

# 图像多尺度几何分析域隐马尔可夫树模型研究进展

王相海<sup>1,2</sup>, 宋若曦<sup>1</sup>, 曲思洁<sup>3</sup>, 穆振华<sup>1</sup>, 宋传鸣<sup>2</sup>

(1. 辽宁师范大学地理科学学院, 辽宁大连 116029; 2. 辽宁师范大学计算机科学与信息技术学院, 辽宁大连 116081;  
3. 辽宁师范大学数学学院, 辽宁大连 116029)

**摘要:** 多尺度几何分析(Multiscale Geometric Analysis, MGA)为图像的高维奇异特性提供了一种更优、更稀疏的表示方法,从而为更好地捕捉图像中的多方向边缘和纹理特性提供了有效的支撑. 图像MGA域隐马尔可夫树模型(Hidden Markov Tree, HMT)成功地对图像多尺度变换系数的统计特性及系数间的相关性进行刻画,为进一步挖掘图像更深层次特性提供了重要途径,在很大程度上提升了MGA在图像处理领域的有效性. 本文对图像MGA域HMT模型的研究进展进行综述. 先对传统MGA域HMT模型的发展进行分析和讨论,对其构建的一般过程进行了形式化描述;在此基础上,归纳了传统MGA域HMT模型存在的一些关键问题,并以此为导向对MGA变换域HMT模型的研究进展进行了分析和讨论;最后对MGA域HMT模型未来的发展情况进行了展望.

**关键词:** 多尺度几何分析; 隐马尔可夫模型; 图像统计建模; 概率图模型; 研究进展

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2022)01-0238-12

**电子学报URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.12263/DZXB.20200821

## Advance in Multiscale Geometric Analysis Image Hidden Markov Tree Model

WANG Xiang-hai<sup>1,2</sup>, SONG Ruo-xi<sup>1</sup>, QU Si-jie<sup>3</sup>, MU Zhen-hua<sup>1</sup>, SONG Chuan-ming<sup>2</sup>

(1. School of Geography, Liaoning Normal University, Dalian, Liaoning 116029, China;

2. School of Computer and Information Technology, Liaoning Normal University, Dalian, Liaoning 116081, China;

3. School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian, Liaoning 116029, China)

**Abstract:** Multiscale geometric analysis(MGA) provides a better representation for the high dimensional singular feature of images, which provides a better support for capturing the multidirectional edges and textures of the image. The image hidden Markov tree(HMT) model can efficiently depict the statistical properties of the image multiscale transform coefficients and the correlation among them, which helps to further utilizing the deep features of the image. The success of MGA-HMT greatly improved the effectiveness of MGA in the field of image processing. This paper reviews the research progress of MGA-HMT model. Firstly, the development of the traditional MGA-HMT model is analyzed and discussed, the general process of its construction is defined. Based on this, some key issues of the traditional MGA-HMT model are summarized. Guided by these issues, the research progress of the MGA-HMT has been further studied. Finally, the future development of the MGA-HMT is prospected.

**Key words:** multiscale geometric analysis; hidden Markov model; image statistical modeling; probability graph model; research advance

## 1 引言

近年来在调和理论基础上发展起来的多尺度几何分析(MGA)为图像和信号的稀疏表示提供了有效的工具支撑<sup>[1,2]</sup>. 多尺度几何分析也称后小波分析,它包含了计算调和分析和稀疏逼近的发展趋势. 多尺度

几何分析可以看作图像稀疏分解发展的一个分支,其目的是检测、表示、处理某些高维度空间数据<sup>[1]</sup>. Wavelet变换作为一种时频分析工具,实现了对一维信号“点奇异”特性的有效表示,但其对图像及高维信号中的“线、面奇异”特性却难以实现最优的非线性逼近. 后小

波时代出现的具有方向性的 MGA 方法<sup>[3-10]</sup>, 诸如 Ridgelet 变换<sup>[5]</sup>、Bandelet 变换<sup>[6]</sup>、Curvelet 变换<sup>[7]</sup>、Shearlet 变换<sup>[8]</sup>、Contourlet 变换<sup>[9]</sup>和 Directionlet 变换<sup>[10]</sup>等为更好地捕捉图像中的多方向边缘和纹理等信息提供了更加有效的逼近方案, 从而实现了包含高维奇异特性图像的有效稀疏表示. 图像经 MGA 变换后的子带具有方向性、局部性和多尺度特性, 这些特性为图像压缩、去噪、融合和边缘检测等实际应用奠定了基础. 近年来研究人员除了关注这些特性外, 对图像分解后系数的统计规律以及子带间系数的相关性进行了积极研究, 获得了图像更深层次的一些内在特性, 在很大程度上提高了图像处理的效果.

作为经典的统计模型, 隐马尔可夫模型 (Hidden Markov Model, HMM) 可对含有隐变量参数的马尔可夫过程进行描述, 从可观察的参数中确定该过程的隐含参数, 然后利用这些参数为后续应用作进一步的分析. 在实际应用中, HMM 有多种表现形式, 其概率图表现形式被称为隐马尔可夫树模型 (HMT)<sup>[11]</sup>. MGA 域图像隐马尔可夫树模型通过一种树形结构建立起多尺度变换系数的隐状态与其孩子之间的关系, 间接刻画了尺度间系数的相关性, 更深层次地挖掘了图像的多尺度和多方向特性. 图像 MGA 域 HMT 模型最早由 Crouse 等人<sup>[11]</sup>应用于 Wavelet 域, 提出了 Wavelet HMT 模型, 并应用于图像去噪以及纹理检索中. 在此之后, 学者们根据不同 MGA 变换系数的统计规律特性, 以及不同传递关系提出了不同形态的 MGA 域 HMT 模型<sup>[12-17]</sup>, 并将其应用于诸如图像去噪、图像融合、纹理检索及图像分割等多个图像处理领域<sup>[18-27]</sup>. 这些模型进一步揭示了 MGA 变换系数之间的关系, 更加有效地挖掘了图像 MGA 域的深度特性, 提高了图像处理效果.

本文对 MGA 域图像 HMT 模型 (记为 MGA-HMT) 进行综述. 首先, 对传统 MGA-HMT 模型的发展情况进行总结, 并给出了模型构建一般过程的形式化描述; 然后对传统 MGA-HMT 涉及的一些关键问题进行分析, 并以此为脉络对目前 MGA-HMT 模型中这些问题的解决方案和模型的发展状况进行分析和讨论; 最后对 MGA-HMT 模型未来的发展进行了展望.

## 2 传统 MGA-HMT 模型分析

传统 MGA 域统计模型更多关注 MGA 变换各子带内系数的关系<sup>[28-31]</sup>, 难以准确刻画不同尺度间系数的相关性. Crouse 等人<sup>[11]</sup>将 HMT 模型引入图像 Wavelet 变换尺度间系数中, 应用“二状态、零均值”的混合 Gaussian 分布对 Wavelet 系数进行描述, 并依据 Wavelet 系数的父子传递关系建立了 Wavelet-HMT 模型, 通过一种树形结构建立起系数的隐状态与其孩子之间的关系, 开

启了图像 MGA-HMT 这一新的研究领域.

### 2.1 MGA-HMT 模型基本架构—以 Wavelet 为例

#### (1) 图像 Wavelet 变换统计特性

图像经传统 Wavelet 变换, 可分解为一个低频子带和沿水平、竖直及对角线方向的三个高频子带. 统计研究表明, 图像 Wavelet 变换各高频子带系数具有“高尖峰、长拖尾”的分布统计特性 (如表 1 所示, 给出了三幅图像经 3 层 “db1” Wavelet 变换后第三层三个方向系数的直方图统计结果); Wavelet 可实现对图像的稀疏表示, 即绝大多数的系数值都在零点附近, 只有少量的系数幅值较大, 从而可用少量非零系数来表示图像.

由图 1 的统计结果也可以看出, Wavelet 变换各子带系数概率分布的均值为 0, 但其峰度值均大于 Gaussian 分布的峰度值 3, 因此单高斯分布对子带系数的刻画能力有限<sup>[32]</sup>. 为此, 研究人员用高斯尺度混合 (Gaussian Scale Mixtures, GSM) 模型中的“大”状态和“小”状态分别对其进行建模<sup>[33]</sup>, 即对数量相对较少的图像边缘区域附近的具有阶跃性变化的灰度值用 GSM 模型中的“大”状态建模, 而对数量相对较少的图像边缘以外的区域或平滑区域的灰度值用 GSM 模型中的“小”状态进行建模. 如此便可以用一个方差较大及一个方差较小的 Gaussian 分布和所形成的 Gaussian 混合分布对小波系数进行建模.

#### (2) Wavelet-HMT 模型的架构

对图像 Wavelet 变换方向子带系数  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , 进行 GSM 建模, 即

$$f(x_i) = \sum_{m=1}^2 p_{s_i}(m) f_{x_i|s_i}(x_i | s_i = m) \quad (1)$$


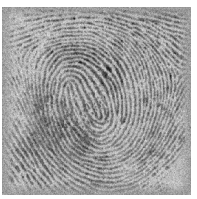

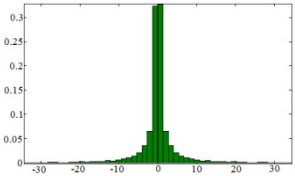
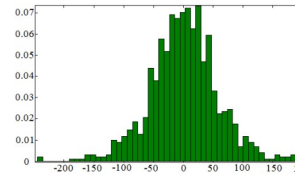
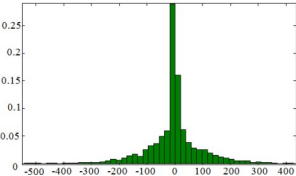
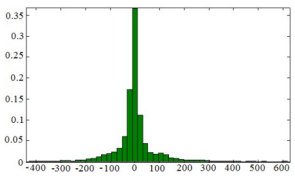
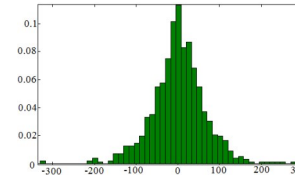
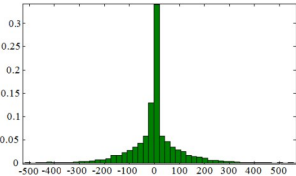
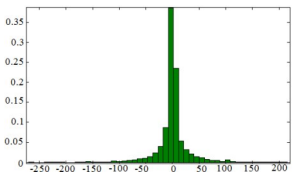
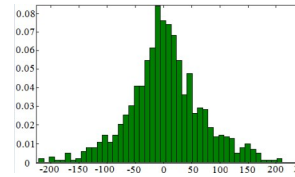
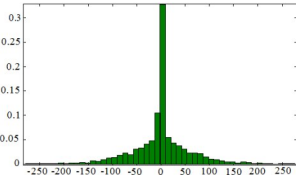
其中,  $s_i$  表示系数所处状态;  $p_{s_i}(m)$  表示系数分别取“大”“小”状态的初始状态概率分布, 且满足  $\sum_{m=1}^2 p_{s_i}(m) = 1$ ;  $f_{x_i|s_i}(x_i | s_i = m)$  表示处于不同状态时对应的 Gaussian 概率密度分布函数, 其表达式为

$$f_{x_i|s_i}(x_i | s_i = m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{i,m}^2}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_{i,m})^2}{2\sigma_{i,m}^2}\right] \quad (2)$$

其中,  $\mu_{i,m}$  和  $\sigma_{i,m}^2$  分别为 Gaussian 分布待估计均值和方差.

进一步, 将该 GMM 作为 HMT 模型的条件概率, 将其中的大、小状态作为马尔可夫传递隐状态, 将如图 1 所示的四叉树传递结构作为 HMT 模型传递方式 (图 1 中白色圆圈代表小波系数, 黑色圆圈代表当前系数所对应的隐状态), 构建 HMT 模型 (记为 WHMT), 并通过 EM 算法<sup>[34]</sup>对参数估计. WHMT 模型的参数  $\theta$  为

表1 图像 Wavelet 方向子带直方图统计

	Lena	Finger	Land
Original image			
Horizontal			
Vertical			
Diagonal			

$$\Theta = \left\{ P_{N_i}(m), \epsilon_{i,p(i)}^{m,n}, \sigma_{i,m}^2 \mid i=1, 2, \dots, p; m, n=1, 2 \right\} \quad (3)$$

其中,  $P_{N_i}(m)$  表示每棵树根节点的状态概率,  $m$  表示隐状态的个数, 这里  $m=2$ ;  $\epsilon_{i,p(i)}^{m,n} = f(s_i = m | s_{p(i)} = n)$  为状态转移概率矩阵, 代表父系数  $\rho(i)$  的状态为  $m$  的情况下其孩子系数为  $n$  的概率;  $\sigma_{i,m}^2$  表示小波各子带多元混合高斯分布大、小状态的方差。

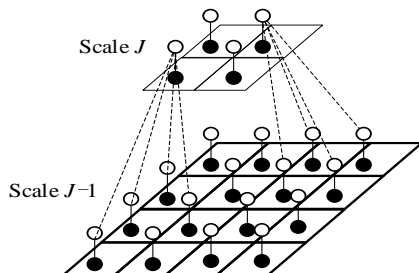


图1 Wavelet-HMT 树形结构示意图<sup>[11]</sup>

## 2.2 后小波时代 MGA-HMT 模型发展分析

在 Wavelet 域 HMT 的基础上, 人们对后小波时代 MGA 下的 HMT 进行了关注. 与 Wavelet 域 HMT 模型类似, 传统经典的 MGA-HMT 按照如下思路来构建模型: 依据图像 MGA 变换域子带的特性, 对变换域系数的广义邻域关系进行定义并确定系数的传播途径, 在此基础上建立相应 HMT 模型, 并对模

型参数进行估计. 该类 HMT 模型的发展情况介绍如下.

2006 年 Duncan 等人在文献[35]中对图像 Contourlet 分解后高频子带系数进行了研究, 发现 Contourlet 系数具有与图像 Wavelet 系数相类似的性质, 即不同尺度间的系数具有一定的持续性, 相同尺度、不同方向间的系数具有一定的聚集性, 据此提出了一种基于 Contourlet 域的 HMT 模型 (Contourlet-domain Hidden Markov Tree model, CHMT), 并将其应用于图像去噪和检索领域. CHMT 模型与 WHMT 模型之间存在较大差异. 首先, 与 Wavelet 变换相比, 图像 Contourlet 变换可以定义具有方向子带; 同时, 在 Contourlet 变换中, 每个方向子带可与多个更高频率的方向子带进行关联, 从而使系数之间的传递关系更加复杂. 图 2(a) 及图 2(b) 分别刻画了 Contourlet 系数之间的传递关系和 CHMT 模型的树形结构. 如图 2(a) 所示, Contourlet 系数通过尺度间二叉树结构进行关联, 进而通过隐状态建立 CHMT 树形结构. 非下采样 Contourlet 变换 (NonSubsampled Contourlet Transform, NSCT), 通过合并二维非下采样金字塔滤波器组和非下采样方向滤波器组实现图像的变换, 除有效保持 Contourlet 变换的多方向性和各向异性特性外, 还具有平移不变特性, 该特性在图像融合、去噪等应用中发挥着重要作用. 文献[16]对图像 NSCT 变

换系数的概率统计特性进行了分析,获得了图像 NSCT 变换的方向子带系数同样具有持续性和聚集性的结论,并通过一种树型结构确定了不同子带间的系数传递关系,进而构造了一种 NSCT 变换的 HMT 模型(NSCT-HMT),该模型在图像去噪应用中取得了比 WHMT 和 CHMT 更好的效果.除了 Contourlet 变换的 HMT 外,人们还对其他 MGA 的 HMT 进行了研究,比如:文献[17]对拓展离散 Shearlet 变换(Extended Discrete Shearlet Transform)的系数分布

规律与特性进行了研究,确定了一种“父子”系数传递关系,在此基础上构建了相应的 HMT 模型,并将其应用于图像去噪中;Jin 等人<sup>[14]</sup>通过对 Curvelet 变换进行研究,提出了基于 Curvelet 域的 HMT 模型,并将其应用于 SAR 图像去噪领域,取得了很好的效果;Hou 等人<sup>[15]</sup>提出了基于第二代 Bandelet 变换的 HMT 模型,并将其应用于图像分割中.基于上述分析,表 2 对该类 HMT 所采用的树形结构以及传递关系进行了梳理.

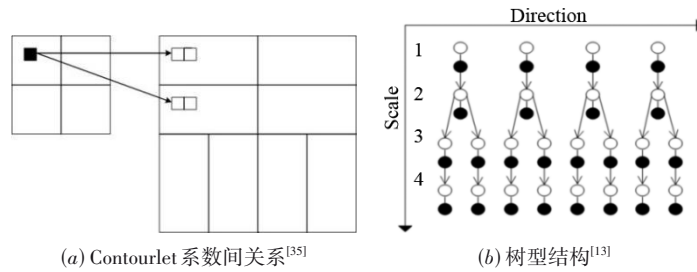


图2 CHMT 模型

表 2 经典 MGA-HMT 系数传递关系

变换域	树形结构	传递关系
Wavelet <sup>[11]</sup>	四叉树	父子传递,同方向,同位置
Bandelet <sup>[15]</sup>	四叉树	父子传递,同方向,同位置
Directionlet <sup>[36]</sup>	八叉树	父子传递,同方向,同位置
Curvelet <sup>[25]</sup>	四叉树	父子传递,同方向,同位置
Contourlet <sup>[35]</sup>	多为四叉树,可自由选择	父子传递,也可刻画不同方向,不同位置
NSCT <sup>[16]</sup>	多为二叉树,可自由选择	父子传递,也可刻画不同方向,不同位置
Shearlet <sup>[37]</sup>	多为四叉树,可自由选择	父子传递,也可刻画不同方向,不同位置
NSST <sup>[38]</sup>	多为二叉树,可自由选择	父子传递,也可刻画不同方向,不同位置

### 2.3 MGA-HMT 模型构建的一般过程

分析现有的传统 MGA-HMT 模型可以发现,该类模型的构建需满足以下两个条件:一是 MGA 变换域高频系数的概率分布直方图须具有“高尖峰、长拖尾”的特性;二是同一方向不同子带系数间具有一定的连续性和依赖性,这种状态变量的依赖性可以通过状态转移概率矩阵进行描述. MGA-HMT 通过系数隐状态的传递规律对系数间的马尔可夫性进行刻画,其构建的一般过程可归纳如下.

(1)将图像 MGA 变换域内系数分为两类:一类是数量非常多的小值系数,称为“小系数”,表示图像中的平滑区域或者背景区域信息;另一类是数量较少的大值系数,称为“大系数”,表示图像中的边缘或者纹理信息.

(2)利用两个 Gaussian 分布函数混合来描述 MGA 变换域系数,一个 Gaussian 分布函数描述“大系数”,另外一个描述系数中的“小系数”,从而建立起 MGA 变换

域系数的 GSM.

(3)建立变换域系数在相同方向、不同尺度高频子带间的树形结构,并利用状态转移概率矩阵  $\epsilon$  来描述这种树形结构间的状态状态转移概率.

(4)进一步形成 MGA-HMT 模型参数集,即

$$\Theta_{\text{MGA-HMT}} = \left\{ \begin{array}{l} \pi_m, \epsilon_{i,\rho(i)}^{m,n}, \theta \\ \left. \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, P; \\ m, n=1, 2, \dots, M; \\ \theta=\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r \end{array} \right\} \quad (4)$$

其中,  $\pi_m (m=1, 2, \dots, M)$  为初始概率分布矩阵;  $\epsilon_{i,\rho(i)}^{m,n} (i=1, 2, \dots, P; m, n=1, 2, \dots, M)$  为状态转移概率矩阵,其含义为在已知父节点  $\rho(i)$  的隐状态变量  $s_{\rho(i)}$  的值为  $n$  时子节点  $i$  的隐状态变量  $s_i$  的值为  $m$  的条件概率;  $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r\}$  为混合参数,满足  $f(\text{coef}) = P_{\theta}(\text{coef})$  (其中,  $f(\cdot)$  表示观察值概率密度值,  $P(\cdot)$  表示观察值概率密度分布函数,通常为混合高斯分布).

### 3 MGA-HMT 模型的几个关键问题及研究进展

前面介绍的传统 MGA-HMT 模型均采用了“二状态、零均值”的 GSM 作为 HMT 模型中刻画图像 MGA 系数的条件概率密度函数,并采用子带系数间的“父子”关系作为马尔可夫链传递规律,同时应用 EM 算法对模型的参数进行估计.然而研究发现,这种传统的 MGA-HMT 模型有如下几个关键问题值得关注.

(1) GSM 并非是对所有 MGA 子带系数刻画的最佳选择<sup>[39-41]</sup>,而在 HMT 模型的建模过程中,对各子带的概率密度分布表示至关重要.

(2) 采用“父子”传递关系描述 MAG 子带的传递特性仅仅刻画了 MGA 子带间系数一个维度的相关性,事实上图像 MGA 变换的子带系数除了这种“父子”之间的相关性外,往往还会存在其他维度的相关性,如“邻域”相关性和“堂兄弟”相关性等<sup>[42,43]</sup>,有时这些相关性会表现出更强的预测能力.

(3) 应用 EM 算法对 HMT 模型进行估计往往会在计算复杂度大的问题<sup>[44,45]</sup>.

(4) 传统 MGA-HMT 为 2D 模型,对诸如视频、高光光谱图像等具有三维性质的多维图像的处理受到限制<sup>[46,47]</sup>.

以上这些问题直接影响到 HMT 模型的预测精度、实施效率和应用范围.近年来这些问题引起了人们的关注,并且人们从不同方面提出了一些解决思路.本节以这些问题为导向,分别对其目前的研究进展进行分析和讨论.

#### 3.1 图像 MAG 变换系数的概率分布问题

由于不同 MGA 变换系数呈现的统计规律不同,因此其最佳概率密度分布函数也存在差异,这样 GSM 拟合并非对所有情况都是最佳的选择方案.目前从发表的文献来看,有两种方案可以解决该方面的问题:一种是最适概率密度分布法,另一种是多态 HMT 法.

最适概率密度分布法最早由 Goossens 等人在文献<sup>[39]</sup>中提出,其基本思路为寻找最适合当前 MGA 变换系数的概率分布模型,对其处理后用以替代传统 HMT 模型中的 GSM.常见应用的概率分布模型包括 BKF 分布<sup>[40]</sup>、Weibull 分布<sup>[41]</sup>、Cauchy 分布<sup>[48]</sup>和 Laplace 分布<sup>[49]</sup>等. Goossens 等人<sup>[39]</sup>首先对图像 Wavelet 变换中“感兴趣”系数和“无兴趣”系数进行定义(如图 3(a)所示),通过对 Wavelet 系数进行统计分析,获得了 BKF 分布可对 Wavelet 系数进行最好拟合的结论,并提出了一种 BKF 分布参数估计方法.使用 GSM 方法拟合出原始图像系数大、小为“无兴趣”系数和“感兴趣”系数的条件概率密度函数,在此基础上构建新型 Wavelet 域 HMT 模型,其树形结构如图 3(b)所示,黑色节点为小波系数, S-节

点和 Z-节点分别表示隐乘数和与小波系数关联的显著性.实线表示子带的父子传递关系,虚线表示空间相关性的传递关系,并通过 EM 算法对模型参数进行估计.该模型与传统 Wavelet-HMT 相比,更好地对 Wavelet 系数进行了拟合,在很大程度上提高了 W-HMT 模型的精度以及效率.

进一步,文献<sup>[40]</sup>利用几种经典的概率分布模型分别对拓展 Shearlet 系数进行拟合,并应用 KS (Kolmogorov Smirno) 值作为客观评价指标对拟合效果进行了比较,并在文献<sup>[39]</sup>的模型架构下通过增加系数尺度间平均圆锥比率概率密度的计算,建立新型 ES-HMT 模型,与文献<sup>[39]</sup>相比能更好地刻画系数之间的传递关系,同时利用 Shearlet 变换可以刻画更多的变换方向.然而,上述模型均采用单一概率密度分布刻画所有系数,事实上即使在同一种多尺度变换下,不同类型的图像其多尺度系数也会根据自身图像特性呈现特定的特征,这时构建一个自适应混合分布就显得尤为重要.文献<sup>[50]</sup>对 NSCT 方向子带系数的概率密度分布进行了研究,提出一种基于 NSCT 方向子带系数峰值自适应调整的混合 Gaussian-Cauchy 分布,该分布能根据 NSCT 子带系数特性通过权函数自适应地调整分布的表示,具有更高的拟合精度.在此基础上结合 NSCT-HMT 框架,提出一种新型 NSCT-HMT 模型,利用自适应分布对多尺度变换系数进行刻画可以实现对不同图像的多尺度变换系数更灵活的表示,很大程度上提高了拟合精度.此外, Sadeghigol 等人在文献<sup>[51]</sup>中提出了最适概率密度分布法实现的另一种思路,即通过选取混合函数来代替传统 HMT 模型中的 GSM,并由 EM 算法直接对参数进行估计.相似的研究工作在文献<sup>[52]</sup>中也有体现.

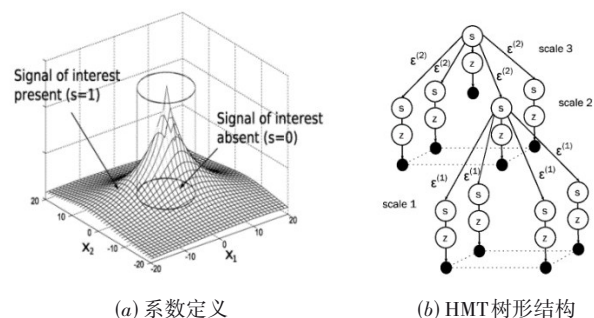


图3 Goossens HMT 模型<sup>[39]</sup>

多态 HMT 方法由 Zhang 等人在文献<sup>[53]</sup>中提出,为了进一步提高对 MGA 变换系数的刻画精度,将传统 HMT 模型的隐状态数量由 2 个扩展为 3 个,用“大”“中”和“小”状态分别对应图像边缘、半边缘和平滑区域,并称之为“三态”HMT 模型(如图 4 所示),其计算公式为

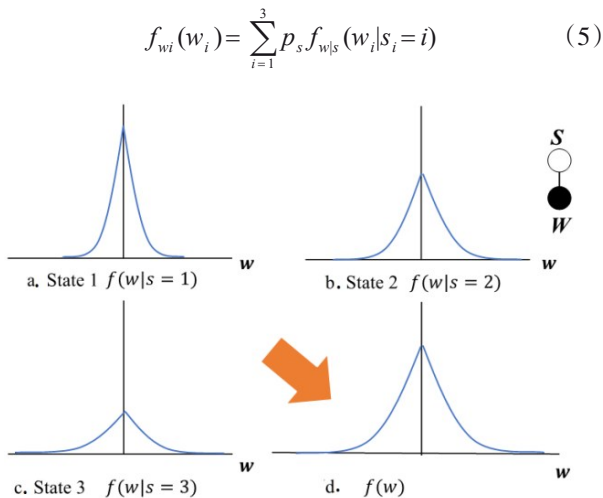


图4 三态隐Markov示意图<sup>[53]</sup>

三态 HMT 模型是对传统 HMT 模型的改进,通过增加隐状态数目,采用三状态 GSM 代替二状态 GSM,能好地拟合图像 MGA 系数的非高斯性,提高 HMT 模型参数估计的准确性,在一定程度上提高模型参数集和真值图像 MGA 变换系数的匹配程度. 该三态 HMT 模型为多尺度域多状态 HMT 模型的构建提供了思路,即通过实现对 HMT 模型中状态数量的改变更加精细地刻画图像特有的统计特性,以突破传统 HMT 模型中仅对边缘区域和平滑区域两类系数进行描述的限制.

综上所述,传统 MGA-HMT 模型采用“二状态、零均值”的 GSM 作为 HMT 模型的概率密度分布函数,但由于不同类型图像在不同 MGA 变换域下会呈现出不同的统计特性,因此概率密度分布函数的选取就显得尤为重要. 目前出现了两类改进模型分别从多概率分布选取和多状态拟合两个方面对传统模型进行了改进,在一定程度上提高了模型的预测精度,但总体而言这方面的工作还不是很多,特别是基于多态 HMT 模型的研究.

### 3.2 模型的多维预测问题

传统 MGA-HMT 模型使用“父子”传递关系描述 MGA 变换子带的传递特性,仅仅刻画了 MGA 变换尺度间子带系数的相关性,而忽视了其他子带间可能存在的一些传递特性,对这些特性进行挖掘并用以指导 HMT 模型的传递关系,势必会给 HMT 的精度提高带来帮助.

关于这方面的问题,文献[54]首次提出一种基于多传递关系的 HMT 模型即 HMT-3S 模型,并将其应用于图像分割处理中. 该模型借助于图分组技术将图像二维 Wavelet 变换的三个子带集结成一个树结构(如图 5 所示),融合了 Wavelet 三个子带间的相关性,除了像

传统 Wavelet-HMT 模型那样对 Wavelet 系数尺度间的相关性进行捕捉外,还能对子带内相关性进行很好的刻画. 该模型在传统 Wavelet-HMT 模型的基础上在尺度间传递的概率转移矩阵中增加了 3 个参数(共 8 个参数),从而使模型能够更准确地描述具有相同纹理区域的小波系数间的关系.

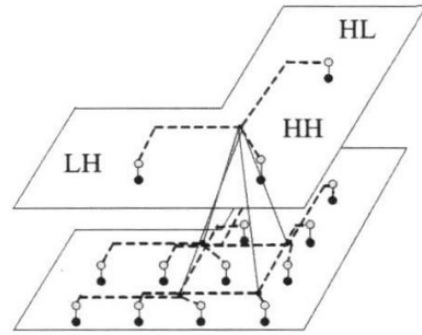
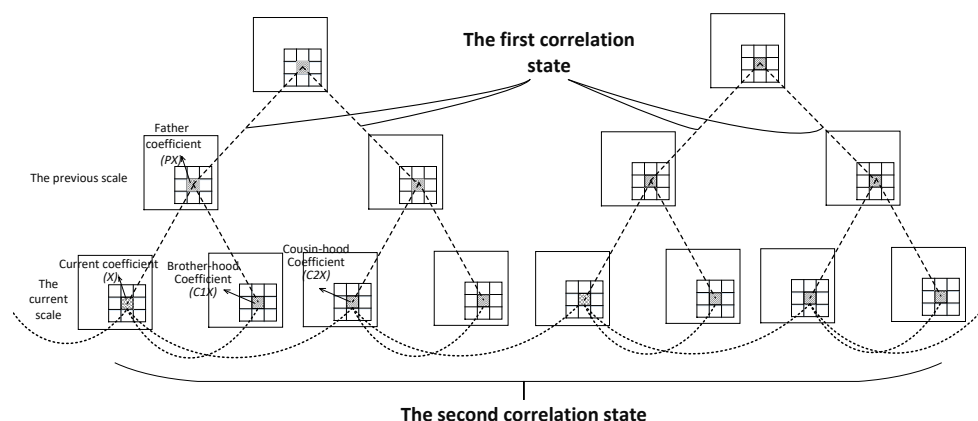


图5 HMT-3S模型<sup>[54]</sup>

然而,图像 Wavelet 分解子带的方向性有限,使得 HMT-3S 应用在图像分割上的分割结果区域一致性不强,分割边缘也不够清晰. 文献[55]将 HMT-3S 模型框架应用于 SAR 图像的第二代 Bandelet 变换系数 HMT 建模中,较好地解决了 Wavelet 域 HMT-3S 模型的图像分割结果区域一致性较差和分割边缘不够清晰问题. 此外,文献[42]也采用了该框架构建了 Contourlet 域的 HMT-3S 模型.

文献[43]提出一种基于系数多状态关联的 HMT 模型(M-NSST-HMT),首先,对 NSST 兄弟子带间的相关性进行统计,获得图像 NSST 系数兄弟子带间具有与父子系数间类似的统计特性,同时将兄弟间的持续性与聚集性作为 HMT 模型状态转移参考因素之一,其树形传递结构如图 6 所示,并采用互信息作为系数之间相关性的客观评价指标,建立自适应权重函数决定兄弟系数与父系数对当前系数影响的权重. M-NSST-HMT 模型被应用于图像去噪中,取得了较传统 NSST-HMT 更好的去噪效果,同时为进一步探索 MGA-HMT 模型的多状态传递关系提供了一种思路. 文献[56]重新定义了 NSCT 方向子带系数的广义邻域关系,并对其联合概率密度分布进行了研究,获得 NSCT 系数与其四邻域系数存在最强相关性的结论;然后,对 NSCT 系数与其四邻域系数分别应用 Gaussian Copula 建模,并根据其 Copula 熵值,建立基于 Copula 熵的多元 GSM,克服了传统 HMT 模型只考虑尺度间传递关系而忽略了尺度内传递关系的问题,结合隐马尔可夫树模型架构,构建了一种基于 Copula 熵多元混合高斯分布的隐马尔可夫树模型.

图6 M-NSST-HMT树形传递结构<sup>[43]</sup>

综上所述,深入挖掘图像MGA变换系数的多维度相关性,用以指导相应HMT模型的状态传递过程,对提升模型的预测能力具有很大帮助。

### 3.3 参数的快速计算问题

EM算法<sup>[34]</sup>又被称为期望最大化算法,对依赖于无法观测的隐性变量的概率模型,该算法可有效地寻找参数最大似然估计或者最大后验估计。传统MGA-HMT模型大都采用EM算法对参数进行训练,然而该算法需要通过多次“期望-最大化”的迭代才能实现<sup>[57]</sup>,从而导致HMT模型的训练过程具有较高的计算复杂度,这在一定程度上影响了模型的运算效率,限制了HMT模型的实际应用。针对该类问题,文献[44]提出了一种无需模型参数训练的基于快速分类的Wavelet域HMT模型的参数估计方法,对每个子带的Wavelet系数根据空间自适应阈值被分为两类,分别对应于传统HMT模型中GSM模型的“大状态”和“小状态”,然后利用局部统计量实现对模型参数的估计。该方法为HMT模型的参数估计提供了一种新思路。在此基础上,文献[45]将该模型框架应用于双树复小波变换中,提出了一种非训练复小波HMT模型,并将其应用于图像去噪中。与传统HMT模型相比,该模型具有较高的计算效率,同时也取得了很好的去噪效果。

综上所述,在MGA-HMT模型中,参数的训练和估计效率直接影响到模型的实际应用。尽管传统MGA-HMT模型中所采用的EM算法可有效地保证对参数的估计精度,但其存在参数训练计算复杂度高的弱点。如何有效地提高模型参数的计算效率是一个需要关注的问题,而目前这方面的研究文献还不是很多,还有待更深入的研究。

### 3.4 模型的3D延拓问题

传统MGA-HMT模型是针对2D静态图像提出的,若直接应用于诸如视频、高光谱影像和计算机断层扫描医学图像等3D数据,只能逐帧(波段)对图像进行处

理,这将使模型的执行效果和效率受到极大的限制。目前,有文献报道了两类方法可实现对传统MGA-HMT模型的3D延拓:一种是基于多维度预测的3D-HMT模型构建方法,另一种是基于3D多尺度分析的3D-HMT模型构建方法。

对于第一种方案,文献[46]从空间维和光谱维两方面对高光谱(HyperSpectral, HS)影像NSST高频方向子带的特性进行研究,通过对HS波段影像NSST高频方向子带系数的概率密度分布进行估计,获得了HS影像NSST系数具有“高尖峰、长拖尾”的特性;通过对HS波段影像空间维和光谱维NSST高频方向子带系数的广义邻域相关性进行统计分析,获得了HS影像NSST高频子带系数在空间维和光谱维均具有“聚集性”和“持续性”的特性,即空间维不同尺度、相同方向高频子带中的父子系数,以及光谱维高频子带系数与随后相邻几个波段对应系数的状态均具有一定的相关性;在此基础上提出了一种HS影像NSST域的隐马尔可夫森林模型(NSST-HMF)对HS影像NSST系数的相关性进行刻画(图7给出了NSST-HMF空-谱维方向子带间系数传递关系),第一次在HS影像HMT的预测结构上同时考虑了空间维和光谱维两种状态的相关性来协同指导HMT模型的系数预测,提高了模型的预测准确性。

近年来3D-MGA作为MGA领域的研究热点受到关注<sup>[4]</sup>。经典3D-MGA工具包括Surfacelet变换<sup>[58]</sup>、3D-Wavelet变换<sup>[59]</sup>和3D-Shearlet变换<sup>[60]</sup>等。文献[47]提出一种Surfacelet域的3D-HMT模型用于视频烟雾检测。Surfacelet延伸了2D Contourlet变换的思想,首先应用“沙漏型”滤波器对视频进行三个方向的滤波,再用“棋盘形”滤波器和重采样矩阵建立方向滤波器,其相应频带划分如图8(a)所示。所构建的3D-HMT模型采用了GSM对每个子带系数进行描述,再通过EM算法对模型参数进行估计,结合SVM支持向量机模型实现对烟雾视频的烟雾检测,实验结果验证了所提3D-HMT模型的有效性。

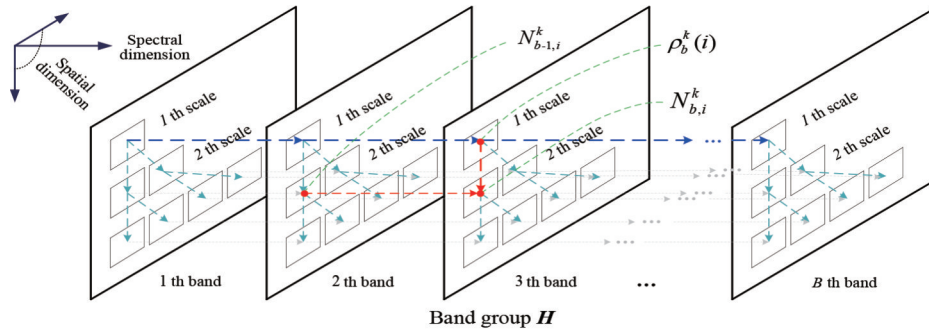


图7 NSST-HMF 多维度系数传递关系示意图<sup>[46]</sup>

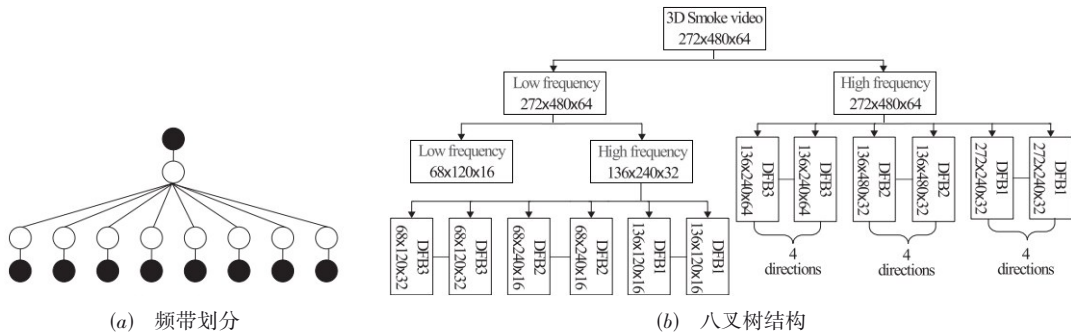


图8 Surfacelet的频带划分和八叉树结构<sup>[47]</sup>

综上所述, 尽管目前关于 MGA-HMT 模型 3D 延拓方面的文献还不是很多, 但上述两个文献为 3D-HMT 模型的构建和应用提供了思路。

#### 4 总结与展望

随着 MGA 工具的不断发展和其系数分布、传递规律的研究显得愈加重要。20 世纪 90 年代以来, MGA-HMT 模型成为图像统计模型领域的一个重要研究方向。本文以传统 MGA-HMT 模型的一般架构、MGA-HMT 模型所涉及的关键问题及其发展为脉络对 MGA-HMT 模型进行了综述。首先, 以 Wavelet-HMT 模型为例对 MGA-HMT 模型的基本架构进行介绍, 同时对传统 MGA-HMT 模型的发展情况进行了分析; 然后, 对传统 MGA-HMT 模型的一些关键问题进行了阐述, 并对每一问题的研究进展、解决思路进行了分析和讨论。近年来尽管 MGA-HMT 模型受到关注并在很多图像处理领域得到了很好的应用, 然而正像本文第 3 节所讨论的那样, MGA-HMT 模型中有很多关键问题的研究尚处于起始阶段, 特别是随着 MGA 理论和工具的不断发展和, 这些问题有待进行更深入的研究。本文认为未来 MGA-HMT 模型研究领域在以下 4 个方面的工作应该受到重视并得以发展。

##### (1) MGA-HMT 模型有效性评价指标体系的建立

尽管 MGA-HMT 模型的基本理论架构已趋于完善, 但对模型的有效性评价还停留在模型后续应用的有效

性评价上。事实上, 同一模型应用于不同领域其性能可能会产生较大的差异。MGA-HMT 模型的主要功能是对图像多尺度系数之间的传递关系进行刻画, 这样仅通过实际应用效果而对模型优劣进行评判势必会具有一定的片面性。直接针对 MGA-HMT 模型建立评价指标体系不仅有利于 MGA-HMT 模型自身的发展和对多尺度分解系数相关性的判断, 而且也会为 HMT 模型的实际应用提供必要的指导。

##### (2) MGA-HMT 模型与学习方法的结合

近年来, 深度学习、字典学习等基于学习的图像处理方法<sup>[61, 62]</sup>展现出旺盛的生命力。HMT 模型作为经典的概率图模型, 可以对图像特征的传递关系进行很好的刻画, 而学习方法的实质也是对图像特征进行提取, 因此如何建立合理的 HMT 模型并与图像的学习过程相关联是值得期待的工作。目前这方面的研究工作已初露端倪<sup>[63, 64]</sup>, 相信未来这方面会得到很好的发展。

##### (3) 适应新 MGA 发展的 HMT 模型构建

MGA 为图像提供了一种具有方向性的稀疏表示方法。继 Wavelet 变换对图像中奇异点特性进行有效表示之后, 后 Wavelet 时代的 MGA 为具有面奇异或线奇异的高维奇异特性提供了一种更优或更稀疏的表示方法, 从而为更好地捕捉图像中的多方向边缘和纹理等特性提供了有效的支撑。但 MGA 发展的脚步却并没有停止, 比如 U-系统<sup>[65]</sup>、V-系统<sup>[66]</sup>等后 MGA 方法正在氤氲而生, 同时也为图像的稀疏表示提供了新的支撑。挖掘

这些后 MGA 特性,探究其系数之间的传递及依赖关系,进而建立相应的 HMT 模型,对于促进这些 MGA 的发展、更好地满足不同应用领域的需求具有重要意义.

#### (4)3D-MGA 下 3D-HMT 模型的发展

2D-MGA、3D-MGA 的研究起步较晚,目前发展尚未完备,许多问题还在探索中<sup>[4]</sup>. 已出现的 3D-Wavelet 变换、3D-Contourlet 变换和 3D-Shearlet 变换等 3D-MGA 变换<sup>[4,67,68]</sup>在对 3D 图像(影像)的稀疏表示和特征刻画上拥有独特的优势. 然而目前研究这些 3D-MGA 系数统计规律的文献还很少,而基于 3D-MGA 的 3D-HMT 模型则更少. 相信随着高光谱影像、核磁共振影像和计算机断层扫描影像等 3D 图像(影像)处理和应用需求的快速增加,该领域的研究将会得到很好的发展.

#### 参考文献

- [1] 焦李成. 图像多尺度几何分析理论与应用[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2008.
- [2] SINGH R, NIGAM S, SINGH A K, et al. Wavelet Transforms: From Classical to New Generation Wavelets[M]. Cham, GER: Springer, 2018.
- [3] VYAS A, YU S, PAIK J. Multiscale Transforms with Application to Image Processing[M]. Singapore, Singapore: Springer Singapore, 2018.
- [4] 宋传鸣, 赵长伟, 刘丹, 等. 3D 多尺度几何分析研究进展[J]. 软件学报, 2015, 26(5): 1213-1236.  
SONG C M, ZHAO C W, LIU D, et al. Advances in three-dimensional multiscale geometrical analysis[J]. Journal of Software, 2015, 26(5): 1213-1236. (in Chinese)
- [5] CANDES E J. Ridgelets: theory and applications[EB/OL]. [2020]. <https://stat.uw.edu/seminars/ridgelets-theory-and-applications>.
- [6] LE PENNEC E, MALLAT S. Bandelet image approximation and compression[J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2005, 4(3): 992-1039.
- [7] CANDÈS E J, DONOHO D L. Curvelets and curvilinear integrals[J]. Journal of Approximation Theory, 2001, 113(1): 59-90.
- [8] EASLEY G, LABATE D, LIM W Q. Sparse directional image representations using the discrete shearlet transform [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 25(1): 25-46.
- [9] DO M N, VETTERLI M. Contourlets: A new directional multiresolution image representation[C]//Conference Record of the Thirty-Sixth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Rochester, NY, USA: IEEE, 2002: 497-501.
- [10] VELISAVLJEVIC V, BEFERULL-LOZANO B, VETTERLI M, et al. Directionlets: Anisotropic multidirectional representation with separable filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(7): 1916-1933.
- [11] CROUSE M S, NOWAK R D, BARANIUK R G. Wavelet-based statistical signal processing using hidden Markov models[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(4): 886-902.
- [12] SHAHDOOSTI H R, HAZAVEI S M. Image denoising in dual contourlet domain using hidden Markov tree models[J]. Digital Signal Processing, 2017, 67: 17-29.
- [13] WANG X H, CHEN M Y, SONG C M, et al. Contourlet HMT model with directional feature[J]. Science China Information Sciences, 2012, 55(7): 1563-1578.
- [14] 金海燕, 焦李成, 刘芳. 基于 Curvelet 域隐马尔可夫树模型的 SAR 图像去噪[J]. 计算机学报, 2007, 30(3): 491-497.  
JIN H Y, JIAO L C, LIU F. SAR image de-noising based on curvelet domain hidden Markov tree models[J]. Chinese Journal of Computers, 2007, 30(3): 491-497. (in Chinese)
- [15] 侯彪, 徐婧, 刘凤, 等. 基于第二代 Bandelet 域隐马尔可夫树模型的图像分割[J]. 自动化学报, 2009, 35(5): 498-504.  
HOU B, XU J, LIU F, et al. Image segmentation using second generation bandelet-domain hidden Markov tree models[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(5): 498-504. (in Chinese)
- [16] 王相海, 倪培根, 苏欣, 等. 非下采样 Contourlet HMT 模型[J]. 中国科学: 信息科学, 2013, 43(11): 1431-1444.  
WANG X H, NI P G, SU X, et al. The nonsubsampling Contourlet HMT model[J]. Scientia Sinica (Informationis), 2013, 43(11): 1431-1444. (in Chinese)
- [17] WANG X Y, LIU Y C, YANG H Y. Image denoising in extended Shearlet domain using hidden Markov tree models[J]. Digital Signal Processing, 2014, 30: 101-113.
- [18] CHEN P Y, ZHANG Y C, JIA Z H, et al. Remote sensing image change detection based on NSCT-HMT model and its application[J]. Sensors, 2017, 17(6): 1295.
- [19] HANZOULI-BEN SALAH H, LAPUYADE-LAHORGUE J, BERT J, et al. A framework based on hidden Markov trees for multimodal PET/CT image co-segmentation[J]. Medical Physics, 2017, 44(11): 5835-5848.
- [20] QIAO Y L, ZHAO G C. Modified wavelet domain hidden tree model for texture segmentation[C]//Advanced Multimedia and Ubiquitous Engineering. Singapore, Sin-

- gapore: Springer, Singapore, 2016: DOI:10.1007/978-981-10-1536-6\_81.
- [21] MURINTO, ARIBOWO E. Image segmentation using hidden markov tree methods in recognizing motif of batik [J]. *Journal of Theoretical & Applied Information Technology*, 2016, 85(1): 27-33.
- [22] EL-TAWEL G S, HELMY A K. An edge detection scheme based on least squares support vector machine in a contourlet HMT domain[J]. *Applied Soft Computing*, 2015, 26: 418-427.
- [23] HUANG Z H, XIA L. Images denoising and enhancement based on dyadic wavelet domain hidden Markov models and interpolation[J]. *International Journal of Signal Processing, Image Processing and Pattern Recognition*, 2015, 8(9): 181-188.
- [24] CUI D, LIU M, HU L, et al. The application of wavelet-domain hidden Markov tree model in diabetic retinal image denoising[J]. *The Open Biomedical Engineering Journal*, 2015, 9: 194-198.
- [25] HANZOULI H, LAPUYADE-LAHORGUE J, MONFRINI E, et al. PET/CT image denoising and segmentation based on a multi observation and a multi scale Markov tree model[C]//2013 IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (2013 NSS/MIC). Seoul, Korea (South): IEEE, 2013: 1-4.
- [26] HU K, YANG W, GAO X P. Microcalcification diagnosis in digital mammography using extreme learning machine based on hidden Markov tree model of dual-tree complex wavelet transform[J]. *Expert Systems With Applications*, 2017, 86: 135-144.
- [27] KARKI R, ALSADOON A, PRASAD P W C, et al. A novel algorithm based on contourlet transform for extracting paint features to determine drawing style and authorship[J]. *Indian Journal of Science and Technology*, 2017, 10(12): 1-11.
- [28] 王相海, 赵晓阳, 毕晓昀, 等. 小波域多角度轮廓模板变分模型的单幅图像超分辨率重建[J]. *电子学报*, 2018, 46(9): 2256-2262.  
WANG X H, ZHAO X Y, BI X Y, et al. Single image super-resolution reconstruction approach based on multi-angle contour templates variational calculus model in wavelet domain[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2018, 46(9): 2256-2262. (in Chinese)
- [29] ARGENTI F, BIANCHI T, ALPARONE L. Multiresolution MAP despeckling of SAR images based on locally adaptive generalized Gaussian pdf modeling[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(11): 3385-3399.
- [30] GAO Q W, LU Y X, SUN D, et al. Directionlet-based denoising of SAR images using a Cauchy model[J]. *Signal Processing*, 2013, 93(5): 1056-1063.
- [31] HILL P R, ACHIM A M, BULL D R, et al. Dual-tree complex wavelet coefficient magnitude modelling using the bivariate Cauchy-Rayleigh distribution for image denoising[J]. *Signal Processing*, 2014, 105: 464-472.
- [32] 邓磊. SAR 图像处理方法-Contourlet 域隐马尔可夫模型的应用[M]. 北京: 测绘出版社, 2009.
- [33] LIU M, WU Y, ZHANG P, et al. SAR target configuration recognition using locality preserving property and Gaussian mixture distribution[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2013, 10(2): 268-272.
- [34] KUSHARY D. The EM algorithm and extensions[J]. *Technometrics*, 1998, 40(3): 260.
- [35] PO D D Y, DO M N. Directional multiscale modeling of images using the contourlet transform[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(6): 1610-1620.
- [36] JING B, ZHAO J Q, JIAO L. Image segmentation using Directionlet-domain hidden Markov tree models[C]//Proceedings of 2011 IEEE CIE International Conference on Radar. Chengdu, China: IEEE, 2011: 1615-1618.
- [37] SHARMA A, CHUGH S. An efficient shearlet Bayesian network based approach for image denoising[J]. *International Journal of Computer Applications*, 2015, 128(10): 15-20.
- [38] ELTAWEL G S, HELMY A K. Fusion of multispectral and full polarimetric SAR images in NSST domain[J]. *Computer Science Journals*, 2014, 8(6): 497-506.
- [39] GOOSSENS B, PIZURICA A, PHILIPS W. Removal of correlated noise by modeling the signal of interest in the wavelet domain[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, 18(6): 1153-1165.
- [40] WANG X Y, ZHANG N, ZHENG H L, et al. Extended shearlet HMT model-based image denoising using BKF distribution[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2016, 54(3): 301-319.
- [41] GONGSIN I E, SAPORU F W O. A bivariate conditional Weibull distribution with application[J]. *Afrika Matematika*, 2020, 31(3/4): 565-583.
- [42] 李晓峰, 徐军, 罗积军, 等. 基于 Contourlet 域 HMT-3S 模型的激光主动成像图像分割[J]. *红外与激光工程*, 2012, 41(2): 531-536.  
LI X F, XU J, LUO J J, et al. Laser active image segmen-

- tation based on Contourlet-domain hidden Markov trees-3S model[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2012, 41(2): 531-536. (in Chinese)
- [43] 王相海, 赵晓阳, 朱毅欢, 等. 系数多状态关联的图像 NSST-HMT 模型[J]. *中国科学: 信息科学*, 2019, 49(6): 708-725.  
WANG X H, ZHAO X Y, ZHU Y H, et al. Image NSST-HMT model with associated multi-state coefficients[J]. *Scientia Sinica (Informationis)*, 2019, 49(6): 708-725. (in Chinese)
- [44] 肖志云, 文伟, 彭思龙. 小波域 HMT 模型参数的快速估计及其在图像降噪中的应用[J]. *计算机应用*, 2004, 24(12): 7-10.  
XIAO Z Y, WEN W, PENG S L. Fast estimation of parameter in wavelet-domain HMT model and its application in image denoising[J]. *Computer Applications*, 2004, 24(12): 7-10. (in Chinese)
- [45] YAN F X, PENG S L, CHENG L Z. Dual-tree complex wavelet hidden Markov tree model for image denoising [J]. *Electronics Letters*, 2007, 43(18): 973.
- [46] WANG X H, MU Z H, SONG R X, et al. A hyperspectral image NSST-HMF model and its application in HS-pan-sharpening[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2020, 58(7): 4803-4817.
- [47] YE W, ZHAO J H, WANG S, et al. Dynamic texture based smoke detection using Surfacelet transform and HMT model[J]. *Fire Safety Journal*, 2015, 73: 91-101.
- [48] SAHU S M, SINGH H V, KUMAR B, et al. De-noising of ultrasound image using Bayesian approached heavy-tailed Cauchy distribution[J]. *Multimedia Tools and Applications*, 2019, 78(4): 4089-4106.
- [49] MENG H, WANG K, GAO Y, et al. Adaptive Gaussian weighted Laplace prior regularization enables accurate morphological reconstruction in fluorescence molecular tomography[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2019, 38(12): 2726-2734.
- [50] WANG X H, SONG R X, SONG C M, et al. The NSCT-HMT model of remote sensing image based on Gaussian-cauchy mixture distribution[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 66007-66019.
- [51] SADEGHIGOL Z, KAHAEI M H, HADDADI F. Generalized beta Bayesian compressive sensing model for signal reconstruction[J]. *Digital Signal Processing*, 2017, 60: 163-171.
- [52] QIAO Y L, ZHAO G C. Texture segmentation using Laplace distribution-based wavelet-domain hidden Markov tree models[J]. *Entropy*, 2016, 18(11): 384.
- [53] 张骥祥. 小波变换和马尔可夫随机场在图像处理中的应用研究[D]. 天津: 天津大学, 2007.  
ZHANG J X. Research on the Application of Wavelet Transform and Markov Random Field to Image Processing [D]. Tianjin, China: Tianjin University, 2007. (in Chinese)
- [54] FAN G L, XIA X G. Wavelet-based texture analysis and synthesis using hidden Markov models[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2003, 50(1): 106-120.
- [55] 侯彪, 翟艳霞, 焦李成. 用于 SAR 图像分割的第二代 Bandelet 域 HMT-3S 模型[J]. *红外与毫米波学报*, 2010, 29(2): 145-149.  
HOU B, ZHAI Y X, JIAO L C. Second generation bandelet-domain hidden Markov tree-3s model for sar image segmentation[J]. *Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 2010, 29(2): 145-149. (in Chinese)
- [56] WANG X H, SONG R X, MU Z H, et al. An image NSCT-HMT model based on copula entropy multivariate Gaussian scale mixtures[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2020, 193: 105387.
- [57] MEILIJSON I. A fast improvement to the em algorithm on its own terms[J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 1989, 51(1): 127-138.
- [58] ZHANG Q, WANG L, MA Z K, et al. A novel video fusion framework using surfacelet transform[J]. *Optics Communications*, 2012, 285(13/14): 3032-3041.
- [59] LATIF G, BUTT M M, KHAN A H, et al. Multiclass brain Glioma tumor classification using block-based 3D Wavelet features of MR images[A]. 2017 4th International Conference on Electrical and Electronic Engineering (ICEEE)[C]. Ankara, Turkey: IEEE, 2017: 333-337.
- [60] GUO K H, LABATE D. Analysis and detection of surface discontinuities using the 3D continuous shearlet transform[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2011, 30(2): 231-242.
- [61] ZHU X X, TUIA D, MOU L C, et al. Deep learning in remote sensing: A comprehensive review and list of resources[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine*, 2017, 5(4): 8-36.
- [62] LIU Y, CHEN X, WANG Z F, et al. Deep learning for pixel-level image fusion: Recent advances and future prospects[J]. *Information Fusion*, 2018, 42: 158-173.
- [63] ALKAWAZ M H, SEONG C C, RAZALLI H. Handwriting detection and recognition improvements based on hidden Markov model and deep learning[C]//2020 16th IEEE

International Colloquium on Signal Processing & Its Applications (CSPA). Langkawi, Malaysia: IEEE, 2020: 106-110.

- [64] KASUGAI T, TSUZUKI Y, SAWADA K, et al. Image recognition based on convolutional neural networks using features generated from separable lattice hidden Markov models[C]//2018 Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (AP-SIPA ASC). Honolulu, HI, USA: IEEE, 2018: 324-328.
- [65] 宋瑞霞, 李成华, 王小春, 等. V-系统的小波函数的数学结构[J]. 中国科学: 数学, 2016, 46(6): 867-876.  
SONG R X, LI C H, WANG X C, et al. Mathematical structure of wavelet functions of the V-system[J]. Scientia Sinica (Mathematica), 2016, 46(6): 867-876. (in Chinese)
- [66] 宋瑞霞, 孙坦坦, 孙相东, 等. 广义V-系统的构造及相应的快速变换[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2018, 30(5): 808-815.  
SONG R X, SUN T T, SUN X D, et al. The construction of generalized V-system and the corresponding fast transformation[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2018, 30(5): 808-815. (in Chinese)
- [67] MALAFRONTÉ D, VITO E, ODOÑE F. Space-time signal analysis and the 3D shearlet transform[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2018, 60(7): 1008-1024.
- [68] LI Z Y, BORS A G. Steganalysis of meshes based on 3D wavelet multiresolution analysis[J]. Information Sciences, 2020, 522: 164-179.

#### 作者简介



王相海 男, 1965年1月出生于吉林省汪清县. 现为辽宁师范大学计算机与信息技术学院、地理科学学院教授、博士生导师. 主要研究方向为多媒体信息处理及遥感影像处理.

E-mail: xhwang@lnnu.edu.cn



宋若曦 女, 1994年12月出生于内蒙古自治区通辽市. 现为辽宁师范大学地理科学学院地图学与地理信息系统专业博士研究生. 主要研究方向为高光谱影像处理.

E-mail: srxlnnu@outlook.com