

应用分形几何与混沌理论进行植物形态建模

陶 凌¹, 陈安庆¹, 邓贞宙¹, 韩春雷^{1,2}, 王玉峰¹, 王 平¹

(1. 南昌大学信息工程学院, 江西南昌 330031; 2. 芬兰国家PET中心 图尔库大学中心医院, 图尔库 20520)

摘要: 自然界植物形态的描述是近现代的一个热门话题. 若以图片的形式去保存一副植物图形的信息, 图形的精细程度取决于图片的存储格式和占用空间的大小, 且难以实现对图形进行整体上的改动. 用计算机语言对植物形态建模可仅用几十个数值计算并得出植物图形, 并且可以很简单的对整体图形进行修改. 植物形态建模领域中, 分形几何可利用图形的自相似性更好地描绘自然界植物形态, 与分形几何同为非线性领域的混沌理论在自然界事物描述中同样占有着重要地位. 为了提升事物绘制的精细程度和生动性, 该文章提出一种基于分形几何与混沌理论的植物形态建模算法. 在分形几何运算时利用非线性科学中的混沌的不确定性, 设定进入周期轨道的概率并根据概率随机进入周期轨道进行运算. 通过绘制一颗基本树图形并通过调整参数实现形态的改变以验证算法的可行性, 实验结果表明, 本算法绘制的植物形态图形接近自然中的真实事物图形, 适用于描述自然界事物图形.

关键词: 分形几何; 非线性; 混沌理论; 不确定性; 植物形态建模

中图分类号: TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2021)09-1776-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20200041

Plant Morphological Modeling Using Fractal Geometry and Chaos Theory

TAO Ling¹, CHEN An-qing¹, DENG Zhen-zhou¹, HAN Chun-lei^{1,2}, WANG Yu-hao¹, WANG Ping¹

(1. School of Information Engineering, Nanchang University, Nanchang, Jiangxi 330000, China;

2. Turku PET Center, Turku University Hospital, Turku 20520, Finland)

Abstract: The description of plants appearance in nature is a hot topic in modern times. If save a plant graphics information in the form of a picture, the fineness of graphics depends on the storage format of the image and the amount of space it takes up. And it's very difficult to realize the change to the graphics as a whole. By utilizing the computer language to model plant morphology can calculate and get plant graphics with only dozens of numerical, and it is easy to modify the whole graph. In the field of plant appearance modeling, fractal geometry can use the self-similarity of graphs to describe the natural appearance of plants better. Chaos theory, which is nonlinear as same as fractal geometry, also plays an important role in the description of natural objects. To improve the precision of object rendering, this paper proposed a plant morphology modeling algorithm based on theory of the fractal geometry and chaos. The uncertainty of chaos is utilized to the operation of fractal geometry. The probabilities of entering a periodic orbit are set. And then the system does the calculations based on the periodic orbitals that come in. A basic tree graph is drawn by this algorithm, and the thickness of tree trunk, the height of branch and density of tree are adjusted by adjusting the parameters in the affine transformation matrix, which verifies the feasibility of the algorithm. The experimental results demonstrated that the graph of plant drawn by this algorithm is close to the real object in nature and the algorithm is suitable for describing the object in nature.

Key words: fractal geometry; nonlinearity; chaos theory; indeterminacy; plant morphological

1 引言

近现代,在许多科学家研究自然界中的物体的几

何图形时,发现只通过欧几里得几何学中的线条对自然界图形进行描述十分困难,因为自然界中的物体通

收稿日期:2019-12-30;修回日期:2021-04-10;责任编辑:梅志强

基金项目:科技部03专项(No.20193ABC03A040);国家自然科学基金青年项目(No.61501197);江西省创新创业高层次人才“千人计划”创新人才长期项目(No.S2018LQCQ0554);澳门青年学者(No.AM201921);广东省微纳光子功能材料与器件重点实验室(No.91180198)

常是不规则的,如山脉、河流、树木、云层等自然景象,通过简单的线性方程对这些物体的描述能力具有一定局限性^[1]. 20世纪50年代以前,物理学研究主要停留在较为简单的线性系统^[2]. 而客观世界绝大部分现象都是不确定的,精确性描述客观世界的现象会带来种种难以解释的困惑. 在1903年,法国数学家庞加莱指出动力学系统和拓扑系统可能存在混沌特性^[3],像混沌系统这样的非线性系统开始走入科学界视野. 20世纪70年代,社会学研究中破窗效应以及大气学蝴蝶效应等非线性现象公布于世^[4]. 随着各学科领域的非线性现象的发现,在这一时期,美籍数学家本华·曼德博首先提出了分形几何学^[5],分形理论(Fractal Theory)就此诞生. 分形理论通过利用自然界物体的自相似性以及数学运算递归中的生成原则而拥有强大的自然界物体描述能力^[6].

在混沌理论思想的启发下,本文提出了一种基于分形几何与混沌理论的植物形态学建模方法,可以更好地完成非严格自相似性物体的描绘,生成的图形更加接近自然界物体. 本文算法在利用分形几何理论的基础上打破原有的确定性思想的束缚,保证了以点作图表达能力强大特性的同时,又保留线性方程绘图可塑性强、模型鲁棒性强的特点. 文章首先讲述分形几何和混沌理论的特性,提出一种对仿射矩阵的处理方法以及概率的确定方法. 而后讨论利用分形几何与混沌理论进行植物形态学建模的过程,最后进行一系列数值实验验证本文方法的有效性.

2 方法

2.1 分形几何

分形几何或分形理论研究的对象是那些很不规则而有自相似性的形状^[7]. 分形几何指的是事物的形态在部分与整体之间存在着相似的关系,在任意小的尺寸上也保留有整体的形状特性,最为经典的分形几何图形为 Koch 曲线^[8]. 该曲线为在一单位线段,取其两个三等分点,以此为新的起点作两条等长线段,相交于一点,经过多次对自身的迭代,可由简单的初始图形得到复杂的目标图形,形成 Koch 曲线. 此迭代过程可充分体现分形几何的自相似性和迭代生成原则. 在分形几何领域,以表达植物形态见长的 L 系统也是基本相同的思想^[9].

2.2 混沌理论

自然界存在着三种基本运动状态:确定性运动状态、随机性运动状态和混沌状态. 所有的系统都在不断地运动与变化,系统的运动形态里包括有序和无序运动,有序又包括简单有序运动和混沌这两种类型,区别于简单有序的确定性(精确周期性)和无序的混乱,混

沌没有严格的周期但具备丰富的有序状态^[10]. 混沌现象并不是由随机性外因引起的,而是由确定性方程(内因)直接得到的具有随机性的运动状态^[11].

混沌系统是确定性系统下发生的貌似不规则运动,在确定系统下却表现出不可重复、不可预测的特性^[12]. 混沌使运动路径发生模糊,在局部上变得不稳定而整体上很稳定. 混沌具有的初值敏感性是混沌系统所具有的基本特征^[13],其对初始条件有高度的依赖性而难以对系统状态进行长期预测^[14].

2.3 应用分形几何和混沌理论进行植物形态学建模

像 Koch 曲线这种基本的分形方法仍有一些缺陷,能描述的物体需要过强的自相似性. 因此本文算法引入混沌理论加以增强,以表现更加复杂的植物图形. 自混沌在20世纪初被提出到80年代,混沌研究迎来热潮,大量混沌现象被发现. 但人们仍无法控制和运用混沌现象. 直到1990年, Ott E, Grelogi C 和 Yorke J A 提出 OGY 控制法^[15],该方法是第一个能有效控制混沌的方法. 即便历经近30年到了现在,该方法仍占据着重要地位,该方法主要操作是找到一个满足要求的周期轨道,当有数值进入轨道时就使数值向轨道吸引. 基于该理念,可建立不同的数学模型完成对混沌系统的控制,对许多领域有一定的作用^[16, 17]. 本文算法也吸取了 OGY 控制法的理念,并通过建立数学方程来对混沌进行控制,相比于其他方法,本文方法更适于完成对外观形态上具有自相似性的植物图形的绘制.

本文算法运用分形几何中的自相似性以及迭代生成原则,对原本的确定性方程加入随机成分,进行多次迭代运算,在迭代过程中,即使初值有微小的改变,微小的变化累积导致结果也发生较大改变. 迭代系统需要确保稳定,而吸引点的存在,使系统状态向某一点靠近,保证混沌的可控制性.

先举例如何用迭代函数系统绘制一根曲线,定义矩阵 E (E 是行为 2, 列为 3 的矩阵,即 2×3 矩阵) 作为周期轨道参数. 定义矩阵 B (B 为 $2 \times N$ 矩阵, N 为迭代次数) 存储坐标数据,令 B 第 j 列第 1 行为 x_j , j 列第 2 行元素为 y_j , 则:

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j \times E(1, 1) + y_j \times E(1, 2) + E(1, 3) \\ y_{j+1} = x_j \times E(2, 1) + y_j \times E(2, 2) + E(2, 3) \end{cases} \quad (1)$$

矩阵 E 的 $E(1, 1)$ 和 $E(1, 2)$ 控制横坐标 x_{j+1} 在迭代运算中根据上一组坐标 (x_j, y_j) 进行计算, $E(1, 1)$ 和 $E(1, 2)$ 绝对值越大,则迭代运算中下一个值 x_{j+1} 根据上一个值计算结果变化范围越大. $E(1, 3)$ 作为固定偏移,大于 0 向右偏移,小于 0 向左偏移. 同理,可由类似运算得出 y_{j+1} .

为使系统稳定,则 (x_j, y_j) 坐标数值必须均为有限大小. 首先讨论特殊情况,当式(1)中 $E(1, 2)$ 和 $E(2, 1)$

等于0. 则有

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j \times E(1, 1) + E(1, 3) \\ y_{j+1} = y_j \times E(2, 2) + E(2, 3) \end{cases} \quad (2)$$

横(纵)坐标数列值是关于自身的迭代. 假定数列 $\{x_j\}$ 和 $\{y_j\}$ 存在极限, 即当 j 趋于无穷则有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{j+1} = x_j, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} y_{j+1} = y_j \quad (3)$$

可得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \frac{E(1, 3)}{1 - E(1, 1)}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} y_j = \frac{E(2, 3)}{1 - E(2, 2)} \quad (4)$$

$\lim_{j \rightarrow \infty} (x_j, y_j)$ 最终位置与其较远之前的位置无关. 由此可见, 形如式(2)所确定的关系拥有将坐标点向极值点吸引的能力. 接下来讨论矩阵 E 中的数值需要满足什么条件才使极限存在. 式(2)拥有 $g_{n+1} = a \cdot g_n + b$ 形式. 当 g_0 确定后,

$$g_1 = a g_0 + b \quad (5)$$

$$g_2 = a^2 g_0 + ab + b \quad (6)$$

$$g_3 = a^3 g_0 + a^2 b + ab + b \quad (7)$$

$$g_n = a^n g_0 + b(1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1})$$

$$= a^n g_0 + b \left(\frac{1 - a^n}{1 - a} \right) \quad (8)$$

若数列 g_n 收敛, 应有 $|a| < 1$, 即 $E(1, 1)$ 与 $E(2, 2)$ 绝对值均小于1. 当 $b=0$, 即 $E(1, 3)$ 或 $E(2, 3)$ 等于0, 有数列 g_n 收敛为0, 对应的为坐标位置收敛至纵或横坐标轴上.

类似的, 当式(1)中 $E(1, 1)$ 和 $E(2, 2)$ 等于0. 则有

$$\begin{cases} x_{j+1} = y_j \times E(1, 2) + E(1, 3) \\ y_{j+1} = x_j \times E(2, 1) + E(2, 3) \end{cases} \quad (9)$$

同理可递推出

$$\begin{aligned} g_n &= a^{2(n-1)} g_0 + b(1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{2n-3}) \\ &= a^{2(n-1)} g_0 + b \left(\frac{1 - a^{2n-2}}{1 - a} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (x_j, y_j) = \left(\frac{E(1, 3)}{1 - E(1, 2)}, \frac{E(2, 3)}{1 - E(2, 1)} \right) \quad (11)$$

若数列 g_n 收敛, 应有 $|a| < 1$, 即 $E(1, 2)$ 与 $E(2, 1)$ 绝对值均小于1.

对于一般情况, 即矩阵 E 中元素非上述两种特殊情况的位置为0时, 应同时满足上述情况系统收敛所需满足的要求, 否则迭代系统必定不收敛.

在绘制一根直线时, 当上一个点与下一个点的位置关系的都固定不变时, 以每对 x_{j+1}, y_{j+1} 为一组坐标参数, 得到的结果如图1(a)所示.

在混沌状态下由吸引点控制的直线中, 直线两端点各为一个吸引点, 下一个点随机向某一个端点靠近, 得到图1(b)的直线图形. 一般的确定性方程所能表达的数据形式极为有限, 难以满足绘制较复杂不规则图

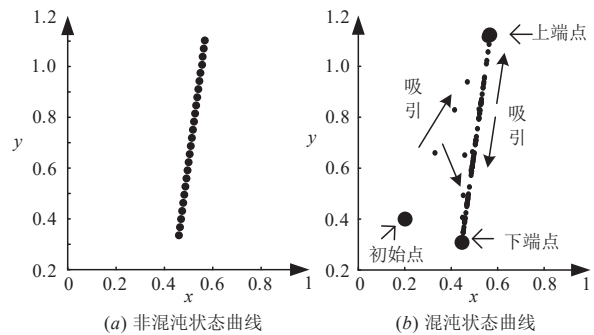


图1 不同状态直线

形的需求, 是不适合去绘制自然界图形的, 而通过建立多个周期轨道加上随机可以拥有更合适的描述能力.

下面建立数个周期轨道, 利用随机数来选定周期轨道. 迭代递归可保证分形几何图像的自相似性以绘制较复杂的植物图形, 算法流程如图2所示.

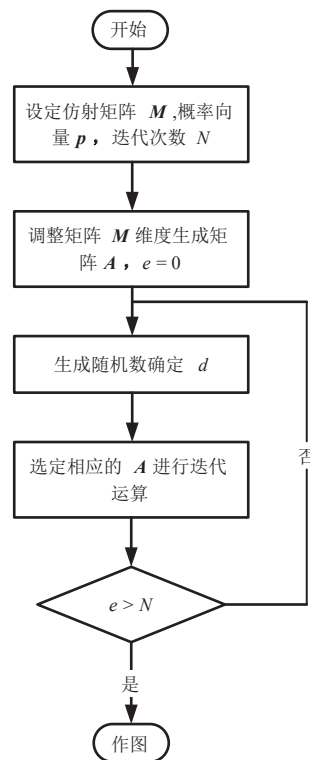


图2 植物形态建模流程图

首先生成仿射变换系数矩阵 M (矩阵 M 为 n 行 6 列, 行数 n 即图像由 n 个部分组成), a_{ij} 为矩阵 M 中第 i 行, 第 j 列的元素, i 和 j 为整数, 取值范围分别为 $[1, n]$ 和 $[1, 6]$. 矩阵 M 相当于一棵树的基因, 对于自然界的树而言, 基因的不同就会导致外观和功能的差异, 本文也遵循此原则. 改变 M 的值会对运行结果产生影响, 仿射变换系数矩阵 M 如下:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{16} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n6} \end{bmatrix} \quad (12)$$

定义 $2 \times 3 \times n$ 的三维矩阵 A , 重新调整矩阵 M , 将 M 矩阵的每一行转换成二行三列的矩阵, 如 $A^{[1]}$ 为 M 第一行元素的转换:

$$M_1 = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6] \quad (13)$$

$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_2 & a_4 & a_6 \end{bmatrix} \quad (14)$$

分别赋予落入每一组周期轨道 $A^{[i]}$ 的概率为 p_i, p_i 组成的概率矩阵 p 对图形的绘制也有重要影响. 落入控制相应部位的周期轨道概率越大, 则该部分运行次数越多, 该部分图像点的密度则越大; 反之, 次数少则图像点密度小.

$$p = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n] \quad (15)$$

p 中所有元素和为 1, 因为 p 中的元素值将作为一部分算式执行的概率.

$$s_k = \sum_{i=1}^k p_i, \quad k \in (1 \ 2 \ \cdots \ n) \quad (16)$$

$$s = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 + p_2 \\ p_1 + \cdots + p_3 \\ \vdots \\ p_1 + \cdots + p_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

设定次数 N , 混沌和分形几何可通过对非线性方程进行无限次数的迭代运算产生^[18]. 迭代产生大量数据. 迭代次数愈多得到的数据越多, 图像愈加清晰, 同时初值敏感性表现得越明显. 为了保证图像的清晰, 并使程序运行时间在合理范围内, 一般 N 在几十万这个数量级. 定义迭代矩阵 G (G 为 $2 \times N$ 矩阵), G 矩阵全部元素初值为 0, 其中每行的第一列和第二列作为一组坐标参数, 由此可以绘制出 N 个点.

$$G = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_N \end{bmatrix} \quad (18)$$

对 G 矩阵内容进行重新赋值: 定义正整数 d , 迭代 N 次搜寻 $[0, 1]$ 之间随机数值减去矩阵 s 所得结果中第一个小于零的数值所在位置, d 为其所在行数. 若取随机数为 r , 求得 d 为 k , 则有

$$s_{k-1} < r < s_k \quad (19)$$

则 r 区间大小为

$$\Delta r = s_k - s_{k-1} \quad (20)$$

通过下面图 3 能够发现, 每个位置的概率为 p 矩阵中对应元素的值.

接下来对矩阵进行如下运算, 给 G 矩阵重新赋值, 计算迭代点和映射矩阵的乘积.

$$G_{j+1} = \begin{bmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \\ 1 \end{bmatrix} = A^{[d]} \times \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

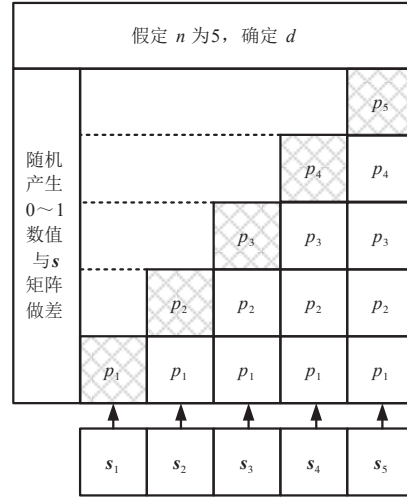


图 3 确定周期轨道方式

简单的线性方程和之所以表达能力有限, 主要在于方程在进行迭代运算时, 所能利用的数据过于单一, 规律性过强. 本文算法利用随机数来确定周期轨道, 使一个数据能被任意方程利用, 迭代产生的数据为非线性关系, 使得数据有更强的表达能力弥补单一线性方程绘制图形的不足.

3 结果

本文基于 PC 实验平台, 在配置为 Intel Core i7-8750H CPU@ 2.20 GHz 的 PC 机的 MATLAB 2018a 下设置并进行实验的.

使用本文算法绘制一棵基本树图形. 一棵树的结构主要分为树干和树冠, 这里将树划分五个部分, 分别为树主干左半部分和右半部分、中间树冠和左右侧枝, 五个部分分别对应五组数值作为周期轨道来调控其位置. 本次实验选取的周期轨道及仿射矩阵数值如表 1 所示.

由式(12)~(14)、(21)知, 矩阵 M 第 1、3、5 列可控制对应作用部位横坐标变化, 第 2、4、6 列控制纵坐标变

表 1 基本树仿射矩阵数值

	a_{ij}						p_i	作用部位
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$		
$i=1$	-0.64	0	0	0.50	0.86	-0.25	0.05	中间
$i=2$	-0.04	-0.47	0.07	-0.02	0.49	0.51	0.50	左干
$i=3$	0.20	0.33	-0.49	0.43	0.44	0.25	0.15	左枝
$i=4$	0.46	-0.25	0.41	0.36	0.25	0.57	0.15	右枝
$i=5$	-0.06	0.46	-0.07	-0.11	0.59	0.10	0.15	右干

化,数值增加则坐标值增加.本次仿射矩阵数值设定中 $A^{(1)}$ 控制中间部分树冠以及枝干的填充, $A^{(2)}$ 控制树主干的左半部分、 $A^{(3)}$ 控制树冠左侧枝、 $A^{(4)}$ 控制树冠右侧枝、 $A^{(5)}$ 控制树主干的右半部分.

对仿射变换矩阵的数值修改不能幅度过大,否则因混沌的初值敏感性使图像混乱,要避免映射矩阵系数数值绝对值超过1,否则会像幂函数一样,数据出现极端化(数值极大,正如 0.99^{100} 和 1.01^{100} 之间的差距是很大的). G 矩阵中的所有元素重新赋值后,接下来以每一列的第一行为横坐标、第二行为纵坐标,将所得结果绘制出来,如图4(a)所示.绘制结果接近一棵有两个侧枝的树(基本树图形),证明本文算法具有一定的可行性.本文算法利用分形几何的自相似性、混沌的随机性和不确定性通过迭代,用不到40个数值得到了十万计的数据并绘制出此图,每一个数字本身的意义相当于极大量数据的压缩.图4(a)中每一个枝都与整个树个体本身很相似,树从主干分为两个较大的侧枝,而几乎所有的树枝也都分为两个更小的分支.本算法将整体

拆分为部分,又利用整体表现部分,混沌处理成分使分形几何绘制的图像更接近真实物体图形.在横纵坐标均出现峰值的区域的图像会更加清晰.树主干区域,大量的横坐标在0.5左右,横坐标在0.5附近出两个现峰值,如图4(e)所示,分别代表树干的左右轮廓横坐标.纵坐标在0.28附近出现峰值,表示树干在纵坐标数值为0.28处出现点的聚集.

为了进一步证明每一部分 A 分别控制图像的一部分,并体现本算法对图像的有效调控能力,将矩阵 M 中一些数值进行了较小幅度的修改,实现对图像整体上的修改.将分别控制树干填充和树干左部分的 $M(1, 5)$ 、 $M(2, 5)$ 分别由0.86、0.49改为0.80、0.42,根据式(12)、(13)、(14)、(21)可知如此修改可将树干左部左移,中间填充右移,由此使树干加粗,结果如图4(b)所示.因树干左部数据在总体数据中占比为50%,对其横坐标修改后,结果的横坐标分布变化很明显,对比图4(e)和图4(f),横坐标两个峰值出现位置由0.5附近改为0.42和0.55附近,表明本文调试方法的可行性.

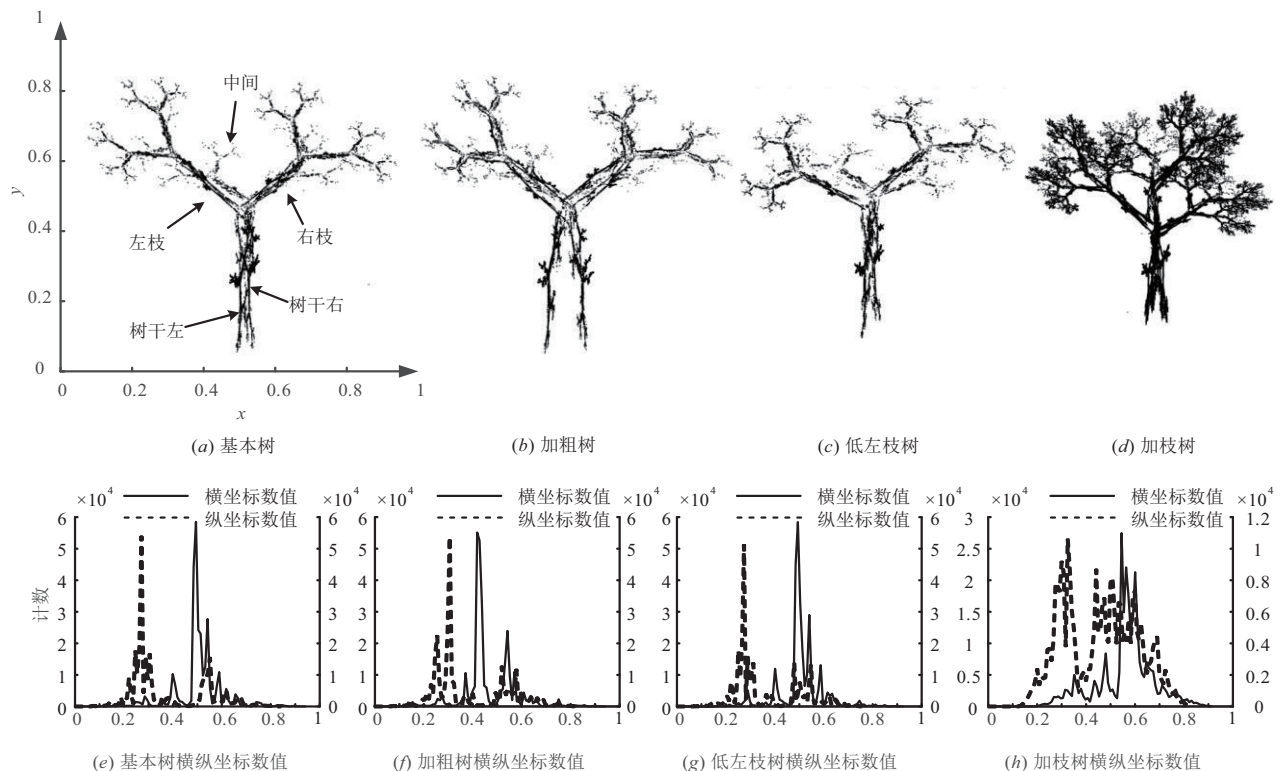


图4 树形态建模结果

将控制树冠左侧枝纵坐标的 $M(3, 4)$ 减小,由0.43改为0.25,左侧枝将向下移动,结果如图4(c)所示,左侧枝根部纵坐标由0.47变为0.43,因为偏移幅度较小且左侧枝在总体数据占比较小,为15%,纵坐标数值分布变化不明显,坐标数值统计结果见图4(g).

M 增加一组数据并对原参数进行适当修改,如表2所示,即可生成更加复杂的图形,结果如图4(d).即便只是增加了一组参数,但由于分形的特性,每一个部分都显示出整体的特性,因此有较大的变化.对比基本树图形,由于加枝树图形的点分布更加分散,所以横纵坐标分布也要分散一些,坐标数值统计结果见图4(h).通

过这组实验可见本文算法可较好的完成其他一些树木形态的建模.

表 2 加枝干的树的仿射矩阵数值

	a_{ij}						P_i	作用部位
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$		
$i=1$	-0.64	0	0	0.50	0.83	0.32	0.05	中间
$i=2$	-0.04	-0.47	0.07	-0.02	0.49	0.51	0.30	左干
$i=3$	0.25	0.33	-0.49	0.43	0.44	0.15	0.15	左枝
$i=4$	0.42	-0.25	0.41	0.26	0.24	0.45	0.20	右枝
$i=5$	-0.06	0.45	-0.07	-0.11	0.59	0.10	0.15	右干
$i=6$	0.30	-0.25	0.32	0.36	0.31	0.56	0.15	加枝

4 结束语

分形几何通过自相似和迭代可以只利用少量的数据就可以绘制较复杂的图形,本文将分形几何和混沌理论进行结合用于自然形态物体的描绘,混沌将随机和规律融合在一起,使确定路径偏移.混沌的加入使本文算法拥有超过一般分形几何算法的表达力,绘制出的图像精细程度明显提升,更适合表现自然界物体的形态.非线性系统的应用不仅仅局限于图形绘制,未来在图像重建等领域可能也会得到利用和发展^[19].

参考文献

- [1] 孙洪军, 赵丽红. 分形理论的产生及其应用[J]. 辽宁工学院学报, 2005, 25(2): 113 - 117.
Sun H J, Zhao L H. Creation and application of the fractal theory[J]. Journal of Liaoning Institute of Technology, 2005, 25(2): 113 - 117. (in Chinese)
- [2] 武际可. 近六十年力学发展的回顾[J]. 现代物理知识, 2017, 29(5): 24 - 30.
Wu J K. Review of the development of mechanics in the last sixty years[J]. Modern Physics, 2017, 29(5): 24 - 30. (in Chinese)
- [3] 刘玉颖, 金仲辉, 李顺焯. 谈谈混沌[J]. 物理与工程, 2018, 28(5): 59 - 62.
Liu Y Y, Jin Z H, Li S Y. Talk about chaos[J]. Physics and Engineering, 2018, 28(5): 59 - 62. (in Chinese)
- [4] 吴光铭. 破窗理论与蝴蝶效应[J]. 住宅与房地产, 2017, (7): 21 - 23.
Wu G M. Broken window theory and butterfly effect[J]. Residential and real estate, 2017, (7): 21 - 23. (in Chinese)
- [5] 郭冬梅, 孙兰凤, 李乃华, 等. 分形几何在计算机图形学中的应用[J]. 机械设计, 2001, 18(2): 28 - 31.
Guo D M, Sun L F, Li N H, et al. The application of fractal geometry in computer graphics[J]. Machine Design, 2001, 18(2): 28 - 31. (in Chinese)
- [6] 刘硕. 分形图形的代数语言系统研究[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2011.
Liu S. Fractal Graphic Algebra Language System Research [D]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2011. (in Chinese)
- [7] 李晋江, 张彩明, 范辉, 等. 基于分形的图像修复算法[J]. 电子学报, 2010, 38(10): 2430 - 2435.
Li J J, Zhang C M, Fan H, et al. Image inpainting algorithm based on fractal theory[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(10): 2430 - 2435. (in Chinese)
- [8] 刘庭凯, 陈月丹, 肖俊丽. 浅谈 Hausdorff 测度及维数[J]. 中国科教博览, 2004, (10): 43 - 47.
Liu T K, Chen Y D, Xiao J L. An easy approach to Hausdorff measure and dimension[J]. China science education extensive, 2004, (10): 43 - 47. (in Chinese)
- [9] 张树兵, 王建中. 基于 L 系统的植物建模方法改进[J]. 中国图象图形学报, 2002, 7(5): 457 - 460.
Zhang S B, Wang J Z. Improvement of plant structure modeling based on L-system[J]. Journal of Image and Graphics, 2002, 7(5): 457 - 460. (in Chinese)
- [10] 李松. 交通流混沌转化现象研究[D]. 天津: 天津大学, 2006.
LI Song. Study On The Transition of Chaos in the Traffic Flow[D]. Tian Jin: Tianjin University, 2006. (in Chinese)
- [11] 唐巍, 李殿璞, 陈学允. 混沌理论及其应用研究[J]. 电力系统自动化, 2000, 24(7): 67 - 70.
Tang W, Li D P, Chen X Y. Chaos theory and research on its applications[J]. Automation of Electric Power Systems, 2000, 24(7): 67 - 70. (in Chinese)
- [12] 廖君华, 姚振宇. 蝴蝶效应的数学模型——对一个混沌动力常数的诠释[J]. 数学学习与研究, 2016, (17): 143.
Liao J H, Yao Z Y. A mathematical model of the butterfly effect — interpretation of a chaotic dynamic constant [J]. Education for Chinese after-school, 2016, (17): 143. (in Chinese)
- [13] 陕振沛, 宁宝权, 张转周. 基于 MATLAB 的各类混沌系统的计算机仿真模拟研究[J]. 科技广场, 2015, (6): 6 - 11.
Shan Z P, Ning B Q, Zhang Z Z. Research on the computer simulation of various kinds of chaotic systems based on MATLAB[J]. Science Mosaic, 2015, (6): 6 - 11. (in Chinese)
- [14] 李作川, 张宇, 许芳, 等. 混沌滤波器对水声信号非线性动力学特性的影响[J]. 电子学报, 2011, 39(10): 2378 - 2381.
Li Z C, Zhang Y, Xu F, et al. Influence of chaotic IIR fil-

- ter on nonlinear dynamic characteristic of underwater acoustic signal[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(10): 2378 – 2381. (in Chinese)
- [15] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos[J]. Physical Review Letters, 1990, 64(11): 1196 – 1199.
- [16] 刘金刚, 沈柯, 周立伟. 脉冲法控制混沌的研究[J]. 长春光学精密机械学院学报, 1998, 21(2): 16 – 19.
Liu J G, Shen K, Zhou L W. Controlling chaos by pulse added on chaotic system[J]. Journal of Changchun Institute of Optics and Fine Mechanics, 1998, 21(2): 16 – 19. (in Chinese)
- [17] 罗晓曙, 王力虎, 蒋文蔚. 一种基于非线性微扰参数的自适应混沌控制方法[J]. 广西物理, 1999, (1): 7 – 10.
Luo X S, Wang L H, Jiang W W. An adaptive chaos control method based on nonlinear perturbation parameters [J]. Guangxi Physics, 1999, (1): 7 – 10. (in Chinese)
- [18] 姜秀丽. 混沌伪随机序列性能分析[J]. 科技资讯, 2017, 15(36): 15 – 16.
Jiang X L. Performance analysis of chaotic pseudo-random sequences[J]. Science & Technology Information, 2017, 15(36): 15 – 16. (in Chinese)
- [19] 邓贞宙, 段志文, 刘晶晶, 等. 基于一种新型扫描模式的不完全数据CT重建[J]. 核电子学与探测技术, 2011, 31(1): 53 – 57, 70.
Deng Z Z, Duan Z W, Liu J J, et al. Incomplete data CT image reconstruction based on a new scanning mode[J]. Nuclear Electronics & Detection Technology, 2011, 31(1): 53 – 57, 70. (in Chinese)

作者简介



陶 凌 女, 1965年3月生于江西南昌, 现为南昌大学信息工程学院教授, 主要研究方向为信号检测与处理.
E-mail: taoling@ncu.edu.cn.



韩春雷 男, 1962年7月生于辽宁辽阳, 现为南昌大学信息工程学院教授和芬兰国家PET中心教授, 主要研究方向为PET临床数据分析、氧15标记PET/CT、核医学成像.
E-mail: chunlei.han@tyks.fi.



陈安庆 男, 1999年11月生于江苏赣榆, 现为南昌大学信息工程学院本科生, 主要研究方向为闪烁脉冲信号处理.
E-mail: 6105118144@email.ncu.edu.cn



王玉壕 男, 1977年11月生于湖北, 现为南昌大学信息工程学院教授, 主要研究方向为智能感知、宽带无线通信与雷达联合系统、多载荷移动自组织网络以及信息融合方法等.
E-mail: wangyuhao@ncu.edu.cn.



邓贞宙 男, 1987年5月生于江西南昌, 现为南昌大学信息工程学院教授, 主要研究方向为PET探测器, 闪烁脉冲信号处理.
E-mail: zzdeng@ncu.edu.cn.



王 平(通信作者) 女, 1958年5月生于河南安阳, 现为南昌大学信息工程学院教授, 主要研究方向为信息与通信工程.
E-mail: wangping@ncu.edu.cn.