闭元确定的拓扑系统中闭包元及其应用

高　雅，吴洪博
（陕西师范大学数学与统计学院，陕西西安 710062）

摘　要： 本文利用余Frame和点集两部分建立由闭元确定的拓扑系统，对其基本性质进行了讨论；通过闭元给出了点集部分的闭包元概念，并对闭包元性质进行了讨论．在余Frame和点集部分之间利用双映射建立了闭包元算子，证明了与拓扑系统相关的Kuratovski闭包定理；作为应用，利用闭包元算子对闭元确定的拓扑系统之间的连续映射进行了等价刻画．

关键词： 拓扑系统；余Frame；闭元；闭包元；闭包算子；Kuratovski闭包定理；连续映射
中图分类号： O189.1；O153.1；O141.1　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 0372-2112(2022)05-1270-07
电子学报URL: http://www.ejournal.org.cn　　**DOI:** 10.12263/DZXB.20210332

Closure Elements in the Topological System Determined by Closed Elements with Applications

GAO Ya, WU Hong-bo
(*College of Mathematics and Statistics*, *Shaanxi Normal University*, *Xi'an*, *Shaanxi* 710062, *China*)

Abstract: A topological system determined by closed elements is established with coframe and point set, and its basic properties are discussed. The concept of closure element of point set part is given through closed element, and the properties of closure element are discussed. The closed element operator is established through double mapping between coframe and point set, and the Kuratovski closure theorem related to topological system is proved. As an application, the continuous mapping between topological systems determined by closed elements is characterized by closure element operators.

Key words: topological system; coframe; closed element; closure element; closure operator; Kuratovski's closure theorem; continuous mapping

1　引言

根据研究方法的不同，拓扑理论的研究分为两大学派：有点化学派和无点化学派[1~5]．王国俊教授在序结构基础上建立的模糊拓扑学和拓扑分子格理论是将两者融合的代表[6~8]．文献[9~12]结合一般拓扑学的研究方法对Locale理论的连通性质等进行了研究．1989年，Steven Vickers将Locale理论与一般拓扑理论结合为一体，在文献[13]中引进的一种新型的拓扑学研究对象：拓扑系统，并从格序理论方面对拓扑系统的性质和应用进行了讨论．目前，我国学者主要从点集拓扑理论方面对拓扑系统的性质及相关问题进行研究，并且取得了一些相关成果[14~24]．

从目前的研究结果看，拓扑系统中的闭集是通过拓扑系统空间化形式中的开集取补定义的[16~19]，因此其结果适用于空间式拓扑系统，但未必适用于一般的拓扑系统．因此，本文引入了拓扑系统的对偶拓扑系统—闭元确定的拓扑系统，并取得了一些相关的结果．

2　预备知识

定义1[1]　设P是集合，“$\leqslant$”是P上的二元关系．若$(P,\leqslant)$满足以下条件：

（1）$\forall a \in P, a \leqslant a$.

（2）$\forall a, b \in P$, 若$a \leqslant b, b \leqslant a$，则$a = b$.

（3）$\forall a, b, c \in P$, 若$a \leqslant b, b \leqslant c$，则$a \leqslant c$.

则称$(P,\leqslant)$是偏序集．

定义2[1]　余Frame A是一个满足以下条件的偏序集：

（1）$\forall S \subseteq_{\text{fin}} A$，$S$的上确界存在，即$\vee S$存在；

（2）$\forall S \subseteq A$，S的下确界存在，即$\wedge S$存在；

收稿日期：2021-03-10；修回日期：2021-05-15；责任编辑：覃怀银
基金项目：国家自然科学基金（No.61572016，No.11531009，No.61673250）

(3) 满足第二无限分配律，即，$\forall a \in A, \forall S \subseteq A$，有 $a \vee (\wedge S) = \wedge\{a \vee s: s \in S\}$.

注 1[1]　(1) 本文中 $S \subseteq_{\text{fin}} A$ 表示 S 是 A 中的有限子集；(2) 由于余 Frame 是满足第二无限分配律的完备格，将其中最大元记作 1，最小元记作 0.

定义 3[1]　设 A, B 是余 Frame. 若映射 $f: A \to B$ 满足以下条件：

(1) $\forall S \subseteq_{\text{fin}} A, f(\vee S) = \vee f(S)$;

(2) $\forall S \subseteq A, f(\wedge S) = \wedge f(S)$.

则称 $f: A \to B$ 是余 Frame 同态.

3　由闭元确定的拓扑系统及相关性质

定义 4　设 A 是余 Frame，X 是集合，$\models \subseteq X \times A$，将 $(x, a) \in \models$ 记作 $x \models a$. 若 $\forall x \in X$

(1) $\forall S \subseteq_{\text{fin}} A, x \models \vee S \Leftrightarrow \exists a \in S, x \models a$;

(2) $\forall S \subseteq A, x \models \wedge S \Leftrightarrow \forall a \in S, x \models a$.

则称 $(X, A, \models)$ 为闭元确定的拓扑系统，余 Frame$A$ 中的元素称为拓扑系统中的闭元.

在本文中，将闭元确定的拓扑系统 $(X, A, \models)$ 记为 D，将 X 记为 $\mathrm{Pt}D$，将 A 记为 ΩD.

引理 1　设 $D = (\mathrm{Pt}D, \Omega D, \models)$ 是闭元确定的拓扑系统，1，0 分别是 ΩD 的最大元和最小元. $\forall a, b \in \Omega D$，则：

(1) $\forall x \in \mathrm{Pt}D, x \models 1$;

(2) $\forall x \in \mathrm{Pt}D, x| \neq 0$;

(3) 若 $x \models a, a \leqslant b$，则 $x \models b$.

证明　根据定义 4 易证. 略.

定义 5　设 $D = (\mathrm{Pt}D, \Omega D, \models)$ 是闭元确定的拓扑系统. 定义映射 $\mathrm{ex}: \Omega D \to 2^{\mathrm{Pt}D}$ 如下：$\forall a \in \Omega D$

$$\mathrm{ex}(a) = \{x \in \mathrm{Pt}D, x \models a\}.$$

$\forall a \in \Omega D$，称 $\mathrm{ex}(a)$ 为 a 的余范围.

定理 1　设 $D = (\mathrm{Pt}D, \Omega D, \models)$ 是闭元确定的拓扑系统. 令 $\Omega(\mathrm{Pt}D) = \{\mathrm{ex}(a): a \in \Omega D\}$，则集族 $\Omega(\mathrm{Pt}D)$ 对有限并运算和任意交运算封闭，并且

(1) $\mathrm{ex}(0) = \varnothing, \mathrm{ex}(1) = \mathrm{Pt}D$;

(2) $\forall a, b \in \Omega D, \mathrm{ex}(a) \cup \mathrm{ex}(b) = \mathrm{ex}(a \vee b)$;

(3) $\forall S \subseteq \Omega D, \cap\{\mathrm{ex}(s): s \in S\} = \mathrm{ex}(\wedge S)$.

证明　(1) 由引理 1 可证. 略.

(2) $\forall x \in \mathrm{Pt}D$，结合定义 4，定义 5，

$x \in \mathrm{ex}(a) \cup \mathrm{ex}(b) \Leftrightarrow (x \in \mathrm{ex}(a)$ 或 $x \in \mathrm{ex}(b)) \Leftrightarrow$ $(x \models a$ 或 $x \models b) \Leftrightarrow x \models a \vee b \Leftrightarrow x \in \mathrm{ex}(a \vee b)$.

因此，$\forall a, b \in \Omega D, \mathrm{ex}(a) \cup \mathrm{ex}(b) = \mathrm{ex}(a \vee b)$.

(3) $\forall x \in \mathrm{Pt}D$，结合定义 4，定义 5，

$x \in \cap\{\mathrm{ex}(s): s \in S\} \Leftrightarrow (\forall s \in S, x \in \mathrm{ex}(s)) \Leftrightarrow$ $(\forall s \in S, x \models s) \Leftrightarrow x \models \wedge S \Leftrightarrow x \in \mathrm{ex}(\wedge S)$.

因此，$\forall S \subseteq \Omega D, \cap\{\mathrm{ex}(s): s \in S\} = \mathrm{ex}(\wedge S)$.

由于 ΩD 是完备格，因此，$a \vee b \in \Omega D, \wedge S \in \Omega D$. 结合(1)~(3)可知：集族 $\Omega(\mathrm{Pt}D)$ 对有限并运算和任意交运算封闭.

引理 2　在闭元确定的拓扑系统 $D = (\mathrm{Pt}D, \Omega D, \models)$ 中，映射 $\mathrm{ex}: \Omega D \to 2^{\mathrm{Pt}D}$ 是保序映射.

证明　由引理 1(3) 易证. 略.

4　闭元确定的拓扑系统中的闭包元及性质

定义 6　在闭元确定的拓扑系统 $D = (\mathrm{Pt}D, \Omega D, \models)$ 中，定义：$\overline{()}: 2^{\mathrm{Pt}D} \to \Omega D, \forall A \subseteq \mathrm{Pt}D$,

$$\overline{A} = \wedge\{a: a \in \Omega D, A \subseteq \mathrm{ex}(a)\}.$$

称该映射为拓扑系统 D 的闭包映射，并称 $\overline{A}$ 为集合 A 在拓扑系统 $D = (\mathrm{Pt}D, \Omega D, \models)$ 中的闭包元.

定理 2　在闭元确定的拓扑系统 $D = (\mathrm{Pt}D, \Omega D, \models)$ 中，闭包元有如下的性质：

(1) $\overline{\varnothing} = 0$;

(2) $\forall A \subseteq \mathrm{Pt}D, A \subseteq \mathrm{ex}(\overline{A})$;

(3) $\forall A, B \subseteq \mathrm{Pt}D, \overline{A} \vee \overline{B} = \overline{A \cup B}$;

(4) $\forall a \in \Omega D, \overline{\mathrm{ex}(a)} \leqslant a$;

(5) $\forall A \subseteq \mathrm{Pt}D, \overline{\mathrm{ex}(\overline{A})} = \overline{A}$;

(6) $\forall a \in \Omega D, \mathrm{ex}(\overline{\mathrm{ex}(a)}) = \mathrm{ex}(a)$.

证明　(1) $\overline{\varnothing} = \wedge\{a: a \in \Omega D, \varnothing \subseteq \mathrm{ex}(a)\} = \wedge \Omega \mathrm{D} = 0$.

(2) $\forall x \in \mathrm{Pt}D$，若 $x \notin \mathrm{ex}(\overline{A})$，即，

$$x \notin \mathrm{ex}(\wedge\{a: a \in \Omega D, A \subseteq \mathrm{ex}(a)\}).$$

因此，$x \not\models \wedge\{a: a \in \Omega D, A \subseteq \mathrm{ex}(a)\}$. 从而由定义 4(2)可知：$\exists a \in \Omega D$，使得 $A \subseteq \mathrm{ex}(a)$，且 $x \not\models a$.

因此有 $A \subseteq \mathrm{ex}(a)$，且 $x \notin \mathrm{ex}(a)$. 因此，$x \notin A$.

综上可知：$\forall A \subseteq \mathrm{Pt}D, A \subseteq \mathrm{ex}(\overline{A})$.

(3) 首先，由于 $A \subseteq A \cup B$，因此，

$\{a: a \in \Omega D, A \subseteq \mathrm{ex}(a)\} \supseteq \{a: a \in \Omega D, A \cup B \subseteq \mathrm{ex}(a)\}$. 因此，

$\wedge\{a: a \in \Omega D, A \subseteq \mathrm{ex}(a)\} \leqslant$

$\wedge\{a: a \in \Omega D, A \cup B \subseteq \mathrm{ex}(a)\}$. 因此，$\overline{A} \leqslant \overline{A \cup B}$；同理，$\overline{B} \leqslant \overline{A \cup B}$

因此，$\overline{A} \vee \overline{B} \leqslant \overline{A \cup B}$.

其次，由于 $\overline{A} \vee \overline{B} \geqslant \overline{A}$，$\overline{A} \vee \overline{B} \geqslant \overline{B}$，

结合引理 2 和定理 2(2)得：

$$\mathrm{ex}(\overline{A} \vee \overline{B}) \supseteq \mathrm{ex}(\overline{A}) \supseteq A, \mathrm{ex}(\overline{A} \vee \overline{B}) \supseteq \mathrm{ex}(\overline{B}) \supseteq B,$$

因此，$\mathrm{ex}(\overline{A} \vee \overline{B}) \supseteq A \cup B$，其中，

$$\overline{A} \vee \overline{B} \geqslant \wedge\{a: a \in \Omega D, A \cup B \subseteq \mathrm{ex}(a)\} = \overline{A \cup B}.$$

综合以上两方面得：$\overline{A} \vee \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

(4) $\forall a \in \Omega D$，因为 $a \in \{b: b \in \Omega D, \mathrm{ex}(a) \subseteq \mathrm{ex}(b)\}$，因此，$a \geqslant \wedge\{b: b \in \Omega D, \mathrm{ex}(a) \subseteq \mathrm{ex}(b)\} = \overline{\mathrm{ex}(a)}$.

(5) 首先，$\forall A \subseteq \mathrm{Pt}D, a \in \Omega D$.

则 $\mathrm{ex}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{ex}(a)$ 当且仅当 $\overline{A} \leqslant a$.

事实上，若 $\mathrm{ex}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{ex}(a)$，又由定理 2(2)得：

$A \subseteq \mathrm{ex}(\overline{A})$，因此，$A \subseteq \mathrm{ex}(a)$. 又根据定理2(3)可知闭包元是保序的，因此，结合定理2(4)得：$\overline{A} \leqslant \overline{\mathrm{ex}(a)} \leqslant a$.

反之，$\overline{A} \leqslant a$，由引理2，直接可得：$\mathrm{ex}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{ex}(a)$.因此，$\mathrm{ex}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{ex}(a)$当且仅当$\overline{A} \leqslant a$.

利用上面这个结论可得：$\forall A \subseteq \mathrm{Pt}D$，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{ex}(\overline{A})} &= \bigwedge\{a: a \in \Omega D, \mathrm{ex}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{ex}(a)\}\\ &= \bigwedge\{a: a \in \Omega D, \overline{A} \leqslant a\} = \overline{A}.\end{aligned}$$

(6) $\forall a \in \Omega D$，由定理2(2)得：$\mathrm{ex}(a) \subseteq \mathrm{ex}(\overline{\mathrm{ex}(a)})$；

又由定理2(4)和引理2得：$\mathrm{ex}(a) \supseteq \mathrm{ex}(\overline{\mathrm{ex}(a)})$.

所以，$\mathrm{ex}(\overline{\mathrm{ex}(a)}) = \mathrm{ex}(a)$.

注2　在闭元确定的拓扑系统$D = (\mathrm{Pt}D, \Omega D, \vDash)$中，关于闭包元有如下的结论：

(1) 从定理2(5)的证明中有：$\forall A \subseteq \mathrm{Pt}D$，若$\exists a \in \Omega D$使得$\mathrm{ex}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{ex}(a)$，则$\overline{A} \leqslant a$. 但一般而言，若$\exists a, b \in \Omega D$使得$\mathrm{ex}(b) \subseteq \mathrm{ex}(a)$，未必有$b \leqslant a$.

(2) $\forall a \in \Omega D$，由定理2(4)有：$\overline{\mathrm{ex}(a)} \leqslant a$. 但等号未必成立. 从而闭元未必是闭包元.

例1　设$\mathrm{Pt}D = \{x, y\}$，$\Omega D = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$，$\vDash = \{x, y\} \times 1$. 容易验证$D = (\mathrm{Pt}D, \Omega D, \vDash)$是闭元确定的拓扑系统. 在闭元确定的拓扑系统$D$中，容易计算：

$$\mathrm{ex}(\frac{1}{2}) = \mathrm{ex}(0) = \varnothing, \overline{\mathrm{ex}(\frac{1}{2})} = 0, \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} = \overline{\{x, y\}} = 1$$

(1) $\mathrm{ex}(\frac{1}{2}) \subseteq \mathrm{ex}(0)$，但$\frac{1}{2} \leqslant 0$不成立.

(2) $\overline{\mathrm{ex}(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$不成立.

(3) 由于$\overline{\varnothing} = 0$，因此，闭元$\frac{1}{2}$不是闭包元.

定理3　在闭元确定的拓扑系统$D = (\mathrm{Pt}D, \Omega D, \vDash)$中，$\left\{\overline{A} \,\middle|\, A \in 2^{\mathrm{Pt}D}\right\} = \left\{\overline{\mathrm{ex}(a)} \,\middle|\, a \in \Omega D\right\}$.

证明　由于$\forall a \in \Omega D$，$\mathrm{ex}(a) \in 2^{\mathrm{Pt}D}$. 所以，

$\left\{\overline{A} \,\middle|\, A \in 2^{\mathrm{Pt}D}\right\} \supseteq \left\{\overline{\mathrm{ex}(a)} \,\middle|\, a \in \Omega D\right\}$；

又$\forall A \in 2^{\mathrm{Pt}D}$，由定理2(5)得：$\overline{\mathrm{ex}(\overline{A})} = \overline{A}$.

又由于$\overline{A} \in \Omega D$，因此，$\overline{\mathrm{ex}(\overline{A})} \in \left\{\overline{\mathrm{ex}(a)} \,\middle|\, a \in \Omega D\right\}$.

两者结合得：$\overline{A} \in \left\{\overline{\mathrm{ex}(a)} \,\middle|\, a \in \Omega D\right\}$.

所以，$\left\{\overline{A} \,\middle|\, A \in 2^{\mathrm{Pt}D}\right\} \subseteq \left\{\overline{\mathrm{ex}(a)} \,\middle|\, a \in \Omega D\right\}$.

结合两个结果得：

$\left\{\overline{A} \,\middle|\, A \in 2^{\mathrm{Pt}D}\right\} = \left\{\overline{\mathrm{ex}(a)} \,\middle|\, a \in \Omega D\right\}$.

定理4　在闭元确定的拓扑系统$D = (\mathrm{Pt}D, \Omega D, \vDash)$中，$\left\{A \in 2^{\mathrm{Pt}D} \,\middle|\, \mathrm{ex}(\overline{A}) = A\right\} = \left\{\mathrm{ex}(a) \,\middle|\, a \in \Omega D\right\}$.

证明　$\forall A \in 2^{\mathrm{Pt}D}$，若$\mathrm{ex}(\overline{A}) = A$，由于，$\mathrm{ex}(\overline{A}) \in \left\{\mathrm{ex}(a) \,\middle|\, a \in \Omega D\right\}$，从而，$A \in \left\{\mathrm{ex}(a) \,\middle|\, a \in \Omega D\right\}$.

所以，$\left\{A \in 2^{\mathrm{Pt}D} \,\middle|\, \mathrm{ex}(\overline{A}) = A\right\} \subseteq \left\{\mathrm{ex}(a) \,\middle|\, a \in \Omega D\right\}$；

又由由定理2(6)知：$\mathrm{ex}(\overline{\mathrm{ex}(a)}) = \mathrm{ex}(a)$，

因此，$\mathrm{ex}(a) \in \left\{A \in 2^{\mathrm{Pt}D} \,\middle|\, \mathrm{ex}(\overline{A}) = A\right\}$.

所以，$\left\{A \in 2^{\mathrm{Pt}D} \,\middle|\, \mathrm{ex}(\overline{A}) = A\right\} \supseteq \left\{\mathrm{ex}(a) \,\middle|\, a \in \Omega D\right\}$.

综合以上两个结果知：

$\left\{A \in 2^{\mathrm{Pt}D} \,\middle|\, \mathrm{ex}(\overline{A}) = A\right\} = \left\{\mathrm{ex}(a) \,\middle|\, a \in \Omega D\right\}$.

5　Kuratovski闭包定理

定义7(Kuratovski闭包算子)　设X是非空集合，L是余Frame. 双映射$\mathrm{Ex}: L \to 2^X$, $\mathrm{Cl}: 2^X \to L$满足条件：

(1) $\forall a, b \in L$，$\mathrm{Ex}(a \vee b) = \mathrm{Ex}(a) \cup \mathrm{Ex}(b)$；

(2) $\mathrm{Cl}(\varnothing) = 0$，$\mathrm{Ex}(0) = \varnothing$；

(3) $\forall A \subseteq X$，$A \subseteq \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A))$；

(4) $\forall A, B \subseteq X$，$\mathrm{Cl}(A) \vee \mathrm{Cl}(B) = \mathrm{Cl}(A \cup B)$；

(5) $\forall a \in L$，$\mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(a)) \leqslant a$.

则称$(\mathrm{Ex}, \mathrm{Cl})$是$(X, L)$上的Kuratovski闭包算子.

引理3　设X是非空集合，L是余Frame，$(\mathrm{Ex}, \mathrm{Cl})$是$(X, L)$上的Kuratovski闭包算子. 则

(1) $\forall a, b \in L$，若$a \leqslant b$，则$\mathrm{Ex}(a) \subseteq \mathrm{Ex}(b)$；

(2) $\forall A, B \in 2^X$，若$A \subseteq B$，则$\mathrm{Cl}(A) \leqslant \mathrm{Cl}(B)$；

(3) $\forall A \in 2^X$，$\mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A))) = \mathrm{Cl}(A)$；

(4) $\forall a \in L$，$\mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(a))) = \mathrm{Ex}(a)$.

证明　(1) 结合定义7(1)可证. 略.

(2) 结合定义7(4)可证. 略.

(3) 结合定义7(3)可得：$\mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A))) \geqslant \mathrm{Cl}(A)$；再由定义7(5)得：$\mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A))) \leqslant \mathrm{Cl}(A)$.

综合两不等式得：$\mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A))) = \mathrm{Cl}(A)$.

(4) 由定义7(3)得：$\mathrm{Ex}(a) \subseteq \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(a)))$；

其次，结合定义7(5)得：$\mathrm{Ex}(a) \supseteq \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(a)))$.

所以，$\mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(a))) = \mathrm{Ex}(a)$.

引理4　设X是非空集合，L是余Frame，$(\mathrm{Ex}, \mathrm{Cl})$是$(X, L)$上的Kuratovski闭包算子. 则集族$F = \left\{A \in 2^X \,\middle|\, \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A)) = A\right\}$是集合$X$上相对于某拓扑的闭集族.

证明　(1) 由定义7(2)得：$\mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(\varnothing)) = \mathrm{Ex}(0) = \varnothing$，因此，$\varnothing \in F$；再由定义7(3)得：$X \subseteq \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(X))$，

所以，$X = \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(X))$，根据$F$定义得：$X \in F$；

(2) 设$A, B \in F$. 则$A = \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A))$，$B = \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(B))$.

结合定义7(1)、(4)得：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A \cup B)) &= \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A) \vee \mathrm{Cl}(B))\\ &= \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A)) \cup \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(B)) = A \cup B.\end{aligned}$$

根据F定义得：$A \cup B \in F$；

(3) 设$\{A_j \mid j \in J\} \subseteq F$，则

$$\forall j \in J, A_j = \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A_j)).$$

由定义7(3)得：$\bigcap_j A_j \subseteq \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(\bigcap_j A_j))$；

又,$\forall j \in J, \bigcap_j A_j \subseteq A_j$. 因此,

$$\forall j \in J,\ \mathrm{Cl}(\bigcap_j A_j) \leqslant \mathrm{Cl}(A_j).$$

进而,$\forall j \in J, \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(\bigcap_j A_j)) \subseteq \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A_j))$.

再结合 $\forall j \in J, A_j = \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A_j))$得:

$$\forall j \in J, \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(\bigcap_j A_j)) \subseteq A_j.$$

根据F定义得: $\mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(\bigcap_j A_j)) \subseteq \bigcap_j A_j$.

综合上面两包含关系得:$\bigcap_j A_j = \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(\bigcap_j A_j))$.

因此,$\bigcap_j A_j \in F$.

由(1)~(3)知:集族$F = \left\{A \in 2^X \middle| \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A)) = A\right\}$是集合$X$上相对于某拓扑的闭集族.

引理5　设X是非空集合,L是余Frame,(Ex, Cl)是(X,L)上的 Kuratovski 闭包算子. 则 $\mathrm{Ex}: L \to 2^X$ 是余Frame同态.

证明　(1) $\forall a, b \in L$, 根据定义7(1)可得:

$\mathrm{Ex}(a \vee b) = \mathrm{Ex}(a) \cup \mathrm{Ex}(b)$;

(2) $\forall \left\{a_j \middle| j \in J\right\} \subseteq L$.

由于$\forall j \in J,\ a_j \geqslant \wedge\left\{a_j \middle| j \in J\right\}$. 结合引理3(1)得:$\forall j \in J, \mathrm{Ex}(a_j) \supseteq \mathrm{Ex}\left(\wedge\left\{a_j \middle| j \in J\right\}\right)$. 则

$$\bigcap\left\{\mathrm{Ex}(a_j) \middle| j \in J\right\} \supseteq \mathrm{Ex}\left(\wedge\left\{a_j \middle| j \in J\right\}\right).$$

又由于$\forall j \in J, \bigcap\left\{\mathrm{Ex}(a_j) \middle| j \in J\right\} \subseteq \mathrm{Ex}(a_j)$.

由引理3(2)得:$\forall j \in J$,

$$\mathrm{Cl}\left(\bigcap\left\{\mathrm{Ex}(a_j) \middle| j \in J\right\}\right) \leqslant \mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(a_j)).$$

再由定义7(5)得:$\forall j \in J, \mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(a_j)) \leqslant a_j$.

将两者结合得:$\forall j \in J, \mathrm{Cl}\left(\bigcap\left\{\mathrm{Ex}(a_j) \middle| j \in J\right\}\right) \leqslant a_j$.

因此,$\mathrm{Cl}\left(\bigcap\left\{\mathrm{Ex}(a_j) \middle| j \in J\right\}\right) \leqslant \wedge\left\{a_j \middle| j \in J\right\}$.

结合引理3(1)得:

$$\mathrm{Ex}\left(\mathrm{Cl}\left(\bigcap\left\{\mathrm{Ex}(a_j) \middle| j \in J\right\}\right)\right) \subseteq \mathrm{Ex}\left(\wedge\left\{a_j \middle| j \in J\right\}\right).$$

再由定义7(3)得:

$$\bigcap\left\{\mathrm{Ex}(a_j) \middle| j \in J\right\} \subseteq \mathrm{Ex}\left(\mathrm{Cl}\left(\bigcap\left\{\mathrm{Ex}(a_j) \middle| j \in J\right\}\right)\right),$$

因此,$\bigcap\left\{\mathrm{Ex}(a_j) \middle| j \in J\right\} \subseteq \mathrm{Ex}\left(\wedge\left\{a_j \middle| j \in J\right\}\right)$.

结合两式得:$\mathrm{Ex}\left(\wedge\left\{a_j \middle| j \in J\right\}\right) = \bigcap\left\{\mathrm{Ex}(a_j) \middle| j \in J\right\}$.

根据定义3知$\mathrm{Ex}: L \to 2^X$是余Frame同态.

引理6　设X是非空集合,L是余Frame,(Ex, Cl)是(X,L)上的 Kuratovski 闭包算子. 定义从X到L的二元关系"$\vDash$"如下:$\forall (x, a) \in X \times L$,

$$x \vDash a \text{ 当且仅当 } x \in \mathrm{Ex}(a).$$

则$(X, L, \vDash)$是闭元确定的拓扑系统.

证明　由引理5知:$\mathrm{Ex}: L \to 2^X$是余Frame同态. 结合"$\vDash$"的定义得:

(1) $\forall a, b \in L, \forall x \in X$,

$x \vDash a \vee b$, 当且仅当 $x \in \mathrm{Ex}(a \vee b)$, 当且仅当 $x \in \mathrm{Ex}(a) \cup \mathrm{Ex}(b)$,当且仅当$x \in \mathrm{Ex}(a)$或$x \in \mathrm{Ex}(b)$,当且仅当$x \vDash a$或$x \vDash b$;

(2) $\forall S \subseteq L, \forall x \in X$,

$x \vDash \wedge S$, 当且仅当 $x \in \mathrm{Ex}(\wedge S)$, 当且仅当 $x \in \bigcap\{\mathrm{Ex}(s): s \in S\}$,当且仅当$\forall s \in S, x \in \mathrm{Ex}(s)$,当且仅当$\forall s \in S, x \vDash s$.

根据定义4知:$(X, L, \vDash)$是闭元确定的拓扑系统.

定理5 (Kuratovski闭包算子定理)　设X是非空集合,L是余Frame,(Ex, Cl)是(X,L)上的Kuratovski闭包算子. 则存在唯一的闭元确定的拓扑系统$D = (X, L, \vDash)$使得在该拓扑系统中,$\forall A \subseteq X, \overline{A} = \mathrm{Cl}(A)$.

证明　设X是非空集合,L是余Frame,(Ex, Cl)是(X,L)上的Kuratovski闭包算子. 定义从X到L的二元关系"$\vDash$"如下:$\forall (x, a) \in X \times L$,

$$x \vDash a \text{ 当且仅当 } x \in \mathrm{Ex}(a).$$

则由引理5知$\mathrm{Ex}: L \to 2^X$是余Frame同态, 由引理6知$D = (X, L, \vDash)$是闭元确定的拓扑系统.

由定义7(3)知: $A \subseteq \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(A))$, 又 $\mathrm{Cl}(A) \in L$, 则$\mathrm{Cl}(A) \in \{a: a \in L, A \subseteq \mathrm{Ex}(a)\}$;

又 $\forall a \in L$, 若 $A \subseteq \mathrm{Ex}(a)$, 则结合引理3(2)可得: $\mathrm{Cl}(A) \leqslant \mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(a))$;又由定义7(5)得:

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(a)) \leqslant a. \text{ 所以}, \mathrm{Cl}(A) \leqslant a.$$

综合两方面知:$\mathrm{Cl}(A) = \wedge\{a: a \in L, A \subseteq \mathrm{Ex}(a)\}$.

因此, 结合定义6知:在闭元确定的拓扑系统$(X, L, \vDash)$中, $\forall A \subseteq X, \overline{A} = \mathrm{Cl}(A)$.

下面证明满足条件的闭元确定的拓扑系统$D = (X, L, \vDash)$的唯一性.

若闭元确定的拓扑系统$D_1 = (X, L, \vDash_1)$也满足$\forall A \subseteq X, \overline{A} = \mathrm{Cl}(A)$. 因此,在闭元确定的拓扑系统$D_1 = (X, L, \vDash_1)$中,$\forall a \in L$,有

(1) $\overline{\mathrm{ex}_1(a)} = \mathrm{Cl}(\mathrm{ex}_1(a))$;(2)$\overline{\mathrm{Ex}(a)} = \mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(a))$.

先证$\forall a \in L, \mathrm{ex}_1(a) = \mathrm{Ex}(a)$.

由定理2(4)得: $\forall a \in L, \overline{\mathrm{ex}_1(a)} \leqslant a$, 再结合(1) $\overline{\mathrm{ex}_1(a)} = \mathrm{Cl}(\mathrm{ex}_1(a))$得:

$$\forall a \in L, \mathrm{Cl}(\mathrm{ex}_1(a)) \leqslant a.$$

因此,$\forall a \in L,\ \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(\mathrm{ex}_1(a))) \subseteq \mathrm{Ex}(a)$.

又根据定义7(3)得:$\mathrm{ex}_1(a) \subseteq \mathrm{Ex}(\mathrm{Cl}(\mathrm{ex}_1(a)))$,

所以,$\forall a \in L,\ \mathrm{ex}_1(a) \subseteq \mathrm{Ex}(a)$;

又由定义7(5)得:$\forall a \in L, \mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(a)) \leqslant a$,再结合

（2）$\overline{\mathrm{Ex}(a)}=\mathrm{Cl}(\mathrm{Ex}(a))$得：

$$\forall a\in L,\overline{\mathrm{Ex}(a)}\leqslant a.$$

因此，$\forall a\in L,\mathrm{ex}_1(\overline{\mathrm{Ex}(a)})\subseteq \mathrm{ex}_1(a)$.

又根据定理2(2)得：$\mathrm{Ex}(a)\subseteq \mathrm{ex}_1(\overline{\mathrm{Ex}(a)})$.

所以，$\forall a\in L$, $\mathrm{ex}_1(a)\supseteq \mathrm{Ex}(a)$.

综合以上两方面得：$\forall a\in L,\mathrm{ex}_1(a)=\mathrm{Ex}(a)$.

再证$\vDash_1=\vDash$. $\forall a\in L,\forall x\in X$.

由定义5，引理6得：$x\vDash_1 a$，当且仅当$x\in \mathrm{ex}_1(a)$，

当且仅当$x\in \mathrm{Ex}(a)$，当且仅当$x\vDash a$.

所以，$\vDash_1=\vDash$.

从而，两个闭元确定的拓扑系统是一致的.

6 连续映射的等价刻画

本节根据拓扑系统与闭元确定拓扑系统对称性的特点，给出闭元确定的拓扑系统之间连续映射的定义，并利用闭元确定的拓扑系统中的闭包元对连续映射进行等价刻画.

定义8 设$D=(\mathrm{Pt}D,\Omega D,\vDash)$，$E=(\mathrm{Pt}E,\Omega E,\vDash)$是闭元确定的拓扑系统，映射$\mathrm{Pt}f:\mathrm{Pt}D\to \mathrm{Pt}E$和余Frame态射$\Omega f:\Omega E\to\Omega D$构成的偶对$(\mathrm{Pt}f,\Omega f)$称为从拓扑系统$D=(\mathrm{Pt}D,\Omega D,\vDash)$到拓扑系统$E=(\mathrm{Pt}E,\Omega E,\vDash)$的映射，记作$f:D\to E$.

再若$\forall x\in \mathrm{Pt}D$, $\forall b\in\Omega E$, $x\vDash\Omega f(b)$当且仅当$\mathrm{Pt}f(x)\vDash b$，则称$f:D\to E$是连续映射.

定理6 设$D=(\mathrm{Pt}D,\Omega D,\vDash)$，$E=(\mathrm{Pt}E,\Omega E,\vDash)$是闭元确定的拓扑系统，映射$f:D\to E$连续的充分必要条件是：$\forall b\in\Omega E,\mathrm{ex}(\Omega f(b))=(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(b))$.

证明 必要性. $\forall b\in\Omega E,\forall x\in \mathrm{Pt}D$，根据定义5，定义8，以及$f:D\to E$连续可知：

$x\in\mathrm{ex}(\Omega f(b))$，当且仅当$x\vDash\Omega f(b)$，

当且仅当$\mathrm{Pt}f(x)\vDash b$，当且仅当$\mathrm{Pt}f(x)\in\mathrm{ex}(b)$，

当且仅当$x\in(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(b))$.

因此，$\forall b\in\Omega E,\mathrm{ex}(\Omega f(b))=(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(b))$.

充分性. $\forall b\in\Omega E,\forall x\in\mathrm{Pt}D$. 根据定义5，以及等式$\mathrm{ex}(\Omega f(b))=(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(b))$可知：

$x\vDash\Omega f(b)$，当且仅当$x\in\mathrm{ex}(\Omega f(b))$，当且仅当

$x\in(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(b))$，当且仅当$\mathrm{Pt}f(x)\in\mathrm{ex}(b)$，

当且仅当$\mathrm{Pt}f(x)\vDash b$.

综合以上结果得$x\vDash\Omega f(b)$当且仅当$\mathrm{Pt}f(x)\vDash b$.

因此，映射$f:D\to E$是连续映射.

定理7 设$D=(\mathrm{Pt}D,\Omega D,\vDash)$，$E=(\mathrm{Pt}E,\Omega E,\vDash)$是闭元确定的拓扑系统，$f:D\to E$是连续映射. 则以下结论成立：

（1）$\forall F\subseteq\mathrm{Pt}E,\mathrm{ex}\left(\overline{(\mathrm{Pt}f)^{-1}(F)}\right)\subseteq\mathrm{ex}(\Omega f(\overline{F}))$;

（2）$\forall F\subseteq\mathrm{Pt}E,\mathrm{ex}(\Omega f(\overline{F}))=(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(\overline{F}))$;

（3）$\forall b\in\Omega E,\mathrm{ex}(\Omega f(\overline{\mathrm{ex}(b)}))=\mathrm{ex}(\Omega f(b))$.

证明 （1）$\forall F\subseteq\mathrm{Pt}E,\forall x\in\mathrm{Pt}D$.

若$x\notin\mathrm{ex}(\Omega f(\overline{F}))$，由定义5可知：$x\nvDash\Omega f(\overline{F})$，

再根据$f:D\to E$的连续性可知：$\mathrm{Pt}f(x)\nvDash\overline{F}$.

由定义6可知：$\exists b\in\Omega E$使得$F\subseteq\mathrm{ex}(b)$，且$\mathrm{Pt}f(x)\notin\mathrm{ex}(b)$. 所以，$\exists b\in\Omega E$使得

$(\mathrm{Pt}f)^{-1}(F)\subseteq(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(b))$且$x\notin(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(b))$.

由于$f:D\to E$是连续映射，由定理6可得$\mathrm{ex}(\Omega f(b))=(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(b))$. 所以，$\exists b\in\Omega E$使得

$(\mathrm{Pt}f)^{-1}(F)\subseteq\mathrm{ex}(\Omega f(b))$且$x\notin\mathrm{ex}(\Omega f(b))$.

因此，$x\notin\mathrm{ex}\left(\overline{(\mathrm{Pt}f)^{-1}(F)}\right)$.

所以，$\mathrm{ex}\left(\overline{(\mathrm{Pt}f)^{-1}(F)}\right)\subseteq\mathrm{ex}(\Omega f(\overline{F}))$;

（2）$\forall F\subseteq\mathrm{Pt}E$. 由定义6知：$\overline{F}\in\Omega E$，已知$f:D\to E$是连续映射，因此由定理6直接得：

$$\mathrm{ex}(\Omega f(\overline{F}))=(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(\overline{F}));$$

（3）$\forall b\in\Omega E$，由定理2(6)得：$\mathrm{ex}(\overline{\mathrm{ex}(b)})=\mathrm{ex}(b)$，又$f:D\to E$是连续映射，结合定理6得：

$$\begin{aligned}\mathrm{ex}(\Omega f(\overline{\mathrm{ex}(b)}))&=(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(\overline{\mathrm{ex}(b)}))\\&=(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(b))=\mathrm{ex}(\Omega f(b)).\end{aligned}$$

推论1 设$D=(\mathrm{Pt}D,\Omega D,\vDash)$，$E=(\mathrm{Pt}E,\Omega E,\vDash)$是闭元确定的拓扑系统，$\forall F\subseteq\mathrm{Pt}E$. 则

$$\mathrm{ex}\left(\overline{(\mathrm{Pt}f)^{-1}(F)}\right)\subseteq(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(\overline{F})).$$

证明 结合定理7中(1)、(2)直接可得.

定理8 设$D=(\mathrm{Pt}D,\Omega D,\vDash)$，$E=(\mathrm{Pt}E,\Omega E,\vDash)$是闭元确定的拓扑系统. 映射$f:D\to E$连续的充分必要条件是下面(1)和(2)同时成立：

（1）$\forall F\subseteq\mathrm{Pt}E,\mathrm{ex}(\Omega f(\overline{F}))=(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(\overline{F}))$;

（2）$\forall b\in\Omega E,\mathrm{ex}(\Omega f(b)\subseteq\mathrm{ex}(\Omega f(\overline{\mathrm{ex}(b)}))$.

证明 必要性. 根据定理7(2)、(3)直接可得.

充分性. $\forall b\in\Omega E$，则$\forall\mathrm{ex}(b)\subseteq\mathrm{Pt}E$，代入(1)得：

$$\mathrm{ex}(\Omega f(\overline{\mathrm{ex}(b)}))=(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(\overline{\mathrm{ex}(b)})).$$

又根据定理2(6)得：$\mathrm{ex}(\overline{\mathrm{ex}(b)})=\mathrm{ex}(b)$，

因此，$\mathrm{ex}(\Omega f(\overline{\mathrm{ex}(b)}))=(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(b))$.

再根据定理2(4)可得：

$$\mathrm{ex}(\Omega f(\overline{\mathrm{ex}(b)}))\subseteq\mathrm{ex}(\Omega f(b)).$$

再结合(2)得：$\mathrm{ex}(\Omega f(\overline{\mathrm{ex}(b)}))=\mathrm{ex}(\Omega f(b))$.

综合上面的等式得：$\forall b\in\Omega E$,

$$\mathrm{ex}(\Omega f(b))=(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(b)).$$

根据定理6得：映射$f:D\to E$是连续的.

注3 若$f:D\to E$是拓扑系统$D=(\mathrm{Pt}D,\Omega D,\vDash)$到拓扑系统$E=(\mathrm{Pt}E,\Omega E,\vDash)$之间的连续映射，由推论1知：$\forall F\subseteq\mathrm{Pt}E$,

$$\mathrm{ex}\left(\overline{(\mathrm{Pt}f)^{-1}(F)}\right)\subseteq(\mathrm{Pt}f)^{-1}(\mathrm{ex}(\overline{F})).$$

这个结论不是两个拓扑系统之间映射$f: D\to E$连续的充分条件，但这个结论是相应的两个拓扑系统空间化形式之间映射连续的充分必要条件[1]. 这个结论体现了拓扑系统中闭包元的作用是点集部分的闭集所不能取代的.

参考文献

[1] ENGELKING R. General Topology[M]. Warszawa: Panstwowe Wgdawnictwo Naukowe, 1977.

[2] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[3] JOHNSTONE P. Stone Spaces[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

[4] 郑崇友, 樊磊, 崔宏斌. Frame与连续格[M]. 北京: 首都师范大学出版社, 1994.

[5] 罗懋康. 拓扑结构的本质-Locale[J]. 西南民族学院学报(自然科学版), 1990, 18(4): 29-33.
LUO Mao-kang. Essence of topology-Locale[J]. Journal of Southwest Nationalities College(Natural Science), 1990, 18(4): 29-33. (in Chinese)

[6] 王国俊. L-Fuzzy拓扑空间论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988.

[7] 王国俊, 等. 拓扑分子格理论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1990.

[8] WANG Guo-jun. Theory of topological molecular lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 47(3): 351-376.

[9] 樊磊, 郑崇友. 连通Locale的基本性质[J]. 数学进展, 2001, 30(3): 247-251.
FAN Lei, ZHENG Chong-you. Basic properties of connected locale[J]. Advances in Mathematics, 2001, 30(3): 247-251. (in Chinese)

[10] 梁基华. Locale上的收敛结构[J]. 数学学报, 1995, 38(3): 294-301.
LIANG Ji-hua. Convergence and cauchy structures on locales[J]. Acta Mathematica Sinica, 1995, 38(3): 294-301. (in Chinese)

[11] 梁基华. 一致Locale的乘积[J]. 数学学报, 1998, 41(2): 411-416.
LIANG Ji-hua. The product of uniformity locale[J]. Acta Mathematica Sinica, 1998, 41(2): 411-416.

[12] 罗懋康. 格上拓扑的点式处理[D]. 成都: 四川大学, 1992.

[13] VICKERS S. Topology via Logic[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[14] 徐罗山, 李高林. 拓扑系统的(强)T_2分离性[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2005, 8(4): 1-5.
XU Luo-shan, LI Gao-lin. (Strong)T_2 separation in topological systems[J]. Journal of Yangzhou University (Natural Science Edition), 2005, 8(4): 1-5. (in Chinese)

[15] 李世伦. 拓扑系统的分离性[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2002, 39(4): 644-648.
LI Shi-lun. The separation in topological systems[J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2002, 39(4): 644-648. (in Chinese)

[16] 李高林, 徐罗山. 拓扑系统的紧性和分离性[J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(2): 6-13.
LI Gao-lin, XU Luo-shan. Compactness and separation in topological systems[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21(2): 6-13. (in Chinese)

[17] 陈仪香. 拓扑系统范畴与子拓扑系统[J]. 陕西师范大学报(自然科学版), 1994, 22(4): 19-24.
CHEN Yi-xiang. Category of topological systems and subtopological systems[J]. Journal of Shaanxi Normal University(Natural Science Edition), 1994, 22(4): 19-24. (in Chinese)

[18] 刘菡, 贺伟. 拓扑系统的子系统[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2007, 44(2): 229-235.
LIU Han, HE Wei. Subsystems of a topological systems[J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2007, 44(2): 229-235.

[19] 陈仪香. 拓扑系统范畴完备性与Tychonoff乘积定理[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 1998, 27(3): 20-27.
CHEN Yi-xiang. Completeness of category of topological systems and Tychonoff product theorem[J]. Journal of Shanghai Normal University(Natural Science Edition), 1998, 27(3): 20-27. (in Chinese)

[20] 冯丹丹, 吴洪博. 拓扑系统的开远域及其应用[J]. 山东大学学报(理学版), 2019, 54(11): 90-96.
FENG Dan-dan, WU Hong-bo. Open remote neighborhoods of topological systems and their applications[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2019, 54(11): 90-96. (in Chinese)

[21] 卢涛, 贺伟. 邻域系统[J]. 山东大学学报(理学版), 2016, 51(6): 90-96.
LU Tao, HE Wei. Neighborhood systems[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2016, 51(6): 90-96. (in Chinese)

[22] 马娜娜, 赵彬. Quantale系统的空间化和Q-Locale化[J]. 陕西师大学报(自然科学版), 2013, 41(2): 9-13.
MA Na-na, ZHAO Bin. The spatialization and Q-localification of a quantale systems[J]. Journal of Shaanxi Normal University(Natural Science Edition), 2013, 41(2): 9-13. (in Chinese)

[23] 吴洪博, 石慧君. Heyting系统及其H-空间化表示形式[J]. 电子学报, 2012, 40(5): 995-999.
WU Hong-bo, SHI Hui-jun. Heyting syestems and its representation by H-spatialization[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(5): 995-999. (in Chinese)
[24] 吴洪博, 石慧君. Heyting系统及其H-Locale化形式[J]. 数学学报(中文版), 2012, 55(6): 1119-1130.
WU Hong-bo, SHI Hui-jun. Heyting syestems and its H-localification[J]. Acta Mathematica Sinica(Chinese Series), 2012, 55(6): 1119-1130. (in Chinese)

作者简介

高 雅 女, 1996年6月生于山西大同. 现为陕西师范大学数学与统计学院硕士研究生. 主要研究方向为非经典数理逻辑与格上拓扑.
E-mail: 910653355@qq.com

吴洪博(通讯作者) 男, 1959年6月生于陕西咸阳. 现为陕西师范大学数学与统计学院教授、博士生导师. 主要研究方向为非经典数理逻辑与格上拓扑.
E-mail: wuhb@snnu.edu.cn