“所提算法(未联合修正)”。另外,对比算法还包括仅利用 TDOA 观测信息,基于高斯牛顿迭代求解的最大似然估计(Maximum Likelihood Estimation, MLE)算法,该算法是一种渐进有效估计,通常在定位问题中引入以验证所提算法的有效性。MLE 算法所涉及的梯度矩阵及求解步骤可结合本文观测向量与文献[19]实现,对此不再赘述。

仿真实验中 TDOA 与 AOA 观测向量的协方差矩阵分别设置为 $\mathbf{Q}_r = \sigma_a^2 \mathbf{I}_{M(N-1)}$ 、 $\mathbf{Q}_d = \sigma_a^2 \mathbf{I}_{N(M-1)}$ 以及 $\mathbf{Q}_\theta = \mathbf{Q}_\phi = \sigma_\beta^2 \mathbf{I}_M$, 其中 σ_a^2 与 σ_β^2 为方差,且 $\sigma_\beta = 5\sigma_a$ 。另外,为验证 MLE 对初始值的敏感性,设置了 3 种初始化方式:真实值初始化、在真实值附近添加 20% 高斯噪声的随机初始化,以及利用本文 SDP 解作为初始值,从而更全面地验证本文方法的优势。仿真场景第 5.1 节性能指标为估计误差的累积分布函数(Cumulative Distribution Function, CDF),其余场景性能指标为估计均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE),两种指标定义如下:

$$\text{RMSE}(\varsigma) = \sqrt{\sum_{l=1}^L \|\varsigma_l - \varsigma^\circ\|^2 / L} \quad (66)$$

$$\text{CDF}(\varsigma) = \sum_{l=1}^L \|\varsigma_l - \varsigma^\circ\|^2$$

其中, ς° 为未知中继或目标位置, ς_l 为第 l 次蒙特卡罗仿真中对应 ς° 的估计值,蒙特卡罗仿真次数 L 设置为 5 000 次。

5.1 不同算法 CDF 性能对比情况

本节给出了不同算法定位估计误差的 CDF 性能对比情况,中继和接收站节点数目分别设置为 5 和 6, σ_a^2 设置为 0.1 m^2 ,仿真结果如图 2 所示。所提算法(TDOA-AOA)目标与中继位置估计性能最优,表明仅有一个参考站具备可靠角度估计能力时,引入角度信息可显著提升目标与中继的定位精度。所提算法

表 1 接收站、中继与目标坐标界限

单位: m

Table 1 Boundaries of receivers, transceivers, and object coordinates

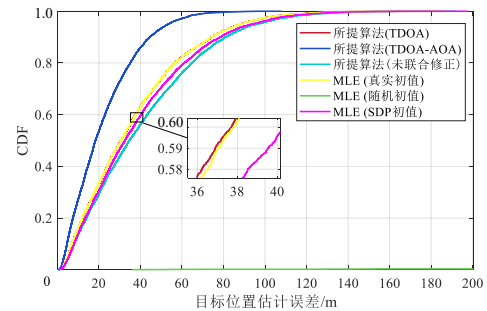
unit: m

	坐标界限	X	Y	Z
接收站	上限	500	300	200
	下限	-500	-300	-200
未知中继	上限	1 000	1 000	1 000
	下限	-1 000	-1 000	-1 000
未知目标	上限	2 000	2 000	2 000
	下限	-2 000	-2 000	-2 000

(TDOA)与真实参数初始化的 MLE 算法估计性能接近,但 MLE 所需真实值在实际场景中难以获取。使用随机值初始化的 MLE 算法由于对初值高度敏感,易陷入局部极值,其估计误差显著增大,导致相应的 CDF 曲线未能完整呈现在图中。MLE(SDP 初值)定位性能得到显著改善,表明所提 SDP 算法在提供初始解方面具有显著优势。所提算法(未联合修正)估计性能仅优于随机值初始化的 MLE,凸显出所提算法第三步联合修正的重要性。

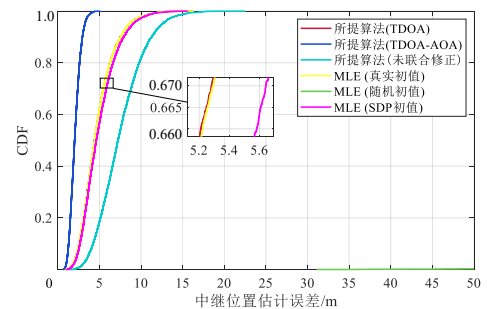
5.2 不同算法定位性能随 σ_a^2 变化情况

本节给出不同算法定位性能随测量噪声 σ_a^2 的变



(a) 目标位置 CDF

(a) Object position CDF



(b) 中继位置 CDF

(b) Transceiver position CDF

图 2 不同算法 CDF 性能对比情况

Figure 2 CDF performance of different algorithms

化情况,仿真结果见图3,其余参数设置同第5.1节。根据仿真结果可知,所提算法(仅利用TDOA与联合TDOA-AOA)在 σ_a^2 小于 1 m^2 时,均可实现各自对应的CRLB性能。当 σ_a^2 继续增大时,所提算法开始偏离CRLB,这可能是由于算法所忽略的二阶误差开始主导定位性能。相比所提算法(未联合修正)以及所提算法(TDOA),所提算法(TDOA-AOA)在整个测量误差范围内可将目标位置估计性能分别改善85%和40%,同时所提算法可将中继位置估计性能分别提升72%和57%,再次表明引入第三步联合修正及利用单站角度信息的优势。此外,基于随机初始化策略的MLE算法性能较差,表明MLE需要依赖于可靠初始值保证收敛;相比之下,MLE(SDP初值)性能显著提升,再次表明SDP解作为初始值可保证MLE收敛并给出良好的估计结果。基于真实值初始化的MLE虽能实现CRLB,但该初始化策略过于乐观,在实际场景中难以获取^[7]。

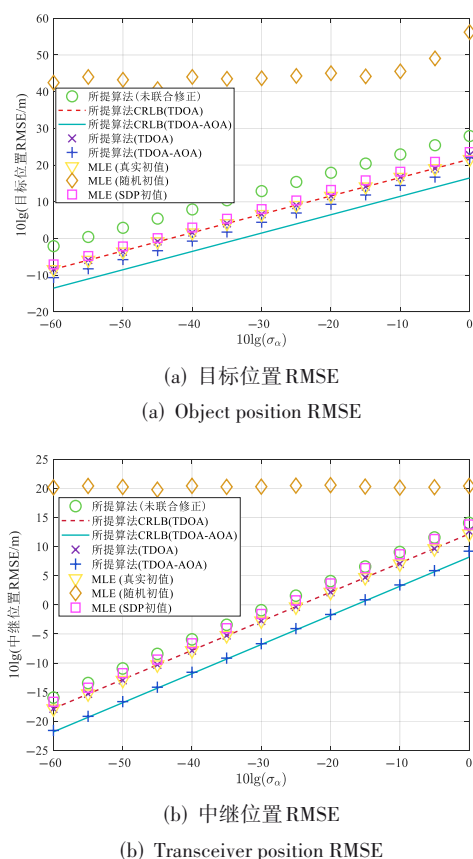


图3 不同算法定位性能随 σ_a^2 变化情况
Figure 3 Localization performance of different algorithms as σ_a^2 increases

5.3 定位性能随接收站数目变化情况

本节进一步分析不同算法定位性能随接收站数目变化情况, σ_a^2 设置为 0.01 m^2 ,中继节点数目固定为

5。由图4所示结果可知,所提算法与MLE(SDP初值)在接收站数目为4时失效,其主要原因在于,相比于CRLB,所提算法为了处理非凸定位问题,在构建SDP问题过程中引入额外变量,从而需要额外数量的接收站以避免问题欠定,该结论与第4节中的理论分析结果一致。类似现象在现有目标定位相关文献中同样存在^[15-18]。相比之下,基于真实参数初始化的MLE算法在接收站数目为4时仍可达到CRLB,这是因为该算法并未引入额外变量,而是通过梯度迭代直接求解原始优化问题,但真实参数在实际场景中不易获取。

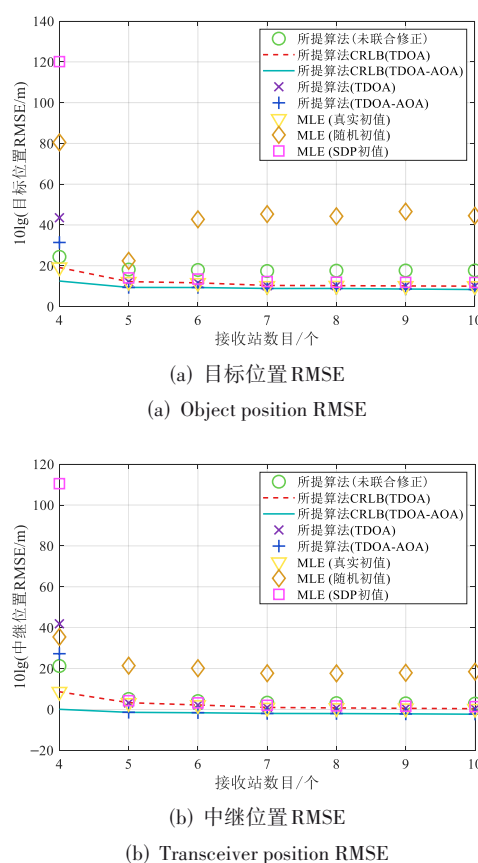


图4 不同算法定位性能随接收站数目变化情况
Figure 4 Localization performance of different algorithms with the number of receivers

5.4 定位性能随中继数目的变化情况

本节给出定位性能随中继数目的变化情况,接收站数目设置为6个,其余参数与第5.3节一致。由图5可知,当中继数目不少于5时,所提算法方可实现目标位置的精确估计,主要原因在于:当中继数目为4时,第3.2节所构建定位方程不满秩,导致半定规划问题相对松弛,从而造成性能退化。另外,当中继数目为4时,所提算法中继定位性能仍可实现CRLB,这是

因为本小节接收站数目设置为6,已满足理论分析中给出的中继定位条件。此外,基于3种初始化策略的MLE定位性能与第5.1节至第5.3节类似。

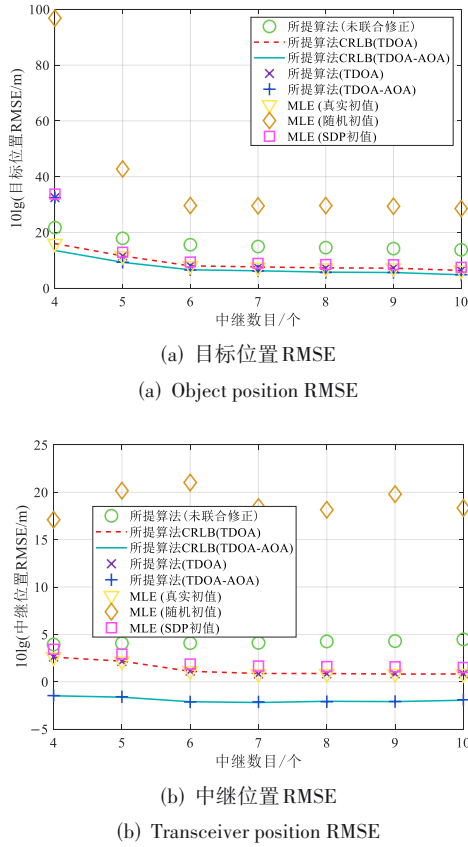


图5 定位性能随中继数目的变化情况

Figure 5 Localization performance with the number of transceivers

5.5 定位性能随目标距离的变化情况

本节进一步验证所提算法在远距离目标场景下的定位性能,目标位置坐标设置为 $\mathbf{u}^0 = a \times (1\,000, 1\,000, 1\,000)^T$,其中 a 为距离因子。为了保证中继、目标与接收站之间具有良好的几何构型,中继位置相应调整为 $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}^0 + 10a$ 。仿真结果如图6所示,其整体变化趋势与第5.1节至第5.4节一致,所提算法与真实参数初始化的MLE均可实现对应的CRLB,使用SDP解作为初值和随机初始的MLE算法定位性能差异较大,再次验证了MLE收敛程度与定位精度严重依赖于初值。在整个距离因子范围内,所提算法(TDOA-AOA)在目标与中继节点位置估计方面始终保持最优性能,充分验证了引入单一站角度观测信息的优势。相比之下,未进行联合修正的所提算法定位性能显著降低,其主要原因在于该方法前两步未充分融合全部观测信息,且未对估计误差进行建模与修正。

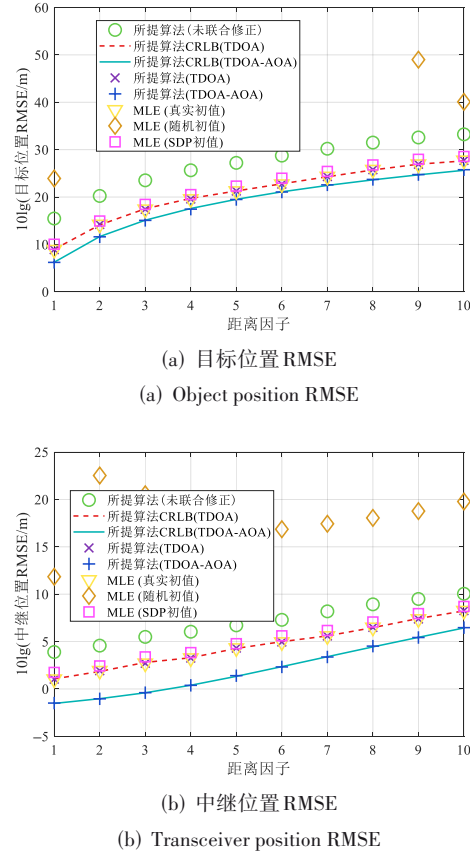


图6 定位性能随目标距离的变化情况

Figure 6 Localization performance with object range

5.6 SDP初始解秩特性分析

本节进一步验证SDP初始解的秩1特征,在不同噪声水平下进行10 000次蒙特卡罗仿真,统计SDP解满足rank-1条件的数量(以最大与次大特征值之比作为判据,当该比值大于预设阈值 10^5 时,认为SDP解为rank-1^[28,34])。仿真结果表明,在本文所考虑的噪声范围内,目标和中继的SDP解均具备显著rank-1特征(如表2所示)。

5.7 接收站大间距下的定位性能变化情况

在第5.1节至第5.6节的仿真实验中,接收站节点间距为公里量级,为进一步检验所提算法在接收站部署范围较广、接收站间距较大时的适用性(例如对机载雷达等辐射源进行定位,接收站间距为数十公里量级),这里进一步给出仿真实验。接收站、中继与目标位置均随机产生,具体坐标界限见表3。

接收站大间距下的定位性能变化仿真如图7所示,根据仿真结果可知,所提算法(TDOA-AOA)以及所提算法(TDOA)在给定测量噪声范围内仍可实现各自对应的CRLB。相比第5.1节,本节的位置估计均方误差有所上升,这主要是因为观测几何条件随部署

表2 不同噪声水平下中继与目标SDP解rank-1数量
Table 2 Number of rank-1 solutions for the transceiver and object under different noise levels

噪声水平($10\lg(\sigma_a)$)	中继SDP解秩1的数量	目标SDP解秩1的数量
-60	10 000	10 000
-50	10 000	10 000
-40	10 000	10 000
-30	10 000	10 000
-20	10 000	10 000
-10	10 000	10 000
0	10 000	10 000
10	10 000	10 000

表3 坐标界限(接收站大间距) 单位:km
Table 3 Coordinate boundaries (wide-spaced receivers) unit: km

	坐标界限	X	Y	Z
接收站	上限	25	15	10
	下限	-25	-15	-10
未知中继	上限	50	50	50
	下限	-50	-50	-50
未知目标	上限	80	80	80
	下限	-80	-80	-80

尺度发生变化,但总体定位性能趋势与第5.1节至第5.5节结果一致。上述结果表明,在接收站分布范围较广的情况下,所提算法仍具有良好的适用性。

5.8 执行时间对比

本节对不同算法的平均执行时间进行对比,仿真平台与环境为MATLAB R2022b、Intel i7-13620H(主频2.4 GHz)。根据表4可知,使用真实初值和随机初值的MLE算法计算效率较高,主要是因为高斯牛顿迭代求解利用了最小二乘闭式解,但其定位精度与收敛程度严重依赖于初始值。MLE(SDP初值)算法整体执行时间与所提算法相对接近。所提算法平均执行时间较长,这主要是因为CVX工具箱需将原始问题转换为标准形式以适配求解器,若通过专门设计代码解算,可显著提升计算效率^[34]。

综合第5.1节至第5.8节可得,所提算法无须先验初始值便可实现目标与中继高精度联合定位,且能够有效规避局部收敛问题,并在一定程度上兼顾计算效率,具有较高的理论价值和应用价值。

6 结论

本文针对未知中继辅助的无源定位问题开展研究,基于SDR提出一种联合定位算法。与现有中继辅助的定位研究不同(现有方法需多时刻TOA观测),所提算法利用构建的两组瞬时TDOA与TDOA-

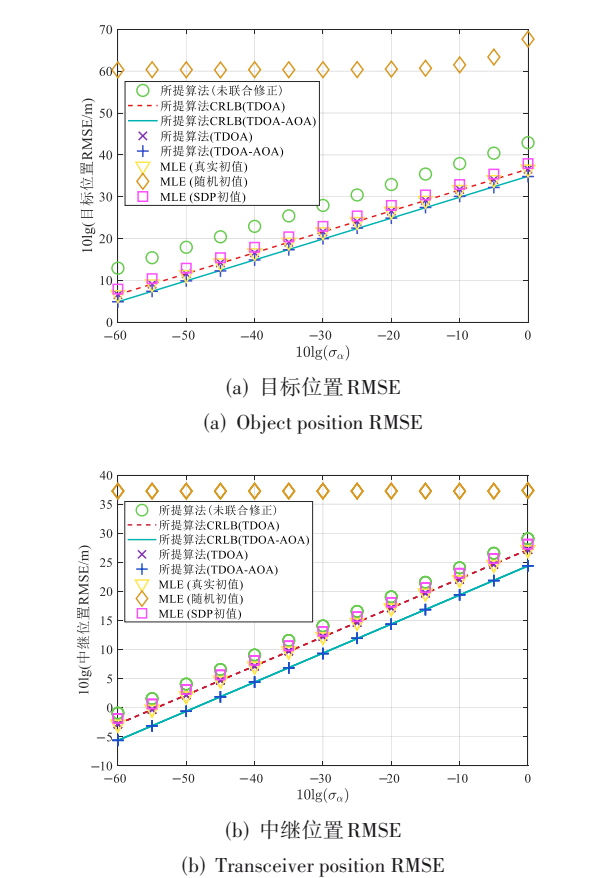


图7 接收站大间距下的定位性能变化情况
Figure 7 Localization performance with wide-spaced receivers

表4 不同算法平均执行时间 单位:s
Table 4 Average CPU run times of different algorithms unit: s

算法名称	平均执行时间
所提算法(TDOA)	0.232 6
所提算法(TDOA-AOA)	0.246 0
MLE(真实初值)	0.009 0
MLE(随机初值)	0.009 2
MLE(SDP初值)	0.262 2

AOA观测模型分别实现中继与目标联合定位。理论分析表明所提算法在适度的测量噪声/误差条件下可实现CRLB性能,仿真实验进一步证明了所有算法的有效性与优越性,同时表明引入单站角度观测信息可显著提升联合定位精度,为远距离目标无源定位提供了重要的理论技术基础。

需要指出的是,本文工作主要聚焦单目标定位问题,未能考虑相关多目标定位问题。后续工作将重点围绕相关多目标下的高精度数据关联与联合定位问题开展研究,以进一步完善中继辅助的无源定位理论框架。此外,结合频域信息对运动目标定位和中继分辨识别等问题同样将作为后续研究重点。

参考文献

- [1] 杨静, 刘成城, 黄洁, 等. 联合时延-多普勒-角度的无源雷达目标定位凸优化算法[J]. 电子学报, 2024, 52(6): 2091-2102.
Yang Jing, Liu Chengcheng, Huang Jie, et al. Convex solution for target localization in passive MIMO radar using delay, Doppler and angle measurements[J]. Acta Electronica Sinica, 2024, 52(6): 2091-2102. (in Chinese)
- [2] 王鼎, 尹洁昕, 郑娜娥, 等. 收发未精确同步条件下非相关多运动辐射源 TOAs/FOAs 协同定位方法[J]. 电子学报, 2024, 52(2): 550-563.
Wang Ding, Yin Jiexin, Zheng Nae, et al. TOAs/FOAs cooperative localization method for multiple disjoint moving emitters in presence of imperfect synchronization between receivers and transmitters[J]. Acta Electronica Sinica, 2024, 52(2): 550-563. (in Chinese)
- [3] 孙霆, 王威, 高婧洁, 等. 传感器运动效应下水声信号传播速度未知的 TOA/TOA-AOA 水下无源定位方法[J]. 电子学报, 2025, 53(2): 409-419.
Sun Ting, Wang Wei, Gao Jingjie, et al. TOA/TOA-AOA passive localization methods in the presence of the sensor motion effect and unknown underwater acoustic signal propagation speed[J]. Acta Electronica Sinica, 2025, 53(2): 409-419. (in Chinese)
- [4] Jia Tianyi, Liu Hongwei, Ho K C, et al. Mitigating sensor motion effect for AOA and AOA-TOA localizations in underwater environments[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2023, 22(9): 6124-6139.
- [5] Yu Quanzhou, Wang Yongqing, Shen Yuyao. Robust distributed cooperative localization in wireless sensor networks with a mismatched measurement model[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2024, 72: 4525-4540.
- [6] Tian Chenglong, Liu Hankai, Shen Xiao, et al. A synthetic aperture scheme for integrated localization and navigation in passive IoT[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2024, 23(12): 18271-18285.
- [7] Sun Yimao, Ho K C, Yang Yanbing, et al. Computationally attractive and statistically efficient estimator for noise resilient TOA localization[J]. Signal Processing, 2022, 200: 108663.
- [8] Zhang Ziqiang, Wang Ding, Yang Bin, et al. Weighted multidimensional scaling localization method with bias reduction based on TOA[J]. IEEE Sensors Journal, 2023, 23(17): 19803-19814.
- [9] Chan Y T, Ho K C. A simple and efficient estimator for hyperbolic location[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(8): 1905-1915.
- [10] Sun Ming, Ho K C. An asymptotically efficient estimator for TDOA and FDOA positioning of multiple disjoint sources in the presence of sensor location uncertainties[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(7): 3434-3440.
- [11] 孙霆, 王威, 陈鹏, 等. 未知信号传播速度下存在时钟同步和传感器误差的多基地定位算法[J]. 电子学报, 2023, 51(8): 2124-2133.
Sun Ting, Wang Wei, Chen Peng, et al. Multistatic localization algorithm under unknown signal propagation speed scenario with clock synchronization and sensor position errors[J]. Acta Electronica Sinica, 2023, 51(8): 2124-2133. (in Chinese).
- [12] Yu Zehua, Li Jun, Guo Qinghua, et al. Message passing based robust target localization in distributed MIMO radars in the presence of outliers[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2020, 27: 2168-2172.
- [13] Zhou Sipu, Wang Gang, Ho K C. Bias-reduced closed-form method for 3-D moving object localization by AOA using sensors at known and unknown positions[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2024, 23(12): 19553-19569.
- [14] Mao Zhi, Su Hongtao, Song Jiangke, et al. Joint target and transmitter localization with AOA and DTD using passive sensors[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2024, 31: 1570-1574.
- [15] Ho K C, Xu Wenwei. An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(9): 2453-2463.
- [16] Wang Gang, Li Youming, Ansari N. A semidefinite relaxation method for source localization using TDOA and FDOA measurements[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2013, 62(2): 853-862.
- [17] Jia Tianyi, Wang Haiyan, Wang Gang, et al. Localization using time-delay and Dopple shift by moving monostatic sensors[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2022, 58(3): 2560-2567.
- [18] Sun Ting, Wang Wei. Efficient multistatic radar localization algorithms for a uniformly accelerated moving object with sensor parameter errors[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2023, 59(6): 7559-7574.
- [19] Kay S M. Fundamentals of statistical signal processing: Estimation theory[M]. Englewood Cliffs: PTR Prentice-Hall, 1993.

- [20] Yin Yongtai, Wang Yuebian, Dai Tiantian, et al. DOA estimation based on smoothed sparse reconstruction with time-modulated linear arrays[J]. *Signal Processing*, 2024, 214: 109229.
- [21] Wang Hongyong, Chen Xiaolong, Deng Weibo, et al. High-accuracy DOA estimation for non-collinear sparse uniform array[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2025, 32: 206-210.
- [22] Esfandiari M, Vorobyov S A. Generalized framework to subspace-based DOA estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2025, 73: 3872-3885.
- [23] 孙奕髦, 徐屹淮, 唐北川, 等. 近远场统一定位模型: 基于子空间的方法与局限性分析[J]. *电子学报*, 2023, 51(8): 2134-2143.
- Sun Yimao, Xu Yihuai, Tang Beichuan, et al. Unified model for near and far field localization: Subspace-based solution and limitations analysis[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2023, 51(8): 2134-2143. (in Chinese)
- [24] Sun Yimao, Ho K C, Xing Tianyi, et al. Projection-based algorithm and performance analysis for TDOA localization in MPR[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2024, 72: 896-911.
- [25] Wymeersch H, He Jiguang, Denis B, et al. Radio localization and mapping with reconfigurable intelligent surfaces: Challenges, opportunities, and research directions[J]. *IEEE Vehicular Technology Magazine*, 2020, 15(4): 52-61.
- [26] Zhang Jingwen, Zheng Zhong, Fei Zesong, et al. RIS-assisted multi-user localization in UAV-enabled mmWave wireless networks[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2025, 74(3): 5069-5084.
- [27] Ho K C. Localization through transceivers in unknown constant velocity trajectories[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, 70: 3011-3028.
- [28] Pei Jian, Wang Gang, Ho K C, et al. Moving transceivers aided localization of a far-field object[J]. *IEEE Transactions on Mobile Computing*, 2024, 23(12): 12795-12810.
- [29] Lin Danyan, Wang Gang, Ho K C. Transceiver-aided localization by hybrid time delay and angle measurements in direct-LOS absent environments[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2026, 25: 1467-1483.
- [30] Kramer G, Gastpar M, Gupta P. Cooperative strategies and capacity theorems for relay networks[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(9): 3037-3063.
- [31] Laneman J N, Tse D N C, Wornell G W. Cooperative diversity in wireless networks: Efficient protocols and outage behavior[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(12): 3062-3080.
- [32] Zhao Yujie, Peng Tao, Guo Yichen, et al. Minimization of resource consumption with URLLC constraints for relay-assisted IIoT[J]. *Sensors*, 2025, 25(15): 4846.
- [33] Cheng Jing, Shen Chao. Relay-assisted uplink transmission design of URLLC packets[J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2022, 9(19): 18839-18853.
- [34] Wu Wenjun, Wang Gang, Ho K C. Multistatic localization by differential time delays and time differences of arrival in the absence of transmitter position[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, 59(5): 7020-7034.
- [35] Zhou Yao, Li Wanchun, Gao Lin, et al. Passive MIMO-radar-based target localization with unknown illuminators position[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2024, 24(7): 10680-10690.
- [36] Bharadwaj S, Mehta N B. Accurate performance analysis of single and opportunistic AF relay cooperation with imperfect cascaded channel estimates[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, 61(5): 1764-1775.
- [37] Zakir S, Al Seragi E M, Ahmad W, et al. Self-identifying amplify-and-forward relay for localization assistance[J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2025, 73(9): 6809-6824.
- [38] Li Ziyang, Fu Xiongjun, Dong Jian, et al. Radar signal sorting via graph convolutional network and semi-supervised learning[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2025, 32: 421-425.
- [39] Zhang Jie, Yao Zhisheng, Yang Zijiang, et al. Self-supervised radio frequency fingerprint identification via time-frequency contrastive learning and CutMix regularization[J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2026, 13(5): 9682-9694.
- [40] Wang Yue, Ho K C. An asymptotically efficient estimator in closed-form for 3-D AOA localization using a sensor network[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2015, 14(12): 6524-6535.
- [41] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 1-59.
- Zhang Xianda. *Matrix analysis and applications*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 1-59. (in Chinese)

作者简介



张 烁 女,2003年2月出生于河南省开封市。现为长安大学信息工程学院博士研究生。主要研究方向为目标定位。
E-mail: shuo_zh@chd.edu.cn



尉泽华 男,1994年6月出生于山西省运城市。现为西安电子科技大学电子工程学院副教授、硕士生导师。主要研究方向为分布式雷达探测与图模型推理。
E-mail: yuzehua@xidian.edu.cn



孙 霆 男,1994年1月出生于山西省汾阳市。现为长安大学信息工程学院副教授、硕士生导师。主要研究方向为无源定位与多基地定位。
E-mail: suntng123aa@126.com



董阳阳 男,1991年5月出生于安徽省蚌埠市。现为西安电子科技大学电子工程学院副教授、博士生导师。主要研究方向为阵列信号处理与雷达对抗。中国电子学会会员编号: E190025520M。
E-mail: dongyangyang2104@126.com



王 威 男,1981年9月出生于湖北省荆门市。现为长安大学信息工程学院教授、博士生导师。主要研究方向为车联网定位导航技术与通信感知一体化。
E-mail: wei.wang@chd.edu.cn



董春曦 男,1970年12月出生于河南省三门峡市。现为西安电子科技大学电子工程学院教授、博士生导师。主要研究方向为电子对抗技术与电子侦察信号处理、电子战系统设计、成像雷达干扰等。中国电子学会会员编号: E190183886M。
E-mail: chxdong@mail.xidian.edu.cn