

最优高斯整数周期组间互补序列集的构造

刘 凯^{1,2},倪 佳^{1,2},焦佳旺^{1,2},李玉博^{1,2}

(1. 燕山大学信息科学与工程学院,河北秦皇岛 066004; 2. 河北省信息传输与信号处理重点实验室,河北秦皇岛 066004)

摘要: 本文在高斯整数集上,基于完备高斯整数序列和正交矩阵,构造了一类最优周期组间互补序列集,可实现任意长度的零相关区内互补码数量和互补码集数量的灵活选择. 通过设计 2 阶和 3 阶核正交矩阵,将其对角拼接与完备高斯整数过滤,得到一类任意阶正交矩阵. 利用该正交矩阵,结合任意长完备高斯整数序列,可构造零相关区与完备序列等长的周期组间互补序列集,其参数达到理论界. 构造结果与已有文献比较,参数可在无条件限制下实现最优. 组间互补序列集应用于多载波系统可消减邻区间的通信串扰并提升用户容量.

关键词: 组间互补序列集; 正交矩阵; 完备高斯整数序列; 理论界

中图分类号: TN92

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2022)08-1866-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20210600

Construction of Optimal Gaussian Integer Periodic Inter-Group Complementary Sequence Sets

LIU Kai^{1,2}, NI Jia^{1,2}, JIAO Jia-wang^{1,2}, LI Yu-bo^{1,2}

(1. School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China;

2. Hebei Province Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

Abstract: Based on perfect Gaussian integer sequences and orthogonal matrices, a class of optimal periodic inter-group complementary (IGC) sequence set is constructed on the Gaussian integer set, which can realize the flexible number of complementary codes and complementary code sets within any zero-correlation zone length. By designing 2-order and 3-order kernel orthogonal matrices, splicing them on the diagonal way and filtering with perfect Gaussian integer sequences, a class of orthogonal matrices of arbitrary order is obtained. By using the orthogonal matrices and perfect Gaussian integer sequences of arbitrary length, the periodic inter-group complementary sequence set can be constructed, in which the length of zero correlation zone equals to that of perfect sequence and the set parameters reach the theoretical bound. Compared with the existing literature, the construction results show that the parameters can be optimized without any restriction. IGC sequence sets can be applied to the multi-carrier code division multiple access communication system to reduce adjacent cell interference and increase user capacity.

Key words: inter-group complementary sequence sets; orthogonal matrices; perfect Gaussian integer sequence; theoretical bound

1 引言

互补序列集在多载波码分多址 (Multi-Carrier Code Division Multiple Access, MC-CDMA) 系统和多输入多输出码分多址 (Multi-Input and Multi-Output Code Division Multiple Access, MIMO-CDMA) 系统中有着重要应用,其理想的自相关和互相关特性可在一定程度上抑制系统的多径干扰和多址干扰^[1-3]. 但是,互补序列集中互补码的数量受限于子序列数量,因此大大限制了通信系

统容量. 为此, Fan 等人^[4]提出了零相关区 (Zero Correlation Zone, ZCZ) 互补序列集,突破了互补码的数量限制,可使扩频系统在一定同步范围内大大提升系统容量. 为了满足通信容量增长的同时减少通信小区间的邻区干扰, Li 等人^[5]提出了组间互补 (Inter-Group Complementary, IGC) 序列集. 它是由多个 ZCZ 互补序列集组成的集合,每个 ZCZ 互补序列集被称为一个组. 同一组内的 ZCZ 互补序列在给定码片时延 (即 ZCZ 范围) 内,具有理

收稿日期: 2021-05-11; 修回日期: 2021-08-16; 责任编辑: 王天慧

基金项目: 河北省自然科学基金 (No.F2020203043); 河北省高等学校科学技术研究项目 (No.ZD2020179, No.ZD2021105)

想的自相关和互相关性质;而不同组的 ZCZ 互补序列则所有码片时延内都具有理想的互相关特性. IGC 序列集应用于多载波扩频系统时,将不同码组对应于不同小区,组中的 ZCZ 互补码分配给小区内的用户. 这样,不仅提升了用户容量,又降低了小区间的邻区干扰. 与基于传统互补码的多载波扩频系统相比,IGC-CDMA 系统在保证抗干扰能力的同时可获得更大的用户容量,因此,IGC 集合在多载波技术中具有一定的应用前景.

IGC 序列集的设计分为周期 IGC 和非周期 IGC 集合设计. 2008 年, Li 等人^[5]最先基于完备互补序列构造了一类非周期 IGC 序列集,直到 2018 年,文献^[6,7]分别基于正交矩阵和二阶广义布尔函数对非周期 IGC 序列集的构造法给出了进一步的研究,获得了不同的集合参数. 较之非周期 IGC 集合,周期 IGC 序列集的构造结果相对丰富. 2011 年,文献^[8]利用交织技术,基于完备互补码和正交矩阵,首先构造了周期 IGC 序列集,实现了 ZCZ 的灵活选择,在满足一定条件下,序列集参数可以达到理论界. 而后文献^[9]基于 ZCZ 非周期互补序列集和完备周期互相关码,构造了一类没有满足理论界的周期 IGC 序列集,但序列集中的组数和每组内的序列数拥有更大的自由度. 文献^[10]基于完备互补码和正交矩阵以及文献^[11]基于 ZCZ 周期互补序列集和非相关序列集,均利用交织技术进一步扩充了周期 IGC 序列集的构造,在一定条件下可实现最优. 2016 年,文献^[12]将完备序列和正交矩阵作为初始序列,利用移位序列构造了一类周期 IGC 序列集,通过选择合适的移位序列,IGC 序列集可以达到理论界,同时 ZCZ 长度和序列长度可以灵活选择. 尽管近几年得到了一些 IGC 序列集的设计结果,但在兼顾集合参数最优性和参数选择灵活性的构造方法研究方面还需要进一步探索.

高斯整数序列是一类实部和虚部均由整数构成的复数序列,通信中广泛应用的四元序列和正交幅度调制 (Quadrature Amplitude Modulation, QAM) 序列都是高斯整数序列的特殊形式. 与传统序列相比,高斯整数序列不再限制序列的幅度值,具有更灵活的自由度,通信中可利用载波的幅度和相位同时传输信息,因此在相同序列长度的情况下,使用高斯整数序列可以增加带宽利用率,提高数据传输速率. 其由于具有高的传输效率和频谱利用率的优良性质,引起了人们的广泛关注,完备高斯整数序列^[13]、ZCZ 高斯整数序列^[14]和 ZCZ 高斯整数互补序列集^[15]等已相继出现.

本文针对如何构造出具有灵活参数的最优 IGC 集合的问题,提出了不同于已有文献的构造方法. 如图 1 所示,通过核正交矩阵与完备高斯整数序列过滤构造任意阶高斯整数正交矩阵,再结合完备高斯整数序列构造出一类具有任意 ZCZ 长度的周期 IGC 序列集,集合参数可无条件满足理论界,获得最优集合.

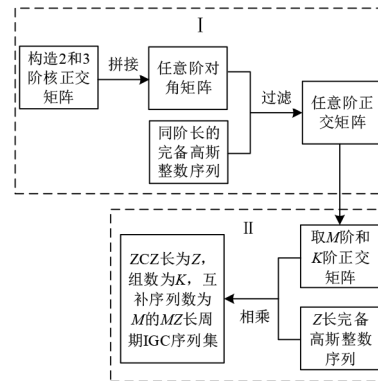


图 1 周期 IGC 序列集构造方法示意图

2 预备知识

定义 1 设 $\mathbf{a}=(a(0), a(1), \dots, a(N-1))$ 是长度为 N 的复整数序列, 序列中元素 $a(t)$ 取自集合 A , 其中 $A=\{a+bj, a, b \in \mathbb{Z}\}$, \mathbb{Z} 表示整数集, 则称 \mathbf{a} 为高斯整数序列. 序列 \mathbf{a} 中不同的非零元素的个数为 k , 那么称 k 为序列 \mathbf{a} 的自由度, 表示为 k -degree.

定义 2 设 $\mathbf{a}=(a(0), a(1), \dots, a(N-1))$ 和 $\mathbf{b}=(b(0), b(1), \dots, b(N-1))$ 是两个复序列, \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的周期互相关函数定义为

$$R_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1} a(t) b^*(t+\tau) \quad (1)$$

其中, $*$ 表示复共轭, $t+\tau=(t+\tau) \bmod N$. 当 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ 时, $R_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\tau)$ 称为周期自相关函数, 记为 $R_{\mathbf{a}}(\tau)$.

性质 1 N 长复序列 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的周期互相关函数满足 $R_{\mathbf{b}, \mathbf{a}}(N-\tau)=R_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\tau)^*$.

定义 3 设 $\mathbf{a}=(a(0), a(1), \dots, a(N-1))$ 为复序列, 若 \mathbf{a} 的自相关函数满足

$$R_{\mathbf{a}}(\tau)=\begin{cases} \delta_{\mathbf{a}}, & \tau=0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

则称 \mathbf{a} 为完备序列, 其中 $\delta_{\mathbf{a}} \neq 0$.

定义 4 设序列集 $S=\{S^0, S^1, \dots, S^G\}$ 包含 G 个组, 每个组 $S^g=\{S_0^g, S_1^g, \dots, S_{M-1}^g\}$ 包含 M 个序列集, 每个序列集 $S_m^g=\{s_{m,0}^g, s_{m,1}^g, \dots, s_{m,N-1}^g\}$ 包含 N 个长度为 L 的序列 $s_{m,n}^g=(s_{m,n}^g(0), s_{m,n}^g(1), \dots, s_{m,n}^g(L-1))$, 其中 $0 \leq g < G, 0 \leq m < M, 0 \leq n < N$. 若任意两个序列集 $S_{m_1}^{g_1}$ 和 $S_{m_2}^{g_2}$ 的周期相关函数满足

$$R_{S_{m_1}^{g_1}, S_{m_2}^{g_2}}(\tau)=\sum_{n=0}^{N-1} R_{s_{m_1, n}^{g_1}, s_{m_2, n}^{g_2}}(\tau) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} \zeta_n, & g_1=g_2, m_1=m_2, \tau=0 \\ 0, & g_1=g_2, m_1=m_2, 0 < \tau < Z \\ 0, & g_1=g_2, m_1 \neq m_2, 0 \leq \tau < Z \\ 0, & g_1 \neq g_2, 0 \leq \tau < L \end{cases} \quad (3)$$

其中 $0 \leq g_1, g_2 < G, 0 \leq m_1, m_2 < M, \zeta_n = \sum_{l=0}^{L-1} |s_{m_1, n}^{g_1, l}|^2$, 则称序列集 S 为周期 IGC 序列集, 记为 $(G, M, Z)IGC_N^L$, 每个组 S^g 称为周期 ZCZ 互补序列集, 表示为 $(M, Z)ZPCS_N^L$. 当 $Z=L$ 时, S^g 和 S 即为传统的周期互补序列集, 参数可记为 $(M, L)PCS$ 和 $(GM, L)PCS$.

引理 1^[4] $(G, M, Z)IGC_N^L$ 序列集的参数满足

$$G \cdot M \leq N \cdot \left\lfloor \frac{L}{Z} \right\rfloor, \quad (4)$$

令 $\eta = G \cdot M / (N \cdot \lfloor \frac{L}{Z} \rfloor)$, 那么 $\eta \leq 1$. 若 $\eta = 1$, 表示集合达到最优.

定义 5 设 $H = [h_{i,k}]_{M \times M}$ 是阶数为 $M \times M$ 的复值矩阵, 其中 $0 \leq i, k < M$. 若 H 中任意两行满足

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_{i,k} h_{i',k}^* = \begin{cases} \delta, & i = i' \\ 0, & i \neq i' \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\delta \neq 0$, 那么 H 为正交矩阵.

定义 6 设序列 $a = (a(0), a(1), \dots, a(N-1))$ 和 $b = (b(0), b(1), \dots, b(N-1))$, 将 b 作为过滤序列对 a 进行的过滤操作定义为

$$u(n) = a(t) \circ b(t+n) = R_{ab}(n), \quad 0 \leq t, n < N \quad (6)$$

$u = (u(0), u(1), \dots, u(N-1))$ 表示过滤后的生成序列.

引理 2^[16] 若过滤序列 b 为完备序列, 那么基序列 a 经 b 过滤得到的生成序列 u 与 a 具有相同的相关特性.

3 任意阶高斯整数正交矩阵的构造

本节提出一种任意阶高斯整数正交矩阵的构造方法, 具体如下:

$$\text{设 } U = [u_{i,k}]_{M \times M} = \begin{bmatrix} V_{T_1 \times T_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_{T_2 \times T_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & V_{T_N \times T_N} \end{bmatrix} \text{ 为对}$$

角矩阵, 其中 $V_{T_n \times T_n}$ 为 T_n 阶正交矩阵, $T_n \in \{2, 3\}, 1 \leq n \leq N, M = 2p + 3q, p, q$ 为非负整数, 那么 U 也是正交矩阵. 取 M 长高斯整数完备序列 $c = (c(0), c(1), \dots, c(M-1))$, 对 U 的每行过滤得到矩阵 $H = [h_{i,t}]_{M \times M}$, 其中

$$h_{i,t} = c(k) \circ u_{i,(k+t) \bmod M} = R_{c, u_{i,k}}(t) \quad (7)$$

其中 $c(k), h_{i,t} \in \{p + qj | p, q \in \mathbb{Z}\}, 0 \leq k, i, t < M$.

定理 1 上述构造得到的矩阵 H 为高斯整数正交矩阵.

证明

任取 $1 \leq i, i' \leq M, i \neq i', U_i$ 和 $U_{i'}$ 表示矩阵 U 的任意两行向量. 由于正交矩阵 $V_{T_n \times T_n}$ 分布在矩阵 U 的对角线上, 所以当 U_i 和 $U_{i'}$ 分别取自不同的 $V_{T_n \times T_n}$ 时, $U_i \cdot U_{i'}^T = 0$, 其

中 U_i^T 表示 U_i 的转置; 当 U_i 和 $U_{i'}$ 取自相同的 $V_{T_n \times T_n}$ 时,

$$U_i \cdot U_{i'}^T = \sum_{k=0}^{M-1} u_{i,k} u_{i',k}^* = \sum_{k=0}^{T_n-1} v_{i,k} v_{i',k}^* \quad (8)$$

因为 $\sum_{k=0}^{T_n-1} v_{i,k} v_{i',k}^* = \begin{cases} \delta, & i = i' \\ 0, & i \neq i' \end{cases}$, 其中 $\delta \neq 0$. 那么,

$$U_i \cdot U_{i'}^T = \sum_{k=0}^{M-1} u_{i,k} u_{i',k}^* = \begin{cases} \delta, & i = i' \\ 0, & i \neq i' \end{cases} \quad (9)$$

所以矩阵 U 为正交矩阵.

由引理 2 可知, 经完备高斯整数序列 c 过滤得到的矩阵 H 与矩阵 U 具有相同的相关特性, 故 H 也为正交矩阵. 又因为序列 c 和 U 中的元素都在高斯整数集内, 所以经过过滤操作的加减及乘法运算得到的矩阵 H 中元素也在高斯整数集内.

综上所述, 矩阵 H 为高斯整数正交矩阵. 证毕

定理 1 中, $2p$ 或 $3q$ 阶的正交矩阵 $V_{T_n \times T_n}$ 存在很多, 这里给出一类设计形式.

首先, 令 2 阶正交矩阵 $V_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & p \end{bmatrix}$, 满足 $xz^* + yp^* = 0$,

再令 $V_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & -a \end{bmatrix}$ 为 3 阶正交矩阵, 满足 $a = 2b$.

其次, 以 $V_{2 \times 2}$ 和 $V_{3 \times 3}$ 作为核矩阵按照定理 1 的组合方式进行拼接扩展, 即可得到 $(2p + 3q)$ 阶的正交矩阵 U .

最后, 利用 $(2p + 3q)$ 长高斯整数完备序列对 U 进行过滤, 消除矩阵 U 内的 0 元素, 得到高斯整数正交矩阵 H . 下面举例说明.

例 1 根据 $V_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & p \end{bmatrix}$ 和 $xz^* + yp^* = 0$, 可取

$V_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 和 $V_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 2j \\ 2j & 2 \end{bmatrix}$, 由定理 1 得到 4 阶矩

阵 $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2j \\ 0 & 0 & 2j & 2 \end{bmatrix}$. 再取 4 长完备高斯整数序列

$c = (6, 1 + j, 2j, -2 + 2j)$ 对 U 过滤, 得到 4 阶正交矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 7-j & 1-3j & -2-4j & 4-2j \\ 5+j & 1+j & 2 & -8-2j \\ 4-8j & -4+8j & 14+2j & 6-2j \\ -4j & 16-4j & 2+10j & 2-2j \end{bmatrix}$$

例 2 取 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$, 由 $V_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & -a \end{bmatrix}$, 得到 $V_{3 \times 3} =$

$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. 利用 $V_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 和定理 1 可得 5 阶矩

$$\text{阵 } U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ 取 5 长完备高斯整数序列}$$

$c=(6+4j, 1+j, 2j, -2+2j, -4)$ 对 U 过滤, 得到正交矩阵

$$H = \begin{bmatrix} 7-5j & 1-3j & -2-4j & -6-2j & 2-4j \\ 5-3j & 1+j & 2 & 2-2j & -10+4j \\ -8 & 2 & 21-9j & -10+4j & -4-4j \\ -10-6j & 4-12j & -6j & 13-13j & -2-8j \\ 4-6j & -22+6j & 6-6j & 8-2j & 5-j \end{bmatrix}$$

例 3 利用例 1 和例 2 中的正交矩阵 $V_{2 \times 2}$ 和 $V_{3 \times 3}$ 进行拼接, 可扩展为不同结构的正交矩阵 U , 例如 $U =$

$$\begin{bmatrix} V_{2 \times 2} & 0 & 0 \\ 0 & V_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 & V_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{7 \times 7}, U = \begin{bmatrix} V_{2 \times 2} & 0 & 0 \\ 0 & V_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & V_{2 \times 2} \end{bmatrix}_{7 \times 7} \text{ 利}$$

用 7 长完备高斯整数序列对不同组合结构的正交矩阵 U 进行过滤, 可得到大量 7 阶高斯整数正交矩阵 H , 这里不再赘述。

从以上设计和举例可以看出, 利用定理 1 方法可方便简洁地构造出任意阶的高斯整数正交矩阵, 这是构造任意 ZCZ 长 IGC 序列集的关键步骤。

4 高斯整数周期 IGC 序列集的构造

利用定理 1 构造的正交矩阵, 结合完备高斯整数序列, 本节给出高斯整数周期 IGC 序列集的构造方法. 具体方法如下。

选取 Z 长完备高斯整数序列 a 以及 M 阶和 K 阶高斯整数正交矩阵 $H_1 = [h_{i,m}^1]_{M \times M}$ 和 $H_2 = [h_{i,k}^2]_{K \times K}$, 其中 $\gcd(Z, M) = 1$. 构造序列集 $S = \{S^0, S^1, \dots, S^{K-1}\}$, $S^g = \{S_0^g, S_1^g, \dots, S_{M-1}^g\}$, $S_m^g = \{S_{m,0}^g, S_{m,1}^g, \dots, S_{m,K-1}^g\}$, $S_{m,n}^g = (S_{m,n}^g(0), S_{m,n}^g(1), \dots, S_{m,n}^g(MZ-1))$,

$$S_{m,n}^g(t) = a(t)_{\text{mod } Z} \cdot h_{m,t}^1 \cdot h_{g,n}^2 \quad (10)$$

其中, $0 \leq g, n < K, 0 \leq m < M, 0 \leq t < MZ$.

定理 2 由上述构造得到的序列集 S 为高斯整数周期 IGC 序列集, 参数为 $(K, M, Z)IGC_K^{MZ}$.

证明

取序列集 S 中任意两个序列 $S_{m_1}^{g_1}$ 和 $S_{m_2}^{g_2}$, $0 \leq g_1, g_2 < K, 0 \leq m_1, m_2 < M$, 周期互相关函数为

$$\begin{aligned} R_{S_{m_1}^{g_1}, S_{m_2}^{g_2}}(\tau) &= \sum_{n=0}^{K-1} R_{S_{m_1,n}^{g_1}, S_{m_2,n}^{g_2}}(\tau) \\ &= \sum_{n=0}^{K-1} \sum_{t=0}^{MZ-1} S_{m_1,n}^{g_1}(t) \cdot (S_{m_2,n}^{g_2}(t+\tau))^* \\ &= \sum_{n=0}^{K-1} \sum_{t=0}^{MZ-1} (a(t)_{\text{mod } Z} \cdot h_{m_1,t}^1 \cdot h_{g_1,n}^2) \cdot \\ &= \sum_{n=0}^{K-1} \sum_{t=0}^{MZ-1} (a(t+\tau)_{\text{mod } Z} \cdot h_{m_2,(t+\tau)_{\text{mod } M}}^1 \cdot h_{g_2,n}^2)^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{K-1} \sum_{t=0}^{MZ-1} a(t)_{\text{mod } Z} \cdot a^*(t+\tau)_{\text{mod } Z} \cdot h_{m_1,t}^1 \cdot \\ &= \sum_{n=0}^{K-1} \sum_{t=0}^{MZ-1} h_{m_2,(t+\tau)_{\text{mod } M}}^{1*} \cdot h_{g_1,n}^2 \cdot h_{g_2,n}^{2*} \quad (11) \\ &= \sum_{t=0}^{MZ-1} a(t)_{\text{mod } Z} \cdot a^*(t+\tau)_{\text{mod } Z} \cdot \\ &= \sum_{t=0}^{MZ-1} h_{m_1,t}^1 \cdot h_{m_2,(t+\tau)_{\text{mod } M}}^{1*} \cdot R_{h_{g_1}^2, h_{g_2}^2}(0) \end{aligned}$$

因为 $\gcd(Z, M) = 1$, 则

$$\begin{aligned} R_{S_{m_1}^{g_1}, S_{m_2}^{g_2}}(\tau) &= \sum_{t_1=0}^{Z-1} \sum_{t_2=0}^{M-1} a_{t_1 \text{ mod } Z} \cdot a_{(t_1+\tau) \text{ mod } Z}^* \cdot \\ &= \sum_{t_2=0}^{M-1} h_{m_1,t_2}^1 \cdot h_{m_2,(t_2+\tau)_{\text{mod } M}}^{1*} \cdot R_{h_{g_1}^2, h_{g_2}^2}(0) \quad (12) \\ &= \sum_{t_2=0}^{M-1} h_{m_1,t_2}^1 \cdot h_{m_2,(t_2+\tau)_{\text{mod } M}}^{1*} \cdot R_a(\tau)_{\text{mod } Z} \cdot R_{h_{g_1}^2, h_{g_2}^2}(0) \end{aligned}$$

分三种情况讨论式 (12):

(1) 当 $g_1 = g_2, m_1 = m_2$ 时, $R_{h_{g_1}^2, h_{g_2}^2}(0) \neq 0, \sum_{t_2=0}^{M-1} h_{m_1,t_2}^1 \cdot h_{m_2,(t_2+\tau)_{\text{mod } M}}^{1*} \neq 0$. 当 $0 < \tau < Z$ 时, $R_a(\tau) = 0$; 当 $\tau = 0$ 时, $R_a(0) = \delta_a$.

(2) 当 $g_1 = g_2, m_1 \neq m_2$ 时, $R_{h_{g_1}^2, h_{g_2}^2}(0) \neq 0$. 当 $0 < \tau < Z$ 时, $R_a(\tau) = 0$; 当 $\tau = 0$ 时, $\sum_{t_2=0}^{M-1} h_{m_1,t_2}^1 \cdot h_{m_2,(t_2+\tau)_{\text{mod } M}}^{1*} = 0$,

$R_a(0) = \delta_a$.

(3) 当 $g_1 \neq g_2$ 时, $R_{h_{g_1}^2, h_{g_2}^2}(0) = 0$.

综上所述, 序列 $S_{m_1}^{g_1}$ 和 $S_{m_2}^{g_2}$ 的周期互相关函数为

$$\begin{aligned} R_{S_{m_1}^{g_1}, S_{m_2}^{g_2}}(\tau) &= \sum_{n=0}^{K-1} R_{S_{m_1,n}^{g_1}, S_{m_2,n}^{g_2}}(\tau) \\ &= \begin{cases} \zeta, & g_1 = g_2, m_1 = m_2, \tau = 0 \\ 0, & g_1 = g_2, m_1 = m_2, 0 < \tau < Z \\ 0, & g_1 = g_2, m_1 \neq m_2, 0 \leq \tau < Z \\ 0, & g_1 \neq g_2, 0 \leq \tau < MZ \end{cases} \quad (13) \end{aligned}$$

其中 $\zeta \neq 0$. 因此, S 是参数为 $(K, M, Z)IGC_K^{MZ}$ 的周期 IGC 序列集. 由于序列 a 和矩阵 H_1, H_2 中元素都在高斯整数集内, 则经乘法运算得到的序列集 S 也在高斯整数集内, 故序列集 S 是 $(K, M, Z)IGC_K^{MZ}$ 高斯整数周期 IGC 序列集. 证毕

定理 2 方法可应用定理 1 中构造的任意阶数正交矩阵实现构造条件 $\gcd(Z, M) = 1$, 但正交矩阵的选择并不仅限于定理 1, 已存在的正交矩阵都可作为定理 2 的选择范围。

例 4 选取长度为 3 的完备高斯整数序列 $a=(4-$

$$2j, 1+j, 2j), \text{ 正交矩阵 } H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & j & -j & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ j & -j & -j & j \end{bmatrix}, H_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 2+2j & 2+2j & 2-4j \\ 1-8j & 1+7j & 1+j \\ -10+2j & -10+8j & -10-10j \end{bmatrix} \text{ 由定理 2 构造序列集}$$

S , 由于篇幅限制, 这里仅例举 S^0 如下。

$$S_0^0 = \{(12 + 4j, 4j, -4 + 4j, 12 + 4j, 4j, -4 + 4j, 12 + 4j, 4j, -4 + 4j, 12 + 4j, 4j, -4 + 4j), (12 + 4j, 4j, -4 + 4j, 12 + 4j, 4j, -4 + 4j, 12 + 4j, 4j, -4 + 4j, 12 + 4j, 4j, -4 + 4j), (-20j, 6 - 2j, 8 + 4j, -20j, 6 - 2j, 8 + 4j, -20j, 6 - 2j, 8 + 4j, -20j, 6 - 2j, 8 + 4j)\}$$

$$S_1^0 = \{(-4 + 12j, -4, 4 + 4j, 4 - 12j, -4, -4 - 4j, 4 - 12j, 4, -4 - 4j, -4 + 12j, 4, 4 + 4j), (-4 + 12j, -4, 4 + 4j, 4 - 12j, -4, -4 - 4j, 4 - 12j, 4, -4 - 4j, -4 + 12j, 4, 4 + 4j), (20, 2 + 6j, 4 - 8j, -20, 2 + 6j, -4 + 8j, -20, -2 - 6j, -4 + 8j, 20, -2 - 6j, 4 - 8j)\}$$

$$S_2^0 = \{(12 + 4j, -4j, -4 + 4j, -12 - 4j, 4j, 4 - 4j, 12 + 4j, -4j, -4 + 4j, -12 - 4j, 4j, 4 - 4j), (12 + 4j, -4j, -4 + 4j, -12 - 4j, 4j, 4 - 4j, 12 + 4j, -4j, -4 + 4j, -12 - 4j, 4j, 4 - 4j), (-20j, -6 + 2j, 8 + 4j, 20j, 6 - 2j, -8 - 4j, -20j, -6 + 2j, 8 + 4j, 20j, 6 - 2j, -8 - 4j)\}$$

$$S_3^0 = \{(-4 + 12j, 4, 4 + 4j, -4 + 12j, -4, 4 + 4j, 4 - 12j, -4, -4 - 4j, 4 - 12j, 4, -4 - 4j), (-4 + 12j, 4, 4 + 4j, -4 + 12j, -4, 4 + 4j, 4 - 12j, -4, -4 - 4j, 4 - 12j, 4, -4 - 4j), (20, -2 - 6j, 4 - 8j, 20, 2 + 6j, 4 - 8j, -20, 2 + 6j, -4 + 8j, -20, -2 - 6j, -4 + 8j)\}$$

序列集 S 的周期相关函数表示在图 2 中. 以 S^0 的组内自相关函数为例计算, 对于 $0 \leq \tau < 12$,

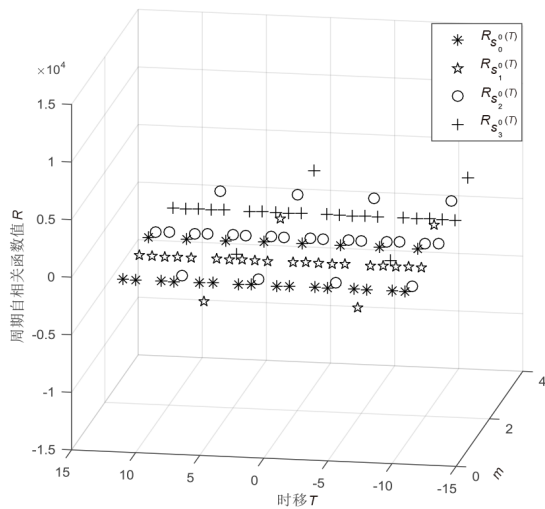
$$R_{S_0^0}(\tau) = (3744, 0, 0, 3744, 0, 0, 3744, 0, 0, 3744, 0, 0);$$

$$R_{S_1^0}(\tau) = (3744, 0, 0, 0, 0, 0, -3744, 0, 0, 0, 0, 0);$$

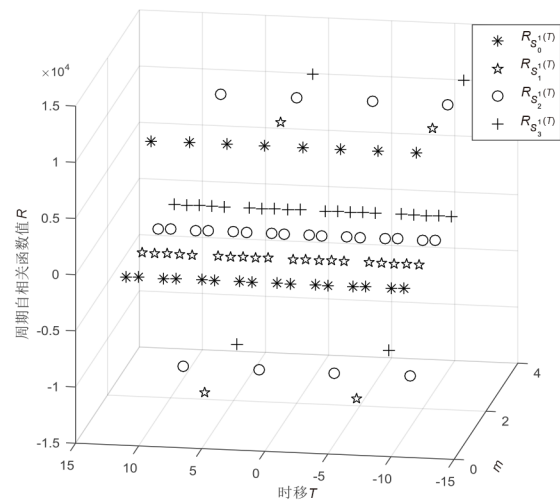
$$R_{S_2^0}(\tau) = (3744, 0, 0, -3744, 0, 0, -3744, 0, 0, -3744, 0, 0);$$

$$R_{S_3^0}(\tau) = (3744, 0, 0, 0, 0, 0, -3744, 0, 0, 0, 0, 0).$$

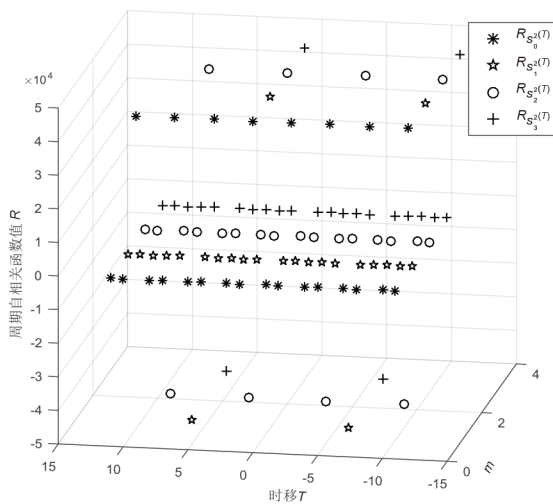
图 2(a)~(c) 图描述 S^g 的组内自相关函数 $R_{S_m^g}(\tau)$, 其中 $0 \leq g \leq 2, 0 \leq m \leq 3$. 图 2(d) 图表示组内互相关函数



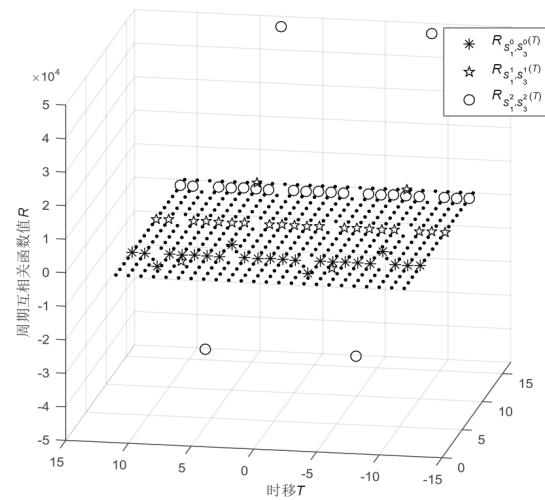
(a) S^0 组的周期自相关函数



(b) S^1 组的周期自相关函数



(c) S^2 组的周期自相关函数



(d) S^0 、 S^1 和 S^2 组内周期互相关函数

图 2 集合 S 周期相关函数图

$R_{S_{m_1}^g, S_{m_2}^g}(\tau)$, $0 \leq m_1, m_2 \leq 3, m_1 < m_2$, 经计算除 $R_{S_1^g, S_3^g}(\tau)$ 外都为全 0 序列, 图中用“•”表示. 又由性质 1, 图中省略了 $R_{S_{m_1}^g, S_{m_2}^g}(\tau), m_1 > m_2$.

图 2 可见, $\tau < 3$ 时, 周期自相关函数和组内互相关函数都为 0, 即零相关区长度 Z 为 3, 说明组内序列之间具有零相关区互补性. 计算组间各 ZCZ 互补序列的互相关函数, 得出都为 12 长的全 0 序列, 即 $R_{S_{g_1}^g, S_{g_2}^g}(\tau) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), 0 \leq g_1, g_2 \leq 2, g_1 \neq g_2$, 因此省略了组间互相关函数图, 其结果说明组间序列具有完全互补性. 因此, 序列集 S 为周期 IGC 序列集, 参数为 $(3, 4, 3)IGC_3^{12}$.

例 5 将基础正交矩阵 H_1 和 H_2 替换为例 2 和例 1 构造的 5 阶和 4 阶正交矩阵, 同样取例 4 中 3 长完备高斯整数序列可构造得到序列集 S 为 $(4, 5, 3)IGC_4^{15}$. 下面以组 S^0 为例说明.

$S_0^0 = \{(92 - 256j, 26 - 18j, 52 - 36j, -192 + 56j, 40 - 20j, 84 + 88j, -28 - 96j, 8 - 44j, 16 - 88j, -20 - 140j, 86 + 2j, 44 + 8j, -124 - 68j, -36 - 52j, 60 + 20j), (-84 - 88j, -2 - 14j, -4 - 28j, -16 + 88j, -20j, 52 - 16j, -44 - 8j, -16 - 12j, -32 - 24j, -60 - 20j, 18 - 34j, 12 - 16j, -52 + 36j, -28 + 4j, 20 - 20j), (-172 - 4j, -16 - 12j, -32 - 24j, 72 + 104j, -20 - 20j, 36 - 68j, -52 + 36j, -28 + 4j, -56 + 8j, -80 + 40j, -16 - 52j, -4 - 28j, -16 + 88j, -24 + 32j, -40j), (4 - 172j, 12 - 16j, 24 - 32j, -104 + 72, 20 - 20j, 68 + 36j, -36 - 52j, -4 - 28j, -8 - 56j, -40 - 80j, 52 - 16j, 28 - 4j, -88 - 16j, -32 - 24j, 40)\}$

计算 S_0^0 与 S_y^x 的周期相关函数 $R_{S_0^0, S_y^x}(\tau)$, 其中 $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4$, 得出除 $R_{S_0^0, S_0^0}(\tau)$ 外, 其他相关函数都为全 0 序列. 将 $R_{S_0^0, S_y^x}(\tau)$ 表示在图 3 上, 除 $R_{S_0^0, S_0^0}(\tau)$ 外的全 0 相

关函数用“•”表示.

例 4 和例 5 应用相同的完备高斯整数序列和不同的正交矩阵得到了不同参数的周期 IGC 序列集. 这表明, 当已知信道的同步范围给定, 即 ZCZ 长度 Z 确定, 可先选定 Z 长的完备高斯整数序列, 再通过系统需要的组数 K 和用户数 M 来选择 K 阶和 M 阶正交矩阵, 利用定理 2 的方法构造出 IGC 序列集. 定理 1 给出的任意阶正交矩阵的构造方法为定理 2 选择适当阶数的正交矩阵提供了保证.

5 性能分析

5.1 最优性分析

由引理 1 可知, 定理 2 得到的参数为 $(K, M, Z)IGC_K^{MZ}$ 的 IGC 序列集, 满足

$$\eta = K \cdot M / \left(K \cdot \left\lfloor \frac{MZ}{Z} \right\rfloor \right) = 1 \quad (14)$$

也就是说定理 2 构造的 IGC 序列集参数是最优的.

本文将构造的 IGC 序列集与现有构造结果从构造基础、集合参数、参数是否最优以及周期性等角度进行了对比, 见表 1.

表 1 可见, 文献[5~7]构造了三类最优的非周期 IGC 序列集, ZCZ 长度的灵活性还需进一步提升. 文献[9~12]构造了周期 IGC 序列集, 其中文献[9]构造的 IGC 序列集参数不能满足理论界, 文献[10~12]则需要基础序列满足一定条件下使构造的 IGC 序列集达到最优. 现有文献表明, 非周期 IGC 序列集的构造参数不是很丰富, 但都可以无条件达到最优参数条件; 周期 IGC 序列集的构造结果尽管参数形式上较丰富一些, 但是最优集合参数都需要受到条件约束, ZCZ 长度不够灵活.

需要注意的是, 尽管非周期互补序列也是周期互补序列, 但是 ZCZ 非周期互补序列却不一定是 ZCZ 周期互补序列. 因此, 文献[5~7]中具有无条件最优参数的非周期 IGC 序列集却不一定是周期 IGC 序列集. 而本文利用新的构造基础, 即完备高斯整数序列和正交矩阵, 构造了无条件限制的最优参数形式的周期 IGC 序列集, 突破了现有文献中周期 IGC 序列集对参数的约束限制.

5.2 参数分析

定理 2 构造的周期 IGC 序列集参数为 $(K, M, Z)IGC_K^{MZ}$, 其中 ZCZ 长度 Z 与完备高斯整数序列同长, 而近年完备高斯整数序列的研究取得了丰富的成果, 已证明存在任意长度^[17~19], 因此 ZCZ 长度相比已有文献更加灵活. 另外, 组数 K 和组内互补序列数 M 取自正交矩阵的阶数, 定理 1 利用 2 阶和 3 阶核矩阵构造的高斯整数正交矩阵可具有任意阶, 即 M 和 K 可任意取

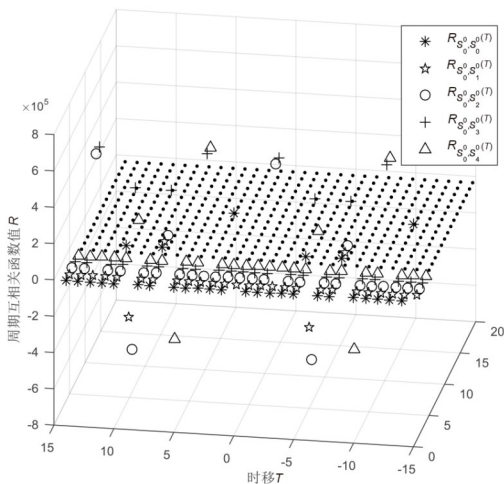


图 3 S_0^0 与 S_y^x 的周期互相关函数图

表1 IGC序列集参数比较

文献	构造基础	集合参数	是否最优	周期性
[5]	完备互补码PC(M, L)、正交矩阵 $H_{N \times N}$	(M, N, L)IGC $_{M}^{LN}$	是	非周期
[6]	两个正交矩阵 $H_{N \times N}$	(N/Z, N, Z)IGC $_{N}^{N}$	是	非周期
[7]	二阶广义布尔函数	(2 $^{k+1}$, 2 p , 2 $^{m-p}$)IGC $_{2^{k+1}}^{2^m}$	是	非周期
[8]	完备互补码PC(G, P, L)、移位序列集 $E_{M \times 2}$	(G, 2M, Z)IGC $_{P}^{2L}$	2GM=2qP+P⌊2r/Z⌋, L=qZ+r, 其中q, r为非负整数, 当Z为偶数且1<r<Z/2、Z为奇数且0<r<Z/2时, 达到最优	周期
[9]	Z互补码(M, Z)ACS $_{P}^{N}$ 、完备周期互相关码PPCC(G, L)	(G, M, Z)IGC $_{P}^{L(N+Z-1)}$	否	周期
[10]	完备互补码PC(M, P, Tqk)、正交矩阵 $H_{N \times N}$	(M, NT, kork-1)IGC $_{P}^{TNqk}$	q=1时, 达到最优	周期
[11]	非相关序列集 $H_{T_2 \times T_1}$ 、(M, Z)ZPCS $_{P}^L$ 序列集	(T $_2$, M, Z)IGC $_{P}^{T_1 L}$	T $_2$ M=P⌊T $_1$ L/Z⌋时, 达到最优	周期
[12]	周期互补序列集(M, P, L)PCS、正交矩阵 $H_{N \times N}$	(M, N, ⌊L+1/N⌋·N-1)IGC $_{P}^{NL}$	r<L/N+1, M=P时, 达到最优	周期
定理2	Z长完备高斯整数序列、正交矩阵 $H_{1_{M \times M}}$ 和 $H_{2_{K \times K}}$	(K, M, Z)IGC $_{K}^{MZ}$	是	周期

值. 构造中要求组内互补序列数量M和ZCZ长度Z互素, 而M和Z都存在任意长度, 因此, 该条件非常容易满足, 而且Z和M较大的选取范围可为实际通信系统提供更加灵活的允许同步范围和用户容量接入. 下面列举在2≤Z≤10且2≤M≤50内的周期IGC序列集参数, 见表2. 可以看出, 本文构造结果参数丰富, 可得到大量的IGC序列集.

当周期IGC集合应用于IGC-CDMA系统时, K和M对应着通信小区数量和小区内的用户数量. 理论上, 对

于给定ZCZ长度, 用户数量M可在与Z互素的前提下保持增长, 通信小区数量K也可灵活选择, 如表2所示. 只要正交矩阵的阶数K和M以及完备序列的长度Z确定, 那么选择不同的基础矩阵和完备序列并不影响周期IGC序列集的构造参数和相关性能. 这也意味着对IGC-CDMA系统的小区数量、用户容量、允许同步范围以及用户间干扰等都不会产生影响. 但是, 由于高斯整数范围广泛, 不同高斯整数字符集的正交矩阵和完备序列会影响IGC序列集的字符集范围. 考虑系统的抗

表2 周期IGC序列集2≤Z≤10, 2≤M≤50参数举例

ZCZ	互补序列数M	K
2	3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27, 29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,49	任意≥2的正整数
3	2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20,22,23,25,26,28, 29,31,32,34,35,37,38,40,41,43,44,46,47,48,49,50	
4	3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27, 29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,49	
5	2,3,4,6,7,8,9,11,12,13,14,16,17,18,19,21,22,23,24,26,27, 28,29,31,32,33,34,36,37,38,39,41,42,43,44,46,47,48,49	
6	5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35,37,41,43,47,49	
7	2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19, 20,22,23,24,25,26,27,29,30,31,32,33,34, 36,37,38,39,40,41,43,44,45,46,47,48,50	
8	3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27, 29,31,33,35,37,39,41,43,45,47,49	
9	2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20,22,23,25,26, 28,29,31,32,34,35,37,38,40,41,43,44,47,48,49,50	
10	3,7,9,11,13,17,19,21,23,27,29,31,33,37,39,41,43,47,49	

噪性,希望高斯整数字符集的字符间最小欧氏距离和最小相位偏移尽可能大,以降低码间干扰,提高传输信号抗高斯白噪声性能、抗相位抖动和时钟恢复精确度的敏感性.例如,例4和例5中的完备高斯整数和正交矩阵的最小欧氏距离都为1.414 2,构造的IGC序列集的最小欧氏距离分别是2和2.828 4,可见,例5的(4,5,3)IGC₄¹⁵比例4的(3,4,3)IGC₃¹²具有更大的最小欧氏距离.由于时间和篇幅的限制,本文的研究重点仅针对周期IGC集合参数最优性和灵活性问题进行了构造方法研究,IGC集合字符集对系统传输性能的影响可作为IGC集合构造方法的进一步约束条件开展研究.

6 结束语

本文在高斯整数集上,利用 M 阶和 K 阶正交矩阵与 Z 长完备序列构造了一类周期IGC序列集.其中,为了实现 Z 与 M 互素的构造条件,给出了一类任意阶高斯整数正交矩阵的构造方法,从而扩充了正交矩阵的选择范围.通过分析周期IGC序列集参数可知,本文构造参数满足理论界,达到最优.本文方法有效地利用了完备高斯整数序列存在任意长度的优点,突破了已有构造结果中ZCZ长度不够灵活和最优集合参数需要附加条件的限制,同时在提升信道传输效率和频谱利用率方面发挥了高斯整数信号集的优势.此外,本文构造的任意阶高斯整数正交矩阵,还可用于文献[5,6]的非周期IGC集构造中,扩大非周期IGC集合参数存在范围.

参考文献

- [1] CHEN H H, CHIU H W. Orthogonal complement codes for interference CDMA technologies[J]. IEEE Wireless Communication, 2006, 13(1): 68-79.
- [2] SUN S Y, CHEN H H, MENG W X. A survey on complementary coded MIMO CDMA wireless communications [J]. IEEE Communication Surveys and Tutorials, 2014, 17(1): 52-69.
- [3] LIU Z L, GUAN Y L, CHEN H H. Fractional-delay-resilient receiver design for interference-free MC-CDMA communications based on complete complementary codes[J]. IEEE Transaction on Wireless Communications, 2014, 14(3): 1226-1236.
- [4] FAN P, YUAN W, TU Y. Z-complementary binary sequences[J]. IEEE Signal Process Letters, 2007, 14(8): 509-512.
- [5] LI J, HUANG A P, GUIZANI M, et al. Inter-group complementary codes for interference-resistant CDMA wireless communications[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2008, 7(1): 166-174.
- [6] 李玉博, 田立影. 基于正交矩阵构造非周期组间互补序列集[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(8): 2028-2032.
LI Y B, TIAN L Y. Construction of inter-group complementary sequence sets based on orthogonal matrices[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2018, 40(8): 2028-2032. (in Chinese)
- [7] PALASH S, SUDHAN M, HAMSAKUTTY V, et al. A direct construction of inter-group complementary code set [J]. IEEE Access, 2018, 6(2): 42047-42056.
- [8] FENG L F, ZHOU X W, FAN P Z. A construction of inter-group complementary codes with flexible ZCZ length[J]. Journal of Zhejiang University: SCIENCE C, 2011, 12(10): 846-854.
- [9] FENG L F, ZHOU X W, LI X Y. A general construction of inter-group complementary codes based on Z-complementary codes and perfect periodic cross-correlation codes [J]. Wireless Personal Communications, 2013, 71(1): 695-706.
- [10] WANG L Y, ZENG X L, FAN P, et al. Novel IGC codes with inter-subset zero-correlation zone for code division multiple access[C]//IEEE/CIC International Conference on Communications in China-Workshops, Shenzhen: IEEE, 2015: 12-16.
- [11] WANG L Y, ZENG X L, WEN H. Design of inter-group complementary sequence set from interleaving Z-periodic complementary sequences[J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2016, E99-A(5): 987-993.
- [12] ZHANG Z Y, TIAN F C, ZENG F X, et al. Inter-group complementary sequence set based on interleaved periodic complementary sequences[J]. Wireless Personal Communications, 2016, 91(3): 1051-1064.
- [13] PEI S C, CHANG K W. Arbitrary length perfect integer sequences using all-pass polynomial[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2019, 26(8): 1112-1116.
- [14] LI Y B, XU C Q. A new construction of zero correlation zone Gaussian integer sequence sets[J]. IEEE Communication Letters, 2016, 20(12): 2418-2421.
- [15] KONG D M, CHEN X Y, LI Y B. Constructions of Gaussian integer periodic complementary sequences with ZCZ[J]. IECE Transactions on Fundamentals of Electronics Communications & Computer Sciences, 2017, 100(9): 2056-2060.
- [16] LIU Y C, CHEN C W, SU Y T. New constructions of zero-correlation zone sequences[J]. IEEE Transactions on

Information Theory, 2013, 59(8): 4994-5007.

- [17] LEE C D, HONG S H. Generation of long perfect Gaussian integer sequences[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(4): 515-519.
- [18] CHANG K J, CHANG H H. Perfect Gaussian integer sequences of period p^k with degrees equal to or less than $k+1$ [J]. IEEE Transactions on Communications, 2017, 65(9): 3723-3733.
- [19] PEI S C, CHANG K W. Arbitrary length perfect integer sequences using all-pass polynomial[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2019, 26(8): 1112-1116.

作者简介



刘凯女, 1977年5月出生, 黑龙江齐齐哈尔人. 现为燕山大学信息科学与工程学院副教授、硕士生导师. 研究方向为无线通信编码理论.
E-mail: liukai@ysu.edu.cn



倪佳女, 1995年12月出生, 河北秦皇岛人. 现为燕山大学信息科学与工程学院硕士研究生. 研究方向为扩频序列设计.
E-mail: 2606494794@qq.com



焦佳旺男, 1994年2月出生, 河北廊坊人. 现为燕山大学信息科学与工程学院硕士研究生. 研究方向为扩频序列设计.
E-mail: 623233828@qq.com



李玉博男, 1985年8月出生, 河北衡水人. 现为燕山大学信息科学与工程学院副教授、硕士生导师. 研究方向为无线通信中的序列设计、编码理论.
E-mail: liyubo6316@ysu.edu.cn