

无条件稳定 FETD 方法中亚网格技术的研究

王祎心^{1,2}, 魏 兵^{1,2}, 范凯航^{1,2}, 李益文³, 魏小龙³

(1. 西安电子科技大学物理与光电工程学院, 陕西西安 710071;
2. 西安电子科技大学信息感知技术协同创新中心, 陕西西安 710071; 3. 空军工程大学航空工程学院, 陕西西安 710038)

摘 要: 本文在时域有限元(Finite-Element Time-Domain, FETD)方法中实现了一种新型亚网格技术, 并通过空间滤模(Spatial Modes Filtering, SMF)发展为无条件稳定亚网格 FETD(Subgridding SMF-FETD, SSMF-FETD)方法. 本文给出了 FETD 中亚网格技术的具体实施方案, 包括粗细网格交界处粗网格棱边的编号方案、系统矩阵的建立过程以及亚网格 FETD(Subgridding FETD, S-FETD)方法的系统迭代方案. 亚网格技术的引入在一定程度上会破坏系统矩阵的稀疏度, 但基于有限元框架下建立的系统矩阵依然保持对称正定或半正定特性. 因此, 可以直接将 SMF 方法应用到 S-FETD 方法中. 通过广义特征值分解获得 S-FETD 系统矩阵的不稳定模式, 并修改其矩阵方程, 进而得到 SSMF-FETD 方法. S-FETD 方法能够有效减少未知量数目, 在此基础上数值结果表明, SSMF-FETD 可以有效扩大时间步长并保持结果准确, 从而进一步提升计算效率. 在面对含有复杂精细结构的问题时, 所提方法具有较高的有效性和准确性.

关键词: 时域有限元(Finite-Element Time-Domain, FETD); 无条件稳定; 特征值; 特征模式; 亚网格技术; 空间滤模
中图分类号: O441 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2022)11-2799-07
电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.12263/DZXB.20210902

Research on Subgridding Technology in Unconditionally Stable FETD Method

WANG Yi-xin^{1,2}, WEI Bing^{1,2}, FAN Kai-hang^{1,2}, LI Yi-wen³, WEI Xiao-long³

(1. School of Physics and Optoelectronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China;
2. Collaborative Innovation Center of Information Sensing and Understanding, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China;
3. Aeronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an, Shaanxi 710038, China)

Abstract: A subgridding technology is implemented in the finite-element time-domain(FETD) method, and with spatial modes filtering(SMF) method further developed into the unconditionally-stable subgridding SMF-FETD(SSMF-FETD) method. The specific implementation scheme of the subgridding technology in FETD is given, including the numbering scheme of the edges of the coarse grid at the junction of coarse and fine grid regions, the establishment process of the system matrices, and the system iteration scheme of the subgridding FETD(S-FETD) method. The introduction of subgridding technology will destroy the sparsity of the system matrix to a certain extent, but the system matrices based on the finite element framework still maintain the symmetric positive definite or positive semi-definite characteristics. Therefore, the SMF method can be directly applied to the subgridding FETD method. The unstable modes of the subgridding FETD system matrices are obtained through generalized eigenvalue decomposition, and the subgridding FETD matrix equation is modified to obtain the SSMF-FETD method. The S-FETD method can effectively reduce the number of unknowns. On this basis, numerical results show that the SSMF-FETD method can effectively expand the time step and maintain the accuracy of the results, which further improves the calculation efficiency. The proposed method has high effectiveness and accuracy when facing the problems with complex and fine structures.

Key words: finite-element time-domain(FETD); unconditionally stable; eigenvalues; eigenmodes; subgridding technique; spatial modes filtering

收稿日期: 2021-07-14; 修回日期: 2021-09-26; 责任编辑: 覃怀银

基金项目: 国家自然科学基金(No.61901324, No.62001345); 中国博士后科学基金(No.2019M653548, No.2019M663928XB); 中央高校基本科研业务费(No.XJS200501, No.XJS200507, No.JB200501)

1 引言

多尺度问题对几何建模方案的需求及对时间步长选取的限制给传统时域有限元方法(Finite-Element Time-Domain, FETD)及其他电磁波时域计算方法带来了巨大挑战^[1-5]. 在使用矩形单元剖分时, FETD通常需要使用单一尺度单元来离散多尺度计算域^[6], 为准确描述部分精细结构所需的空间步长很小, 将在其他区域中产生大量不必要的未知量, 浪费内存. 因此, 亚网格技术^[7-10]应运而生, 采用细网格对精细结构进行局部加密剖分, 其余区域采用粗网格剖分, 这样可以更好地描述精细结构并有效减少内存. 另一方面, 由于FETD采用显式中心差分格式近似时间导数, 其时间步长受到稳定性条件的限制^[11], 精细网格的存在会使时间步长过小, 增加计算成本. 亚网格技术虽减少了网格数量, 但时间步长仍被稳定性条件约束, 时域计算压力依然较大. 近年来, 为了突破稳定性条件的限制, 众多学者提出了一系列无条件稳定方法^[12-14]. 其中, Jiao Dan团队提出的基于空间滤模的无条件稳定FETD(Spatial Modes Filtering Finite-Element Time-Domain, SMF-FETD)方法^[13], 无需传统FETD方法预处理, 通过滤除在给定的大时间步下不能被稳定模拟的空间模式就可以使系统稳定, 随后其团队又在无条件稳定时域有限差分方法中引入了亚网格技术^[15, 16].

本文的主要工作是将一种亚网格技术应用到SMF-FETD中, 开发了基于空间滤模FETD方法的新亚网格技术(Subgridding SMF-FETD, SSMF-FETD), 拓展了FETD方法在处理包含精细结构计算域时的剖分方案. 首先, 以粗细网格比率为5为例, 详细描述了FETD中亚网格技术的具体操作流程, 给出了亚网格时域有限元(Subgridding FETD, S-FETD)方法. 随后, 将亚网格技术应用至SMF-FETD方法, 通过滤除空间不稳定模式解决了时间步长依赖于最小空间步长的问题, 给出了SSMF-FETD方法. 数值结果表明, 相比于FETD方法, S-FETD可以有效减少未知量数目, SSMF-FETD方法在此基础上可采用大时间步长计算, 保证计算精度的同时进一步提升了计算效率, 证明了SMF-FETD亚网格技术在面对多尺度复杂问题时的有效性.

2 SSMF-FETD基本理论

FETD的系统矩阵方程为^[1]

$$\mathbf{T} \frac{d^2 \mathbf{e}}{dt^2} + \mathbf{S} \mathbf{e} = \mathbf{h} \quad (1)$$

其中, 质量矩阵 \mathbf{T} 和刚度矩阵 \mathbf{S} 是稀疏矩阵, \mathbf{e} 为棱边基函数的相关系数矢量, \mathbf{h} 是激励源矢量.

单元质量矩阵 \mathbf{T}_e 和单元刚度矩阵 \mathbf{S}_e 由式(2)给出^[1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{ij}^e &= \varepsilon \iint_{\Omega^e} \mathbf{N}_i^e \mathbf{N}_j^e d\Omega \\ \mathbf{S}_{ij}^e &= \mu^{-1} \iint_{\Omega^e} (\nabla \times \mathbf{N}_i^e) \cdot (\nabla \times \mathbf{N}_j^e) d\Omega \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)中, Ω 表示单元积分区域, i, j 表示单元内棱边编号, \mathbf{N}_i^e 表示第 e 个单元内第 i 条棱边的基函数, ε 为介电常数, μ 为磁导率.

2.1 亚网格FETD方法

引入亚网格技术后, 用两种尺寸的正方形网格剖分计算域, 粗、细网格边长分别为 l_c, l_f . 考虑如图1所示的网格比率 $\text{Ratio} = l_c/l_f = 5$ 时的剖分情形, 中心AA区域为细网格加密区域, 即将该区域原有的粗网格均匀细分, 此外区域保持粗网格剖分. AA、A型单元为常规单元, 每个单元包含4条等长棱边, 区别是AA、A区内分别只包含细、粗网格单元; B型单元为粗细网格交界处粗单元, 该类单元含有一条粗细单元共用棱边, 即每个单元含3条粗棱边与Ratio条细棱边.

如此剖分计算域后, 需通过空间插值进行粗细网格区域边界的信息交互, 即将共用棱边的粗棱边信息等效至其对应的细棱边, 将交界处粗棱边对场值的贡献改由对应的细棱边的贡献代替, 以此保证场值连续, 避免重复计算.

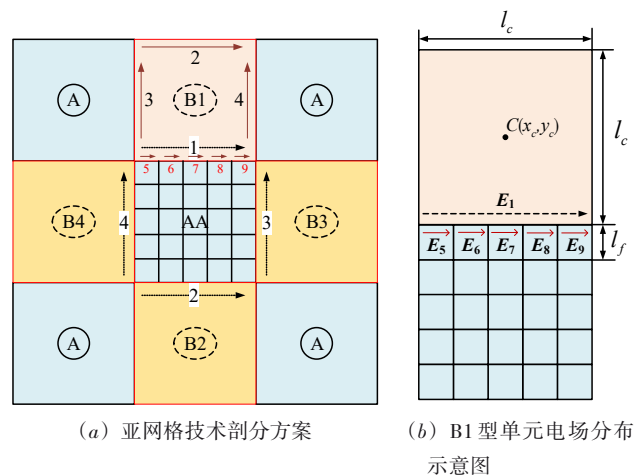


图1 亚网格技术剖分方案示意图

2.1.1 粗细网格交界处粗网格单元矩阵的构建

常规单元可按照FETD方法进行单元矩阵的构建, B型单元因情况特殊, 构建单元矩阵需要采用一种新的编号方式处理. 以B1单元为例(B2~B4同理), 先按常规单元编号方式对粗棱边编号, 将下、

上、左、右棱边分别编号为 1、2、3、4 号棱边 (如图 1(a)所示),方向为坐标轴正方向. 此时粗棱边的基函数表达式为^[1]

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= \frac{1}{l_y} \left(y_c + \frac{l_y}{2} - y \right) \hat{x} \\ N_2(x,y) &= \frac{1}{l_y} \left(y - y_c + \frac{l_y}{2} \right) \hat{x} \\ N_3(x,y) &= \frac{1}{l_x} \left(x_c + \frac{l_x}{2} - x \right) \hat{y} \\ N_4(x,y) &= \frac{1}{l_x} \left(x - x_c + \frac{l_x}{2} \right) \hat{y} \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)中, x_c, y_c 为单元中心点坐标, l_x, l_y 为单元 x, y 方向的棱边长度. 随后提供 B1 粗细网格交界处棱边的新编号方案, 1 号粗棱边被分割为 5~9 号细棱边, 由于棱边基函数是与单元棱边长度有关的函数, 此时各细棱边的基函数为

$$N_i(x,y) = \frac{1}{5} N_1(x,y), i=5, \dots, 9 \quad (4)$$

为了使粗细网格交界的场保持连续性, B1 单元的 1 号粗棱边对场值的贡献由其对应的 5~9 号细棱边的场值替代, 如图 1(b)所示, 粗细边界场值的关系为^[15]

$$E_1 = \sum_{i=5}^{\text{Ratio}+4} \frac{l_{fi}}{l_c} E_i \quad (5)$$

式(5)中, E_1 为 1 号粗棱边的场值, E_i 为第 i 条细棱边的

$$S^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_x/l_y & 1 & -1 & -l_x/5l_y & -l_x/5l_y & -l_x/5l_y & -l_x/5l_y & -l_x/5l_y \\ 0 & 1 & l_y/l_x & -l_y/l_x & -1/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & -1 & -l_y/l_x & l_y/l_x & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & -l_x/5l_y & -1/5 & 1/5 & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y \\ 0 & -l_x/5l_y & -1/5 & 1/5 & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y \\ 0 & -l_x/5l_y & -1/5 & 1/5 & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y \\ 0 & -l_x/5l_y & -1/5 & 1/5 & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y \\ 0 & -l_x/5l_y & -1/5 & 1/5 & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y & l_x/25l_y \end{bmatrix} \quad (9)$$

2.1.2 S-FETD 系统矩阵方程的构造

单元矩阵构造完成后进行系统矩阵的组合. 为便于消除粗棱边作用, 首先对粗、细网格区分别进行系统矩阵的对号入座累加填充. 粗网格区域先填充域内常规棱边, 后填充交界共用粗棱边; 细网格区域先填充交界共细棱边, 后填充域内常规棱边. 然后将两区域分别生成的矩阵按先粗后细的顺序组合为完整的系统质量、刚度矩阵.

场值, l_{fi} 为第 i 条细棱边的长度, l_c 为粗棱边长度.

由式(2)、式(3)可得 FETD 的单元质量、刚度矩阵^[1]:

$$T^e = \frac{l_x l_y}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$S^e = \begin{bmatrix} l_x/l_y & -l_x/l_y & -1 & 1 \\ -l_x/l_y & l_x/l_y & 1 & -1 \\ -1 & 1 & l_y/l_x & -l_y/l_x \\ 1 & -1 & -l_y/l_x & l_y/l_x \end{bmatrix} \quad (7)$$

将 1 号粗棱边与 2~4 号粗棱边的相互作用由 5~9 号细棱边与 2~4 号粗棱边相互作用替代, 据式(2)~(4), 新形成的单元质量、刚度矩阵如式(8)、式(9):

$$T^e = \frac{l_x l_y}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 2/25 & 2/25 & 2/25 & 2/25 & 2/25 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 2/25 & 2/25 & 2/25 & 2/25 & 2/25 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 2/25 & 2/25 & 2/25 & 2/25 & 2/25 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 2/25 & 2/25 & 2/25 & 2/25 & 2/25 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 2/25 & 2/25 & 2/25 & 2/25 & 2/25 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} T_{ii}^{cc} & T_{ib}^{cc} & T_{ib}^{cf} \\ T_{bi}^{cc} & T_{bb}^{cc} & \\ T_{bi}^{fc} & & T_{bb}^{ff} & T_{bi}^{ff} \\ & & T_{ib}^{ff} & T_{ii}^{ff} \end{bmatrix} \\ S &= \begin{bmatrix} S_{ii}^{cc} & S_{ib}^{cc} & S_{ib}^{cf} \\ S_{bi}^{cc} & S_{bb}^{cc} & \\ S_{bi}^{fc} & & S_{bb}^{ff} & S_{bi}^{ff} \\ & & S_{ib}^{ff} & S_{ii}^{ff} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)中, 上标 c 表示粗网格区域, f 表示细网格区域,

下标 i 表示域内棱边, b 表示交界棱边, 上下角标为——对应, 如 T_{bi}^{fc} 表示细区域交界棱边与粗区域内部棱边的相互作用。

随后对共用棱边进行处理, 将粗区域共用棱边的贡献 T_{bb}^{cc} 、 T_{ib}^{cc} 、 T_{bi}^{cc} 、 S_{bb}^{cc} 、 S_{ib}^{cc} 、 S_{bi}^{cc} 置零, 此时矩阵将会出现多个零行、列, 将这些零行列删除, 得到插值处理后的新系统矩阵:

$$\mathbf{T}_{\text{new}} = \begin{bmatrix} T_{ii}^{cc} & T_{ib}^{cf} & & \\ T_{bi}^{fc} & T_{bb}^{ff} & T_{bi}^{ff} & \\ & T_{ib}^{ff} & T_{ii}^{ff} & \\ & & & \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{S}_{\text{new}} = \begin{bmatrix} S_{ii}^{cc} & S_{ib}^{cf} & & \\ S_{bi}^{fc} & S_{bb}^{ff} & S_{bi}^{ff} & \\ & S_{ib}^{ff} & S_{ii}^{ff} & \\ & & & \end{bmatrix}$$

S-FETD 系统矩阵方程此时由式(1)更新为

$$\mathbf{T}_{\text{new}} \frac{d^2 \mathbf{e}_{\text{new}}}{dt^2} + \mathbf{S}_{\text{new}} \mathbf{e}_{\text{new}} = \mathbf{h}_{\text{new}} \quad (12)$$

使用中心差分方案离散时间变量, 得到显式时间迭代式:

$$\mathbf{e}_{\text{new}}^{n+1} = 2\mathbf{e}_{\text{new}}^n - \Delta t^2 \mathbf{T}_{\text{new}}^{-1} \mathbf{S}_{\text{new}} \mathbf{e}_{\text{new}}^n - \mathbf{e}_{\text{new}}^{n-1} + \Delta t^2 \mathbf{T}_{\text{new}}^{-1} \mathbf{h}_{\text{new}}^n \quad (13)$$

2.2 无条件稳定的亚网格 FETD 方法

为保证仿真的稳定性, FETD 迭代时间步长的选取需要满足稳定性条件^[11]:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\sqrt{\rho(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{S})}} \quad (14)$$

其中, $\rho(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{S})$ 为矩阵 $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{S}$ 的谱半径, 与空间最小步长有关. 式(14)说明时间步长的选取会被空间离散的最小尺度所限制, 也就意味着如果计算域内存在精细网格, 为精确捕捉其中场值, 过小的空间步长会限制时间步长也不得不很小, 这在实际计算中难以承受。

S-FETD 方法时间步长的选取仍受式(14)约束, 但因其系统矩阵 \mathbf{T}_{new} 和 \mathbf{S}_{new} 依然保持对称正定和对称半正定特性, 故可以将 SMF 方法^[13] 直接应用至 S-FETD 突破式(14), 得到大时间步下的无条件稳定亚网格 FETD 方法. 此时, 式(12)的解由以下广义特征值问题确定^[12]:

$$\mathbf{S}_{\text{new}} \Phi = \mathbf{D} \mathbf{T}_{\text{new}} \Phi \quad (15)$$

式(15)中, \mathbf{D} 为对角矩阵, 其元素是 \mathbf{S}_{new} 相对于 \mathbf{T}_{new} 的特征值 λ_i^2 , Φ 是特征向量矩阵。

对于给定的 Δt , 系统特征值 λ_i^2 若满足^[12]:

$$\lambda_i^2 \geq 4/\Delta t^2 \quad (16)$$

就会导致式(13)计算的不稳定, 满足式(16)的特征值对应的特征模式称为不稳定模. 如果通过空间滤模从基础数值系统中排除不稳定的本征模式, 就可以保证在给定时间步下仿真的稳定性^[13]. 将系统的不稳定模式的特征矢量组合为矩阵 Φ_h , 通过简单的修改将式(12)变为消除掉不稳定模式的新系统^[13], 即 SSMF-

FETD, 系统矩阵方程变为

$$\mathbf{T}_{\text{new}} \frac{d^2 \mathbf{e}_{\text{new}}}{dt^2} + \mathbf{S}_{\text{new}} (\mathbf{I} - \Phi_h \Phi_h^T) \mathbf{e}_{\text{new}} = \mathbf{h}_{\text{new}} \quad (17)$$

相应的时间迭代式为

$$\mathbf{e}_{\text{new}}^{n+1} = 2\mathbf{e}_{\text{new}}^n - \Delta t^2 \mathbf{T}_{\text{new}}^{-1} \mathbf{S}_{\text{new}} (\mathbf{I} - \Phi_h \Phi_h^T) \mathbf{e}_{\text{new}}^n - \mathbf{e}_{\text{new}}^{n-1} + \Delta t^2 \mathbf{T}_{\text{new}}^{-1} \mathbf{h}_{\text{new}}^n \quad (18)$$

为确保场值的准确性, 需对每一步场值进行修正^[13]:

$$\mathbf{e}_{\text{new}}^{n+1} = \mathbf{e}_{\text{new}}^{n+1} - \Phi_h \Phi_h^T \mathbf{T}_{\text{new}} \mathbf{e}_{\text{new}}^{n+1} \quad (19)$$

3 数值算例

为了说明上述 SMF-FETD 亚网格技术的有效性, 将通过两个数值算例进行验证. 计算环境为 Intel (R) Xeon (R) Platinum 8160 CPU@2.1 GHz 台式机, 2 处理器各 24 核 48 线程, 内存 256 GB.

算例 1 线磁流源在自由空间的辐射与干涉

首先考虑线磁流源在自由空间的辐射问题. 计算模型如图 2 所示, 真空计算域大小为 $4 \text{ m} \times 4 \text{ m}$, 粗、细网格剖分尺度分别为 $0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$ 和 $0.02 \text{ m} \times 0.02 \text{ m}$, 网格比率为 5. 将域内 3 个大小为 $0.2 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$ 的计算区域用细网格加密, 线磁流源位于计算域中心点 P , 时谐场频率 $f = 0.25 \text{ GHz}$. 分别采用 FETD、S-FETD、SSMF-FETD 方法计算直线 PQ 上的磁场, 并与解析解对比。

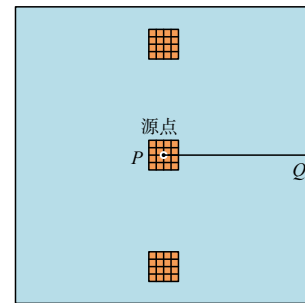


图2 计算模型示意图

FETD 全域采用细网格剖分, 未知量数目为 80400 个, 亚网格技术的引入将未知量数目降至 3904 个, 受稳定性条件的限制, FETD 和 S-FETD 的时间步长为 $\Delta t = 2.6 \times 10^{-11} \text{ s}$, SSMF-FETD 的时间步长仅受计算频率的限制可扩大至 $\Delta t = 1.3 \times 10^{-10} \text{ s}$. 图 3 给出了各方法计算直线 PQ 上磁场随距离的变化情况, 可以看出计算结果吻合良好, 证明 SSMF-FETD 具有很高的精确度。

下面考虑自由空间中两个线磁流源的干涉问题. 设置真空计算域尺寸 $6.4 \text{ m} \times 3.2 \text{ m}$, 网格尺度、加密区域大小与辐射问题一致. 加源点 $(-1.6, 0)$ 、 $(1.6, 0)$ 和观测点 $(0, 0)$ 分别位于 3 个细网格区中心, 在加源点同时加入微分高斯脉冲 $I(t) = ((t - t_0)/\tau) \exp(-4\pi(t - t_0)^2/\tau^2)$, 脉冲宽度 $\tau = 8 \times 10^{-9} \text{ s}$, 峰值时刻 $t_0 = \tau$.

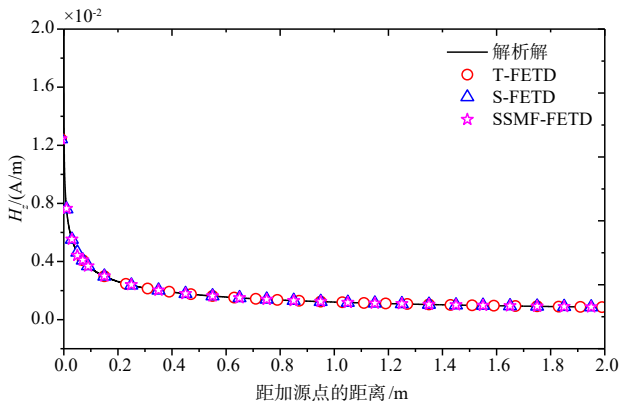


图3 线磁流辐射场与解析解对比

表 1 给出了三种方法的计算效率对比,可以看出亚网格技术的引入有效减少了总未知量数目,在保证精确度的同时也大幅提升了计算速度,SSMF-FETD 的时间步长是 FETD 方法的 5 倍,通过删除 282 个不稳定模

式实现无条件稳定。

为了更为清晰地展示二维空间两个波源的扩散和相干过程,将计算域扩大至 $12\text{ m} \times 6\text{ m}$,如图 4 所示,加源点位置 $(-3, 0)$ 、 $(3, 0)$,但如此设置 FETD 剖分的未知量数目将高达 360900 个,普通计算机难以对模型棱边进行编号。此时使用 SSMF-FETD 方法可解决这个问题并快速仿真得到干涉图样,这凸显了亚网格技术的引入在处理包含精细结构的大规模计算域时的建模优势,可解决由于精细结构存在导致剖分尺度不得不很小,从而使未知量激增造成 FETD 难以计算的问题。

算例 2 二维金属 EBG 结构传输特性的研究

根据 Bragg 定律,EBG 结构的中心频率 f_0 是该结构周期单元长度 r 的函数^[17]。对于如图 5(a)所示由周期排列的二维金属方柱组成的 EBG 结构^[18],通常按如下公式来估计阻带的中心频率 f_0 :

$$f_0 = \frac{c}{2r} \tag{20}$$

表 1 不同方法计算效率对比

方法	加密区未知量数目	总未知量数目	时间步长/s	系统矩阵组合时长/特征值求解时长/迭代时长/s	加速比	峰值内存 /MB
FETD	-	102880	2.6E-11	413.69/-/141.11	1	90.68
S-FETD	660	4816	2.6E-11	0.52/-/14.29	37.46	14.96
SSMF-FETD	660	4816	1.3E-10	0.51/1.49/6.29	66.92	24.17

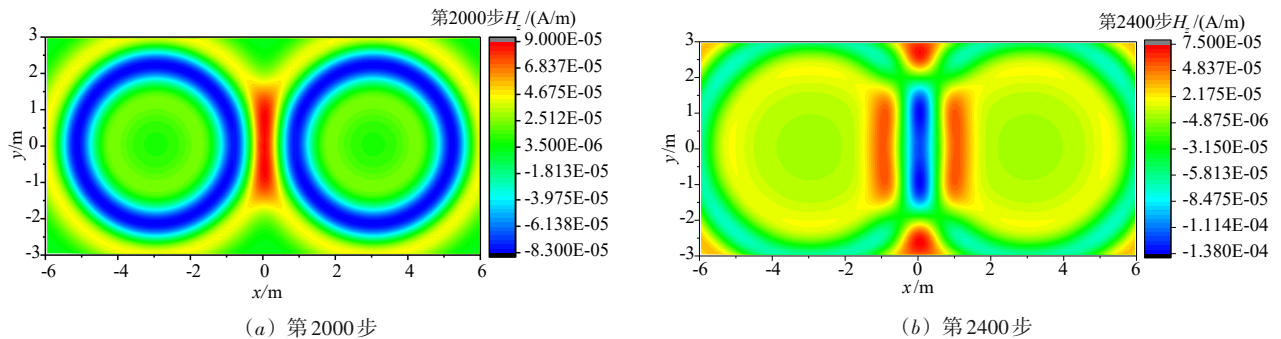


图 4 扩大计算域后干涉问题的场值快照

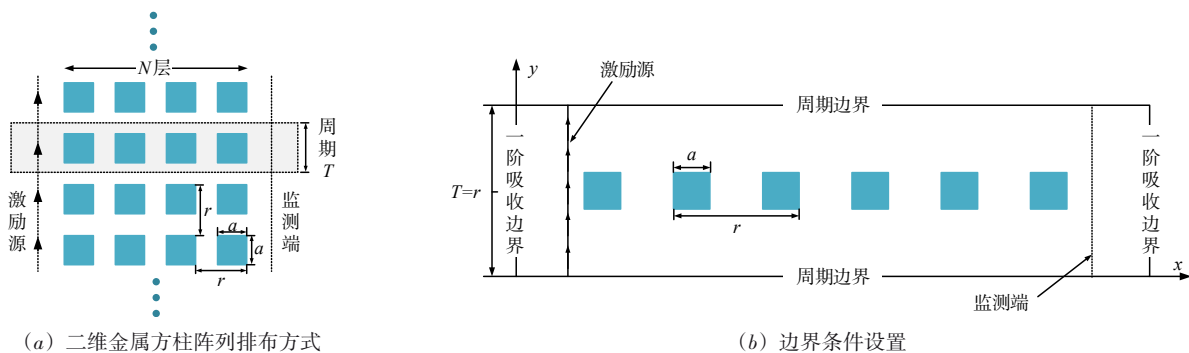


图 5 二维金属 EBG 结构示意图

设置EBG结构上下为无限多层,左右为 N 层,周期单元长度 $r=0.14\text{ m}$,金属柱截面边长 $a=0.04\text{ m}$ (为简便计算将金属视为PEC处理).图5(b)展示了一个周期计算域内的条件设置,引入亚网格技术剖分,粗、细网格尺寸分别为 $0.01\text{ m}\times 0.01\text{ m}$ 、 $0.002\text{ m}\times 0.002\text{ m}$,将金属柱部分加密剖分.平面波源为微分高斯脉冲 $I(t)=((t-t_0)/\tau)\exp(-4\pi(t-t_0)^2/\tau^2)$,参数设置 $\tau=8\times 10^{-10}\text{ s}$, $t_0=\tau$.采用SSMF-FETD方法并结合Floquet定理引入周期边界条件研究其传输特性,并分析层数 N 、周期单元长度 r 对传输特性的影响.

图6给出了当 $N=6$ 层,FETD、S-FETD和SSMF-FETD方法计算出的EBG结构传输特性曲线,表2给出了三种方法的计算效率对比,其中SSMF-FETD方法通过删除2244个不稳定模式实现无条件稳定,可以看出计算结果吻合良好,计算出的阻带中心频率与Bragg定律式(20)估计的频率一致,充分说明了本文方法的正确性和高效性.相比算例1,该算例中SSMF-FETD方法的加速比有所下降,主要是由于加密区未知量较多,同时导致亚网格方法的全域未知量增多,在求解特征值、时域迭代计算部分对内存需求增大,耗时较长,这也说明本文所提亚网格方法在处理精细目标占比越少

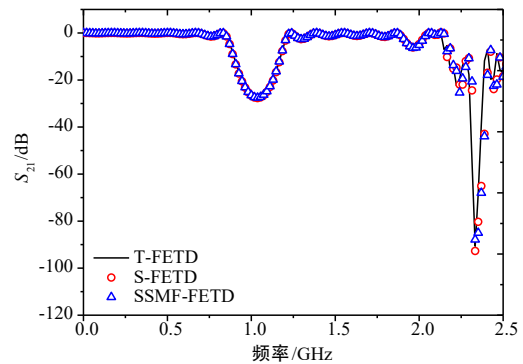


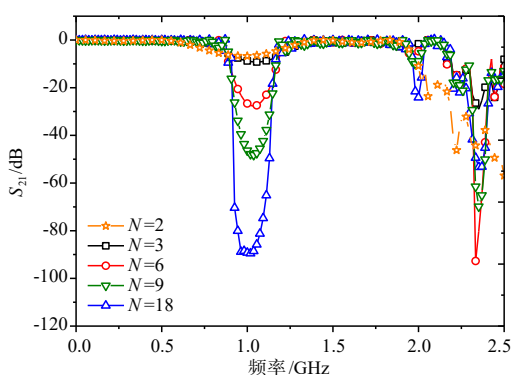
图6 不同方法计算出的 S_{21} 参数

的多尺度计算域越有优势.

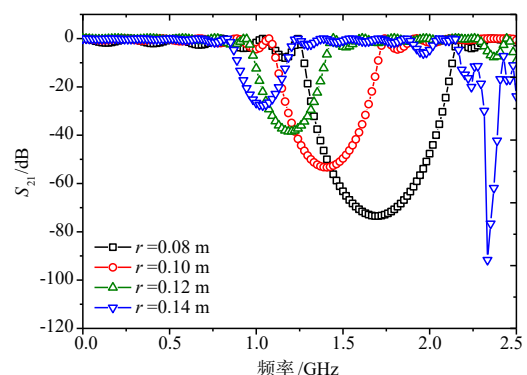
图7分别给出了EBG结构层数 N 、周期单元长度 r 对传输特性的影响.当 $N\geq 3$ 层时,层数不影响阻带中心频率及带宽,但随着 N 的增大,阻带性能提升.一般只要 $N>5$, $S_{21}<-20\text{ dB}$ 就可以满足一般阻带的要求.当金属柱截面边长和层数一定时($a=0.04\text{ m}$, $N=6$),随着周期单元长度 r 的增大,阻带性能降低,带宽减小,中心频率向低频方向移动.以上分析不仅说明了SSMF-FETD方法的实用有效性,也为EBG结构的工程设计和应用提供了参考.

表2 不同方法计算效率对比

方法	加密区未知量数目	总未知量数目	时间步长/s	系统矩阵组合时长/特征值求解时长/迭代时长/s	加速比	峰值内存/MB
FETD	-	108640	2.6E-12	495.31/-/3321.97	1	129.33
S-FETD	5040	9280	2.6E-12	1.33/-/295.24	12.87	23.62
SSMF-FETD	5040	9280	1.35E-11	1.32/117.15/93.65	18.00	470.12



(a) 层数 N 的影响



(b) 周期单元长度 r 的影响

图7 参数对传输特性的影响

4 结论

本文提出了基于SMF-FETD方法的一种二维新型亚网格技术,详细介绍了亚网格的实现过程.在保证计算精度的前提下,采用SMF-FETD亚网格技术可以有效减少未知量数目,在多尺度建模中增加网格生成

的灵活性;同时,通过滤除空间不稳定模式可以有效扩大时间步长,大幅提高计算效率.通过参照本文方法,易得出其他网格比率的亚网格FETD方法.可以预期,本文方法在复杂多尺度问题分析中将有广泛应用.

参考文献

- [1] 葛德彪, 魏兵. 电磁波时域计算方法(下册)[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2014.
- [2] 王卫杰, 陈晓洁, 周海京. 基于区域分解的大规模并行有限元快速算法[J]. 电子学报, 2019, 47(3): 741-747.
WANG Wei-jie, CHEN Xiao-jie, ZHOU Hai-jing. Fast algorithms of parallel finite element method based on domain decomposition[J]. Acta Electronica Sinica, 2019, 47(3): 741-747. (in Chinese)
- [3] LEE J F, LEE R, CANGELLARIS A. Time-domain finite-element methods[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2002, 45(3): 430-442.
- [4] CHEN J, LIU Q H. Discontinuous galerkin time-domain methods for multiscale electromagnetic simulations: a review[J]. Proceedings of the IEEE, 2013, 101(2): 242-254.
- [5] CHEN J. A review of hybrid implicit explicit finite difference time domain method[J]. Journal of Computational Physics, 2018, 363: 256-267.
- [6] TEIXEIRA F L. Time-domain finite-difference and finite-element methods for Maxwell equations in complex media [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2008, 56(8): 2150-2166.
- [7] 任昊, 王胜, 谢国大, 等. 基于 FDTD 算法的新型亚网格技术[J]. 电子学报, 2017, 45(12): 2944-2948.
REN Hao, WANG Sheng, XIE Guo-da, et al. A new subgridding technology based on FDTD algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2017, 45(12): 2944-2948. (in Chinese)
- [8] 柴玫, 阎玉波, 葛德彪. 一种可穿越介质的二维时域有限差分亚网格技术[J]. 西安电子科技大学学报, 2000, 27(5): 581-585.
CHAI Mei, YAN Yu-bo, GE De-biao. Two-dimensional subgridding algorithm in FDTD capable of traversing material surfaces[J]. Journal of Xidian University, 2000, 27(5): 581-585.
- [9] PRESCOTT D T, SHULEY N V. A method for incorporating different sized cells into the finite-difference time-domain analysis technique[J]. IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1992, 2(11): 434-436.
- [10] CHEVALIER M W, LUEBBERS R, CABLE V P. FDTD local grid with material traverse[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1997, 45(3): 411-421.
- [11] JIAO D, JIN J M. A general approach for the stability analysis of time-domain finite element method[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2002, 50(11): 1624-1632.
- [12] HE Q, GAN H, JIAO D. Explicit time-domain finite-element method stabilized for an arbitrarily large time step [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(11): 5240-5250.
- [13] LEE W, JIAO D. An Alternative explicit and unconditionally stable time-domain finite-element method for electromagnetic analysis[J]. IEEE Journal on Multiscale and Multiphysics Computational Techniques, 2018, 3: 16-28.
- [14] GAFFAR M, JIAO D. Alternative method for making explicit FDTD unconditionally stable[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2015, 63(12): 4215-4224.
- [15] YAN J, JIAO D. Symmetric positive semidefinite FDTD subgridding algorithms for arbitrary grid ratios without compromising accuracy[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2017, 65(12): 5084-5095
- [16] YAN J, JIAO D. An unsymmetric FDTD subgridding algorithm with unconditional stability[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2018, 66(8): 4137-4150.
- [17] 付云起, 袁乃昌. 用 FDTD 分析光晶带隙结构散射特性 [J]. 电子学报, 2001, 29(12): 1729-1730.
FU Yun-qi, YUAN Nai-chang. Scattering analysis of PBG structures using FDTD method[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(12): 1729-1730. (in Chinese)
- [18] 许小玲, 刘长军, 钟淑蓉, 等. 一种二维金属电磁带隙结构的电磁传输特性[J]. 信息与电子工程, 2006, 4(2): 125-128.
XU Xiao-ling, LIU Chang-jun, ZHONG Shu-rong, et al. Electromagnetic transmission characteristics of a 2-D metal EBG structure[J]. Information and Electronic Engineering, 2006, 4(2): 125-128.

作者简介



王祎心 女, 1995年8月出生于陕西省西安市. 博士生. 主要研究方向计算电磁学, 时域有限元算法及其应用.
E-mail: 384873672@qq.com



魏兵(通讯作者) 男, 1970年7月出生于甘肃省陇南市. 现为西安电子科技大学物理与光电工程学院教授、博士生导师. 主要研究方向计算电磁学, 通信系统的电磁兼容问题, 复杂介质中的场与波等.
E-mail: bwei@xidian.edu.cn