

融合局部低秩先验与Bloch流形约束的磁共振 指纹重建算法

李敏, 栗泽昊, 张卓, 张学武

(河海大学物联网工程学院, 江苏常州 213022)

摘要: 为了实现快速成像, 磁共振指纹(Magnetic Resonance Fingerprinting, MRF)技术通常使用非笛卡尔稀疏采样模板对K空间进行高度欠采样, 从而获得稀疏K空间信号. 然而, 从稀疏的K空间信号重建像空间数据是一个病态不适定问题, 重建出的MRF像空间数据存在大量的混叠伪影, 直接影响到组织生理参数的重建准确度. 为此需要将各种先验知识引入重建模型之中, 以缓解MRF重建问题的不适定性. 针对上述问题, 本文提出一种融合局部低秩先验与Bloch流形约束的MRF重建模型, 并使用交替方向乘法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)求解模型中的非凸MRF重建问题. 本文算法在引入MRF像空间数据的局部低秩先验的同时, 使用预先构建的字典为重建指纹提供流形约束. 一方面通过空域局部低秩约束有效抑制混叠伪影的产生, 另一方面利用字典先验避免指纹的时域流形特征在迭代重建过程中丢失. 仿真实验结果表明, 相较于引入了全局低秩先验与Bloch流形约束的其他同类算法, 本文算法可以提供更高的组织参数重建准确度.

关键词: 磁共振指纹; 局部低秩; Bloch流形; 交替方向乘法

基金项目: 常州市重点科技支撑计划(社发项目)(No.CZ520036212); 常州市科技计划基础研究项目(No.CJ20200065)

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2023)02-0372-13

电子学报URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20211290

Local Low-Rank and Bloch Manifold Regularized Magnetic Resonance Fingerprinting Reconstruction

LI Min, LI Ze-hao, ZHANG Zhuo, ZHANG Xue-wu

(College of Internet of Things Engineering, Hohai University, Changzhou, Jiangsu 213022, China)

Abstract: To reduce the scanning time, magnetic resonance fingerprinting (MRF) generally performs non-Cartesian sparse undersampling in the K-space. However, it's an ill-posed problem to reconstruct MRF data from the sparse K-space data. There are severe artifacts in the reconstructed MRF data, which subsequently reduce the reconstruction accuracy of the tissue parameters. So, it's necessary to utilize a variety of prior knowledge to alleviate the ill-posed nature of the MRF reconstruction problem. For this purpose, we propose a new MRF reconstruction model in which the local low-rank prior and the Bloch manifold constraints are combined to help recovering MRF data from its highly undersampled K-space data, and utilize the alternating direction method of multipliers (ADMM) algorithm to solve the corresponding non-convex MRF reconstruction problem. On the one hand, the local low-rank prior has powerful de-redundancy capability that can remove aliasing artifacts. On the other hand, the MRF dictionary, which is predefined using Bloch equation, can provide fingerprint prior for each foreseeable physiological tissue, so as to regularize the temporal manifold features of the reconstructed fingerprints. The results of the simulation experiments show that, compared with the other iterative methods which integrate the global low-rank prior and the Bloch manifold constraints, the proposed method has better performance on the reconstruction accuracy of multiple tissue physiological parameters.

Key words: magnetic resonance fingerprinting; local low-rank; Bloch manifold; alternating direction method of multipliers

Foundation Item(s): Primary Research & Development Plan of Changzhou (No.CZ520036212); Basic Science and Technology Research Plan of Changzhou (No.CJ20200065)

1 引言

磁共振指纹成像技术(Magnetic Resonance Fingerprinting, MRF)借鉴压缩感知与模式识别理论,可以实现多种组织生理参数的快速并行量化成像,例如纵向弛豫时间(T_1)、横向弛豫时间(T_2)、质子密度(Proton Density, PD). 它打破了传统定量磁共振成像技术难以同时获得多种组织生理参数以及成像速度慢的局限性,在定量磁共振成像技术发展史上具有革命性的意义^[1-3]. MRF 技术重建出的定量组织生理参数可以为软组织病变的精准刻画,以及慢性退行性疾病的早期筛查与诊断提供重要的数据支撑.

MRF 成像过程中,在具有时域伪随机变化特征的射频(Radio Frequency, RF)脉冲序列激发下,不同组织的生理参数差异性将反应在弛豫信号的瞬态时变特征上,经过重建生成能够表征组织生理参数的信号演化序列,被称为指纹. 而在相同的激发条件下,基于 Bloch 方程和计算机仿真,可以获得任意组织生理参数组合对应的理想指纹. 将预先计算得到的所有理想指纹存储起来,就形成了字典. 最后,通过模式识别算法在字典中搜索与观测指纹最匹配的字典词条,并索引到其对应的生理参数组合,就实现了多种组织生理参数的并行量化成像. 为了缩短成像时间,MRF 技术在弛豫过程中通常采用非笛卡尔稀疏采样模板对 K 空间进行高度欠采样,从而获得稀疏 K 空间信号. 然而,由稀疏 K 空间信号重建 MRF 像空间数据是一个病态不定问题. 例如,常规 MRF 重建算法^[4]通过网格化重建^[5]或非均匀傅里叶变换^[6](NonUniform Fast Fourier Transform, NUFFT)重建出的 MR 像空间数据带有严重的混叠伪影,直接影响到后续组织生理参数重建的准确度.

为了解决该问题,学者们基于 K 空间信号的测量模型,构建带有先验知识约束的 MRF 重建模型,并通过迭代估计逼近 MRF 重建模型最优解^[7,8],有效缓解了 MRF 重建问题的不稳定性. 例如,基于人体器官组织结构相对固定且组织类型少的特点,在 MRF 重建模型中引入全局低秩先验,可以有效抑制重建过程中产生的混叠伪影,提升组织生理参数的重建准确度^[9-11];另外,基于压缩感知理论,引入空域稀疏先验作为约束条件,同样可以抑制混叠伪影的产生,从而改善 MRF 像空间数据的重建效果^[12].

受益于人体局部组织之间的强相似性,近几年来,局部低秩先验在动态磁共振成像(dynamic Magnetic Resonance Imaging, dMRI)^[13]以及传统 MR 定量成像^[14]领域中得到了广泛的应用. 相较于全局低秩先验,局部低秩先验具有更强的去冗余特性,可以更好地抑制混叠伪影. 在 MRF 领域,也有学者使用局部低秩先验取代全局低秩先验. 例如,Lima Da Cruz 等人^[15]提出将局

部低秩与空域稀疏先验结合在一起重建 MRF 像空间数据;Bustin 等人^[16]利用 MRF 像空间数据局部和非局部尺度上的高度冗余以及相邻时间点之间的强相关性,引入局部低秩先验进行重建. 这些算法都引入了 MRF 像空间数据的空域局部低秩约束来改善重建效果,但没有对指纹的时域流形特征进行约束,可能导致重建指纹的流形特征在迭代过程中丢失,从而降低重建指纹对组织生理参数的表征能力^[17].

为此,本文提出了一种融合局部低秩先验与 Bloch 流形约束的 MRF 重建算法. 具体来说,本文一方面在重建模型中引入 MRF 像空间数据的局部低秩先验抑制混叠伪影的产生;另一方面,通过预先构建的字典所提供的指纹先验来约束重建指纹的时域流形特征,避免指纹的流形特征在迭代重建过程中丢失;最后,本文采用交替方向乘子(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)算法^[18]求解该联合时空约束的非凸最小化问题. 为了验证本文算法的有效性,将所提算法与常规的 MRF 重建算法以及引入了先验约束的迭代重建算法进行对比,包含联合全局低秩先验与 Bloch 流形约束的 MBIR-MRF 算法^[9],以及 LRADMM 算法^[11]. 实验结果表明,针对不同类型的组织生理参数,本文算法都提供了最高的重建准确度.

2 理论及方法

2.1 磁共振指纹生成原理与 Bloch 流形约束

MRF 技术通过伪随机变化的射频脉冲激发序列将不同的组织生理参数组合编码成具有独特时域变化特征的指纹,相关原理如图 1 所示. MRF 采用射频脉冲序列激发观测目标,并在每个重复时间(Time Repetition, TR)点下采集观测目标的 K 空间信号,采集完成后通过傅里叶变换重建出观测目标的多幅磁共振对比度图像(即 MRF 像空间数据),不同磁共振对比度图像中同一空间位置的强度值组成了观测目标中该像素点对应的指纹,如图 1 底部蓝色曲线所示. 由于 MRF 快速扫描成像的技术要求,在信号采集过程中需要对 K 空间进行稀疏欠采样以缩短采样时间,这将导致重建出的指纹携带严重的折叠噪声.

MRF 字典的生成原理如图 2 所示. 在相同的射频脉冲序列激发下,任意组织生理参数对应的理想指纹(如图中的红色曲线所示)均可以基于 Bloch 方程仿真得到. 而构建字典可以将所有可能的组织生理参数组合对应的理想指纹预先存储起来,一方面提供从组织生理参数到指纹的映射关系,另一方面为重建指纹提供流形先验. 字典的大小由观测目标的组织生理参数分布范围和量化精度决定.

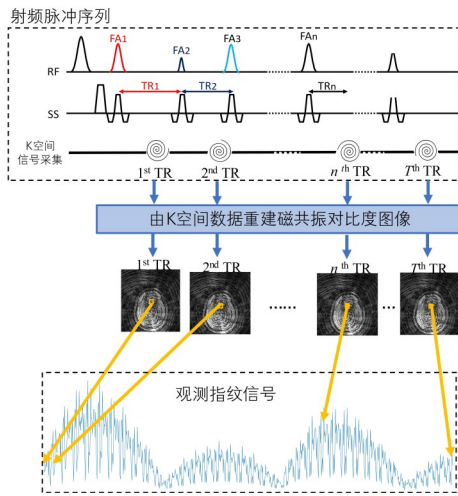


图1 磁共振指纹生成原理图

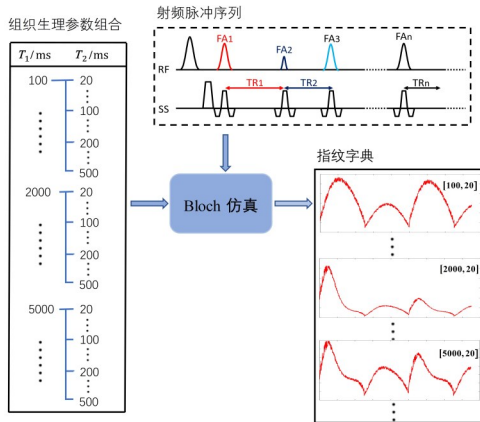


图2 磁共振指纹字典构建原理图

2.2 基于 Bloch 流形约束的 MRF 重建模型

根据磁共振成像原理, MRF 在弛豫过程中采集到的 K 空间稀疏信号可以表达如下:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}_u(\mathbf{X}) + \mathbf{n} \quad (1)$$

其中, \mathbf{X} 为观测目标的 MRF 像空间数据; \mathbf{Y} 为稀疏 K 空间信号; \mathbf{n} 为测量噪声; $\mathbf{F}_u(\cdot)$ 代表非均匀傅里叶变换.

根据 Bloch 方程, 若已知观测目标的组织生理参数 $\{\rho, T_1, T_2\} \in \mathbb{R}^N$ (ρ 代表观测目标的质子密度) 以及射频脉冲序列的采集参数 $\{\text{TR}, \text{FA}\} \in \mathbb{R}^T$ (TR 表重复时间, FA 表示翻转角), 则 MRF 像空间数据 \mathbf{X} 与组织生理参数之间的相互映射关系为

$$\mathbf{X} = \phi(T_1, T_2 | \text{TR}, \text{FA}) \rho \quad (2)$$

其中, N 为二维观测目标包含的像素点数目; T 为射频脉冲序列包含的 TR 时间点数目 (即采集长度); $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N \times T}$; $\phi(\cdot)$ 代表 Bloch 方程. 令 $\theta = \{T_1, T_2\}$, 并省略系统采集参数 $\{\text{TR}, \text{FA}\}$, 式 (2) 可以被简化为 $\mathbf{X} = \phi(\theta) \rho$. \mathbf{X} 的每一列数据 $\mathbf{X}_{:,t}$ 为观测目标在第 t 个时间点的磁共振对比度图像, 可表示为 $\mathbf{X}_{:,t} = \phi_t(\theta) \rho$; \mathbf{X} 的每一行数据

$\mathbf{X}_{n,:}$ 为观测目标中第 n 个像素对应的磁共振指纹. 考虑到 MRF 字典包含了所有可能组织生理参数组合的理想指纹先验, 因此可以通过字典匹配的方法对 $\mathbf{X}_{n,:}$ 施加指纹流形特征约束.

不同 TR 时间点下 K 空间信号的采集互不干扰, 因此可以将稀疏 K 空间数据矩阵表示为 $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_{:,1} \mathbf{Y}_{:,2} \cdots \mathbf{Y}_{:,T}]$, 其中 $\mathbf{Y}_{:,t}$ 为第 t 个 TR 时间点采集到的稀疏 K 空间信号, 它与 $\mathbf{X}_{:,t}$ 之间的关系如下:

$$\mathbf{Y}_{:,t} = \mathbf{F}_u(\mathbf{X}_{:,t}) + \mathbf{n}_t, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, T\} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{Y}_{:,t} \in \mathbb{C}^Q$, Q 为每个时间点下 K 空间的稀疏采样点数目 (不失一般性地假设每个时间点内 K 空间采样点数目相等). $\mathbf{n}_t \in \mathbb{C}^Q$ 为第 t 个 TR 时间点下的测量噪声, 通常假设其为复高斯白噪声. 将 $\mathbf{X}_{:,t} = \phi_t(\theta) \rho$ 带入式 (3) 中, 可以得到 K 空间测量信号与组织生理参数之间的对应关系:

$$\mathbf{Y}_{:,t} = \mathbf{F}_u(\phi_t(\theta) \rho) + \mathbf{n}_t, \quad \forall t \in \{1, 2, \dots, T\} \quad (4)$$

因此, 若要估算组织生理参数 $\{\rho, \theta\}$, 需要求解以下非线性最小二乘问题^[7]:

$$\{\hat{\rho}, \hat{\theta}\} = \arg \min_{\rho, \theta} \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \|\mathbf{Y}_{:,t} - \mathbf{F}_u(\phi_t(\theta) \rho)\|_2^2 \quad (5)$$

该 MRF 重建模型基于 Bloch 方程约束指纹流形, 实现了从稀疏 K 空间信号到组织生理参数的直接映射. 然而由于 K 空间数据的稀疏欠采样, 式 (5) 中的最小二乘问题具有不适当性. 引入先验知识进一步缩小解空间是目前解决该问题的主流方法.

2.3 融合局部低秩先验与 Bloch 流形约束的 MRF 重建模型

考虑到观测目标局部区域内组织的强相关性, MRF 像空间数据在局部区域具有低秩特性, 并且其秩远小于 MRF 像空间数据的全局秩. 相较于全局低秩特性, 局部低秩特性在消除数据冗余、提升重建效果等方面更加具有优势^[13-16]. 为此, 本文构建融合局部低秩先验与 Bloch 流形约束的 MRF 重建模型:

$$\begin{aligned} \{\hat{\rho}, \hat{\theta}\} = \arg \min_{\rho, \theta, \mathbf{X}} & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \|\mathbf{Y}_{:,t} - \mathbf{F}_u(\phi_t(\theta) \rho)\|_2^2 \\ & + \lambda_l \sum_b \text{rank}(\mathbf{C}_b \mathbf{X}) \\ \text{s.t. } & \phi_t(\theta) \rho = \mathbf{X}_{:,t} \end{aligned} \quad (6)$$

式 (6) 由 3 个部分组成: 第 1 项为数据保真项; 第 2 项为局部低秩正则化项; 第 3 项为 Bloch 流形约束项. 本文基于 Bloch 方程构建指纹字典来约束指纹流形. 其中, λ_l 为局部低秩正则化系数, $\mathbf{C}_b \mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M \times T}$ 表示观测目标中一个随机抽取的局部图像块所对应的 MRF 像空间数据, 该局部图像块的尺寸为 $\sqrt{M} \times \sqrt{M}$ ($M \ll N$), 下标 b 代表该局部图像块左上角像素的空间位置索引.

由于局部低秩约束 $\text{rank}(\mathbf{C}_b \mathbf{X})$ 非凸, 本文使用其凸近似核范数 $\|\mathbf{C}_b \mathbf{X}\|_*$ [19, 20] 代替 $\text{rank}(\mathbf{C}_b \mathbf{X})$, 因此式(6)改写为

$$\begin{aligned} \{\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\} = \arg \min_{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}} & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \|\mathbf{Y}_{:,t} - \mathbf{F}_u(\phi_t(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho})\|_2^2 \\ & + \lambda_l \sum_b \|\mathbf{C}_b \mathbf{X}\|_* \\ \text{s.t. } & \phi_t(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho} = \mathbf{X}_{:,t} \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\|\mathbf{C}_b \mathbf{X}\|_*$ 为局部 MRF 像空间数据矩阵 $\mathbf{C}_b \mathbf{X}$ 的奇异值之和. 至此, 通过求解式(7)中融合局部低秩先验与 Bloch 流形约束的带约束优化问题, 可以估计出组织生理参数 $\boldsymbol{\rho}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$.

2.4 ADMM 算法求解过程

式(7)是一个带约束的非凸优化问题, 并且其中还包含了大量的具有不同尺度的变量, 这导致难以使用一般的非线性优化算法 [21] 进行求解. 为此, 本文求解时首先使用变量分离算法 (Variable Splitting, VS) [7, 22] 将 Bloch 流形约束条件从数据保真项中分离出来, 并将 MRF 像空间数据从局部低秩正则化项中分离出来, 从而式(7)中的优化问题转换为式(8)中的优化问题, 然后采用 ADMM 算法求解式(8)中的带约束非凸最小化问题.

$$\begin{aligned} \{\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}\} = \arg \min_{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}, \mathbf{R}_b} & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \|\mathbf{Y}_{:,t} - \mathbf{F}_u(\mathbf{X}_{:,t})\|_2^2 + \lambda_l \sum_b \|\mathbf{R}_b\|_* \\ \text{s.t. } & \phi_t(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho} = \mathbf{X}_{:,t} \text{ and } \mathbf{C}_b \mathbf{X} = \mathbf{R}_b \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)是一个带约束优化问题, 根据 ADMM 算法, 其对应的无约束增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}, \mathbf{R}_b) = & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \|\mathbf{Y}_{:,t} - \mathbf{F}_u(\mathbf{X}_{:,t})\|_2^2 + \lambda_l \sum_b \|\mathbf{R}_b\|_* \\ & + \sum_{t=1}^T \left\{ \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{X}_{:,t} - \phi_t(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho}\|_2^2 + \text{Re} \left(\mathbf{A}_{\mathbf{X}_{:,t}}, \mathbf{X}_{:,t} - \phi_t(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho} \right) \right\} \\ & + \sum_b \left\{ \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{C}_b \mathbf{X} - \mathbf{R}_b\|_F^2 + \text{Re} \left(\mathbf{A}_{\mathbf{R}_b}, \mathbf{C}_b \mathbf{X} - \mathbf{R}_b \right) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\mathbf{A}_{\mathbf{X}_{:,t}}$ 和 $\mathbf{A}_{\mathbf{R}_b}$ 为拉格朗日乘子, $\mathbf{A}_{\mathbf{X}_{:,t}} \in \mathbb{C}^N$, $\mathbf{A}_{\mathbf{R}_b} \in \mathbb{C}^{M \times T}$; μ_1 和 μ_2 为罚函数系数, 均大于 0; $\text{Re}(\cdot)$ 为取复数实部运算. ADMM 算法将式(9)中的无约束增广拉格朗日函数分解为下列 3 个子问题, 并逐个进行求解:

$$\{\boldsymbol{\rho}^{(j+1)}, \boldsymbol{\theta}^{(j+1)}\} = \arg \min_{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}} \mathbf{L}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}^{(j)}, \mathbf{R}_b^{(j)}) \quad (10)$$

$$\mathbf{X}^{(j+1)} = \arg \min_{\mathbf{X}} \mathbf{L}(\boldsymbol{\rho}^{(j+1)}, \boldsymbol{\theta}^{(j+1)}, \mathbf{X}, \mathbf{R}_b^{(j)}) \quad (11)$$

$$\mathbf{R}_b^{(j+1)} = \arg \min_{\mathbf{R}_b} \mathbf{L}(\boldsymbol{\rho}^{(j+1)}, \boldsymbol{\theta}^{(j+1)}, \mathbf{X}^{(j+1)}, \mathbf{R}_b) \quad (12)$$

然后更新拉格朗日乘子:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{X}_{:,t}}^{(j+1)} = \mathbf{A}_{\mathbf{X}_{:,t}}^{(j)} + \mu_1 (\mathbf{X}_{:,t}^{(j+1)} - \phi_t(\boldsymbol{\theta}^{(j+1)})\boldsymbol{\rho}^{(j+1)}) \quad (13)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{R}_b}^{(j+1)} = \mathbf{A}_{\mathbf{R}_b}^{(j)} + \mu_2 (\mathbf{C}_b \mathbf{X}^{(j+1)} - \mathbf{R}_b^{(j+1)}) \quad (14)$$

其中, j 为当前迭代次数. 直到问题的解满足收敛条件或达到最大迭代次数, 上述迭代终止. 接下来, 本文给出式(10)~(12)中的最小化问题的详细求解方法.

首先, 求解式(10), 更新参数 $\{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}\}$. 式(10)的具体表达为

$$\{\boldsymbol{\rho}^{(j+1)}, \boldsymbol{\theta}^{(j+1)}\} = \arg \min_{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}} \sum_{t=1}^T \frac{\mu_1}{2} \left\| \phi_t(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho} - \left(\mathbf{X}_{:,t}^{(j)} + \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{X}_{:,t}}^{(j)}}{\mu_1} \right) \right\|_2^2 \quad (15)$$

式(15)中误差向量二范数的叠加和等价于求解对应误差矩阵的 Forbenius 范数, 即

$$\{\boldsymbol{\rho}^{(j+1)}, \boldsymbol{\theta}^{(j+1)}\} = \arg \min_{\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\theta}} \frac{\mu_1}{2} \|\phi(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho} - \mathbf{Z}^{(j)}\|_F^2 \quad (16)$$

其中, $\mathbf{Z}^{(j)} = \mathbf{X}^{(j)} + \mathbf{A}_{\mathbf{X}}^{(j)}/\mu_1$; $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_{:,1}, \mathbf{X}_{:,2}, \dots, \mathbf{X}_{:,T}]$; $\mathbf{A}_{\mathbf{X}} = [\mathbf{A}_{\mathbf{X}_{:,1}}, \mathbf{A}_{\mathbf{X}_{:,2}}, \dots, \mathbf{A}_{\mathbf{X}_{:,T}}]$; $\phi(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho} = [\phi_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho}, \phi_2(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho}, \dots, \phi_T(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\rho}]$. 本文通过在字典中进行穷尽搜索解决式(16)中的非线性最小二乘问题, 具体做法: 针对矩阵 $\mathbf{Z}^{(j)}$ 的每一行, 本文使用字典匹配方法从预先构建的指纹字典中找出与其相关性最强的字典词条, 索引到对应的组织参数 $\boldsymbol{\theta}$, 并通过计算观测指纹与匹配词条之间的幅度比值得到相应的质子密度 $\boldsymbol{\rho}$.

然后, 求解式(11), 更新 MRF 像空间数据 \mathbf{X} . 式(11)的具体表述为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(j+1)} = \arg \min_{\mathbf{X}} & \sum_{t=1}^T \frac{1}{2} \|\mathbf{Y}_{:,t} - \mathbf{F}_u(\mathbf{X}_{:,t})\|_2^2 \\ & + \sum_{t=1}^T \frac{\mu_1}{2} \left\| \mathbf{X}_{:,t} - \phi_t(\boldsymbol{\theta}^{(j+1)})\boldsymbol{\rho}^{(j+1)} + \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{X}_{:,t}}^{(j)}}{\mu_1} \right\|_2^2 \\ & + \sum_b \frac{\mu_2}{2} \left\| \mathbf{C}_b \mathbf{X} - \mathbf{R}_b^{(j)} + \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{R}_b}^{(j)}}{\mu_2} \right\|_F^2 \end{aligned} \quad (17)$$

在每次迭代中, 如果随机抽取的局部图像块数量足够多, 观测目标中的每个像素点都会被局部图像块重复多次采样, 则式(17)中的最后一项和式(18)中的等式右边项等价 [13], 即

$$\sum_b \frac{\mu_2}{2} \left\| \mathbf{C}_b \mathbf{X} - \mathbf{R}_b^{(j)} + \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{R}_b}^{(j)}}{\mu_2} \right\|_F^2 = \frac{\alpha \mu_2}{2} \left\| \mathbf{X} - \mathbf{R}^{(j)} + \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{(j)}}{\mu_2} \right\|_F^2 \quad (18)$$

其中, $\mathbf{R}_b = \mathbf{C}_b \mathbf{R}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{R}_b} = \mathbf{C}_b \mathbf{A}_{\mathbf{R}}$, 即 \mathbf{R}_b 和 $\mathbf{A}_{\mathbf{R}_b}$ 分别是由矩阵 \mathbf{R} 和 $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}$ 中的 M 个行向量组成, 行索引由局部图像块中的每个像素点在观测目标中的空间位置决定. 式(18)等式右边的 α 为局部图像块的采样密度, 其定义为 $\alpha \approx MN_b/N$, 表示每轮迭代中观测目标的每个像素点被随机抽取的局部图像块重复采样的次数, 其中 N_b 为随机抽取的局部图像块的数目, 本文中默认情况下 $\alpha = 10$. 将式(18)代入式(17), 则式(17)中的优化问题转变为将

对 $\mathbf{X}_{:,i}$ 可分离的二次优化问题, 可以通过共轭梯度 (Conjugate Gradient, CG) 算法^[23] 进行求解.

最后, 求解式(12), 更新 \mathbf{R}_b . 式(12)中优化问题的详细表达式为

$$\mathbf{R}_b^{(j+1)} = \arg \min_{\mathbf{R}_b} \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{R}_b - \mathbf{W}^{(j)}\|_F^2 + \lambda_l \|\mathbf{R}_b\|_* \quad (19)$$

其中, $\mathbf{W}^{(j)} = \mathbf{C}_b \mathbf{X}^{(j+1)} + \mathbf{A}_{\mathbf{R}_b}^{(j)} / \mu_2$. 式(19)是一个经典的核范数最小化问题, 可以通过奇异值阈值 (Singular Value Thresholding, SVT) 算法^[24] 求解, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_b^{(j+1)} &= \text{SVT}_{\lambda_l / \mu_2}(\mathbf{W}^{(j)}) \\ &= \sum_i \max(\tau_i - \lambda_l / \mu_2, 0) \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H \end{aligned} \quad (20)$$

其中, τ_i 为矩阵 \mathbf{W} 的第 i 个奇异值; 而 \mathbf{u}_i 和 \mathbf{v}_i 分别对应矩阵 \mathbf{W} 的第 i 个左奇异向量和右奇异向量.

值得注意的是, 每轮迭代随机抽取 N_b 个局部图像块, 相应地需要更新 N_b 个矩阵 \mathbf{R}_b . \mathbf{R}_b 更新完成后, 根据它们所包含的行向量在矩阵 \mathbf{R} 中的行索引, 将拥有相同行索引的行向量取平均后, 放回矩阵 \mathbf{R} 的对应行中, 生成下一轮迭代开始时矩阵 \mathbf{R} 的估计. 在下一轮迭代的过程中, 根据随机抽取的局部图像块的空间位置, 再从矩阵 \mathbf{R} 中抽取 M 个行向量, 组成新的 \mathbf{R}_b . 同理, $\mathbf{A}_{\mathbf{R}_b}$ 与 $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}$ 之间存在相同的关系.

综合上述求解步骤, 本文算法的求解流程如算法 1 所示. 考虑到本文算法求解的优化问题是非凸的, 算法的迭代优化过程和最终结果受到初始值的影响. 为此, 本文采取大多数算法的初始化策略, 令 $\mathbf{X}^{(0)}$ 为稀疏 K 空间数据的网格化重建结果^[5], 同时令 $\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{X}^{(0)}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{X}_{:,i}}^{(0)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{(0)} = \mathbf{0}$.

算法 1 融合局部低秩先验与 Bloch 流形约束的 MRF 重建算法

输入: K 空间数据测量矩阵 \mathbf{Y} , 局部图像块采样数目 N_b , ADMM 最大迭代次数 J_{\max} .

初始化: $\mathbf{X}^{(0)}$, $\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{X}^{(0)}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{X}_{:,i}}^{(0)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{(0)} = \mathbf{0}$.

FOR $j = 1: J_{\max}$, DO

步骤 1. 求解式(15)得到 $\rho^{(j+1)}$, $\theta^{(j+1)}$;

步骤 2. 代入式(18)到式(17)中, 求解式(17)得到 $\mathbf{X}^{(j+1)}$;

FOR N_b 个随机抽取的局部图像块

步骤 3. $\mathbf{R}_b^{(j)} = \mathbf{C}_b \mathbf{R}^{(j)}$, 求解式(20)得到 $\mathbf{R}_b^{(j+1)}$;

步骤 4. $\mathbf{A}_{\mathbf{R}_b}^{(j)} = \mathbf{C}_b \mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{(j)}$, 并通过式(14)得到 $\mathbf{A}_{\mathbf{R}_b}^{(j+1)}$;

END FOR

步骤 5. 根据 N_b 个 $\mathbf{R}_b^{(j+1)}$ 所包含的行向量在矩阵 $\mathbf{R}^{(j)}$ 中的行索引, 将拥有相同行索引的行向量取平均后, 放回矩阵 $\mathbf{R}^{(j)}$ 的对应行中, 更新得到 $\mathbf{R}^{(j+1)}$;

步骤 6. 同步骤 5, 由 N_b 个 $\mathbf{A}_{\mathbf{R}_b}^{(j+1)}$ 更新得到 $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{(j+1)}$;

步骤 7. 根据式(13)更新拉格朗日乘子 $\mathbf{A}_{\mathbf{X}_{:,i}}^{(j+1)}$;

END FOR

输出: ρ , θ .

3 实验与分析

3.1 数值仿真

本文通过数值仿真实验验证所提算法的性能. 从 Brainweb 数据库^[25] 中下载一个数字大脑横截面模型, 其中 T_1 , T_2 , PD 组织参数如图 3 所示. 本文使用伪稳态自由进动 (pseudo Steady State Free Precession, pSSFP) 序列^[26] 作为射频脉冲激发序列, 该序列最大采集长度为 850, 其翻转角 (Flip Angle, FA) 参数与文献 [11] 相同, 重复时间 (TR) 以及回波时间 (Time Echo, TE) 基于 pSSFP 模式计算得到.

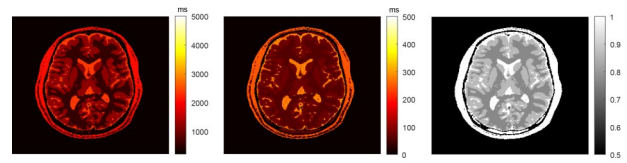


图 3 数字大脑模型组织生理参数图

数值仿真时, 首先基于 Bloch 方程通过仿真生成数字大脑模型的 MRF 像空间数据, 然后通过傅里叶变换将像空间数据转换到 K 空间, 并使用变密度螺旋采样轨迹对 K 空间进行稀疏欠采样, 最终获得仿真稀疏 K 空间数据. 本文默认情况下使用的变密度螺旋采样轨迹包含 1 960 个采样点, 它在 K 空间中心全采样, K 空间边缘 1/48 欠采样. 为了模拟真实信号采集过程, 在仿真得到的稀疏 K 空间数据中添加均值为零的复高斯白噪声, 获得信噪比 (Signal Noise Ratio, SNR) 为 30 dB 的信号. 信噪比的计算式为 $\text{SNR} = 20 \log_{10}(s/\sigma)$, 其中 s 为理想 MRF 像空间数据中第一幅磁共振对比度图像的平均强度 (去除背景区域), σ 为噪声的标准差. 综上所述, 数值仿真流程如图 4 所示.

本文所有的 MRF 重建算法使用同一个字典, 该字典只考虑 T_1 和 T_2 组织参数对指纹的影响, 而不考虑磁场不均匀性、磁化转移等其他因素的影响. 根据正常人体大脑生理参数分布范围, 设定字典中 T_1 参数的变换范围为 [100, 5000] ms, T_2 参数的变换范围为 [10, 500] ms. 根据组织生理参数的变化特点, 采用非等间隔离散方法, T_1 和 T_2 参数分别被离散化为 $T_1 = [100:20:2000, 2200:200:5000]$ ms, $T_2 = [10:2:50, 55:5:300, 320:20:500]$ ms. 由于正常人体的组织生理参数 T_1 大于 T_2 , 因此去除掉 T_1 小于 T_2 对应的组织生理参数组合, 最终字典共包含 8 595 个指纹词条.

3.2 实验结果

本节通过 4 组实验来验证本文算法的性能, 并采用临床上最感兴趣的脑脊液、灰质、白质 3 种组织类型重建生理参数的平均相对误差作为算法性能的定量评价

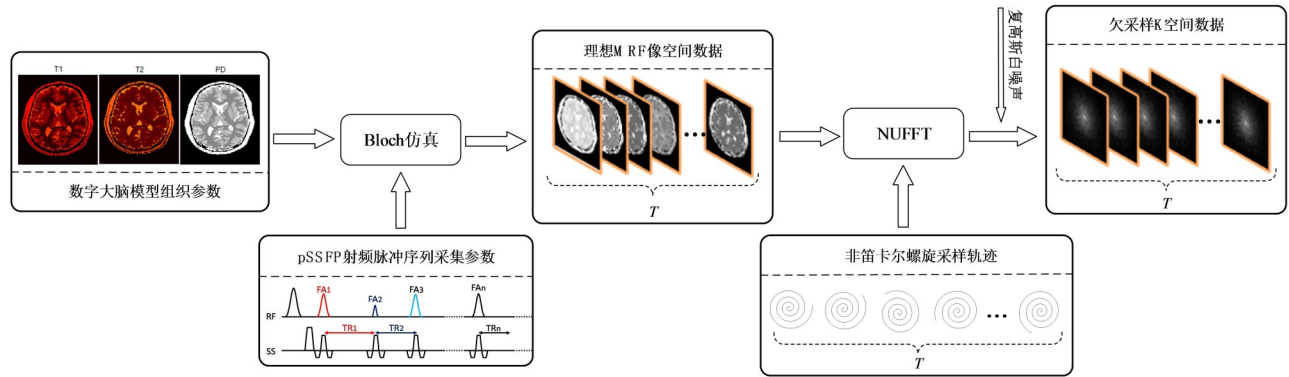


图4 数值仿真流程图

指标(这3种组织类型占据了数字大脑模型的绝大部分区域)。首先,将本文算法与常规 MRF 重建算法以及目前先进的迭代重建算法进行对比;其次,针对 K 空间信号的采集参数和重建算法相关参数的设置,分别进行详细的讨论。

3.2.1 实验 1:与常规 MRF 重建算法的比较

常规 MRF 重建算法分为 2 个步骤:

第 1 步,利用网格化重建算法或非均匀傅里叶变换由稀疏 K 空间数据重建出带噪 MRF 像空间数据。实验采用网格化重建算法,利用 Voronoi 图密度补偿函数^[27]和 Kaiser-Bessel 卷积核^[5]将欠采样的 K 空间数据插值到均匀网格点上,并使用快速傅里叶变换重建出带有严重混叠伪影的 MRF 像空间数据。

第 2 步,根据重建的 MRF 像空间数据进行字典匹配,重建出组织生理参数。为了验证本文算法可以用更短的采集长度实现更高的组织参数重建准确度,从而缩短成像时间,实验对指纹序列进行均匀下采样,使采集长度降低至 $T=284$ 。为了使本文算法达到最优性能,需要对局部低秩正则化系数 λ_l , 惩罚因子 μ_1 和 μ_2 , 以及局部组织块的尺寸等参数进行调优。通过重复实验对算法参数进行调整,最终设置最优算法参数:局部图像块尺寸为 $\sqrt{M} \times \sqrt{M} = 7 \times 7$, $\lambda_l = 1 \times 10^{-4}$, $\mu_1 = 5 \times 10^{-3}$, $\mu_2 = 5 \times 10^{-4}$, CG 算法迭代次数为 20, ADMM 迭代次数为 70。

常规 MRF 重建算法与本文算法的实验结果如图 5 所示,从上至下依次为组织生理参数 T_1, T_2 和 PD 的重建结果。其中,图(5)左边 3 列为常规算法与本文算法重建出的组织参数定量图以及其对应的相对误差图,相对误差图右下角的数字代表相对误差的平均值。最右列的曲线图详细描述了本文算法的收敛过程,其中实线为本文算法组织参数重建误差的收敛曲线,虚线为常规 MRF 算法在采集长度 $T=284$ 和 $T=850$ 下的重建误差阈值曲线。值得注意的是,由于本文算法将 MRF 数据初始化为稀疏 K 空间数据的网格化重建结果,因

此在第一次迭代时,蓝色实线和红色虚线应相交于相同的重建误差(为了方便结果展示,曲线图并未绘制前几次迭代的重建误差)。

观察图 5 可知,对于常规 MRF 重建算法,当采集长度由 284 个时间点增长至 850 个时间点, T_1, T_2 和 PD 这 3 种组织参数的重建误差分别降低了 2.69%, 2.19% 和 0.44%,表明增加采集长度有利于降低组织生理参数的重建误差。这是因为,常规 MRF 算法重建出的指纹携带大量的折叠噪声,更长的指纹序列有利于字典匹配算法在穷尽搜索字典的过程中克服噪声干扰,找出最佳匹配的指纹词条。此外,实验结果显示,相较于常规算法在采集长度 $T=850$ 下的重建结果,本文算法使用 $T=284$ 的采集长度,仍然使 T_1, T_2 和 PD 这 3 种组织参数的重建误差分别降低了 4.29%, 5.11% 和 1.39%。这表明,本文算法可以在缩短采集长度的同时进一步提升组织参数的重建准确度,为缩短成像时间、加速 MRF 技术发展提供了良好支撑。

3.2.2 实验 2:与其他 MRF 迭代重建算法的比较

本文算法是一种迭代重建算法,本节将本文算法与 LRADMM 算法和 MBIR-MRF 算法这 2 种最先进的 MRF 迭代重建算法进行比较。对于所有 MRF 重建算法,实验中保持采集长度 $T=284$ 、信噪比 SNR=30 dB 不变。

LRADMM 算法利用奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)技术将 MRF 像空间数据投影到由字典的前 r 个左奇异向量所定义的低维子空间中($r \ll T$),因此 MRF 像空间数据在时域上被极大地压缩。然后,LRADMM 算法在低维子空间中引入 Bloch 流形约束重建 MRF 像空间数据。实验中根据 LRADMM 算法原始文献的结果^[11],通过重复实验对该算法的关键参数 r 以及 Bloch 流形约束条件的罚函数系数 μ 进行调整,最终确定 $r=10, \mu=2 \times 10^{-2}$ 。

MBIR-MRF 算法与本文算法的区别在于使用全局低秩正则化项 $\text{rank}(X)$ 代替式(4)中的局部低秩正则化

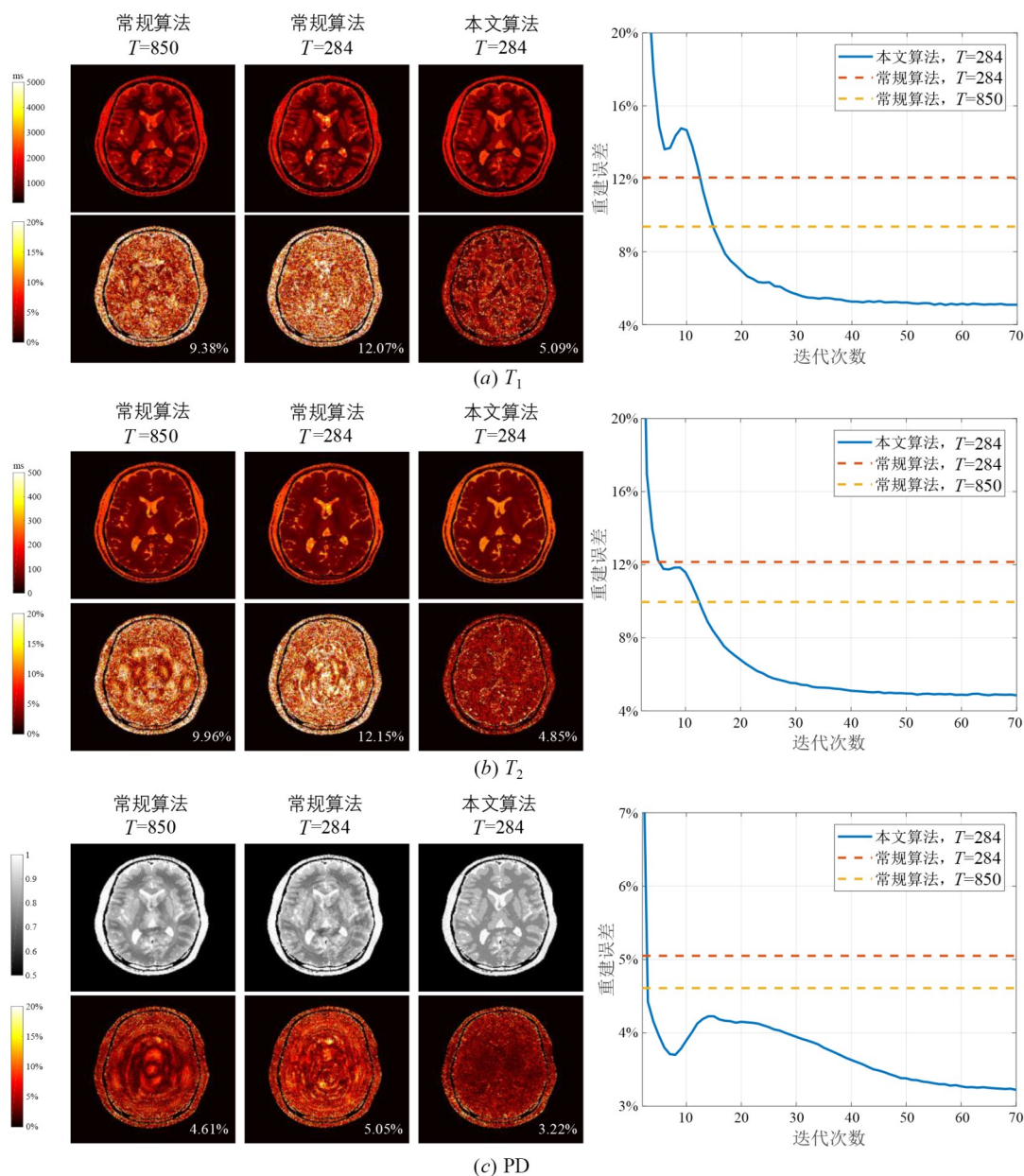


图5 常规MRF算法及本文算法的组织参数重建结果

项 $\sum_b \text{rank}(C_b \mathbf{X})$. 由于原始文献并未给出其最佳参数的设置^[9], 同样, 本文基于重复实验对相关算法参数进行调优, 得到全局低秩正则化系数 $\lambda_l = 1 \times 10^{-2}$, 罚函数系数 $\mu_1 = \mu_2 = 5 \times 10^{-3}$, CG算法迭代次数为20, ADMM算法迭代次数为60.

LRADMM算法、MBIR-MRF算法以及本文算法的组织参数重建结果的定量图及其对应的相对误差如图6所示, 其中组织参数定量图左下角所示为蓝色方框区域内组织参数重建结果的局部放大, 相对误差图右下角的数字为相对误差的平均值. 实验结果表明, 相较于引入了全局低秩先验与Bloch流形约束条件的

LRADMM算法和MBIR-MRF算法, 本文算法使 T_1 , T_2 和PD这3种组织参数的重建误差分别降低了3.62%, 2.56%, 0.13%和1.83%, 2.09%, 0.36%. 这受益于局部低秩先验具有更强的数据去冗余能力, 可以用来消除迭代重建过程中产生的混叠伪影. 而基于局部图像块的低秩约束还可以避免局部区域之间重建误差的相互传播. 与此同时, 本文算法还在迭代重建过程中引入了字典先验, 有效地保留了指纹的时域流形特征.

除重建准确度之外, 重建效率也是评价不同算法性能表现的一个指标, 上述3种MRF重建算法的计算

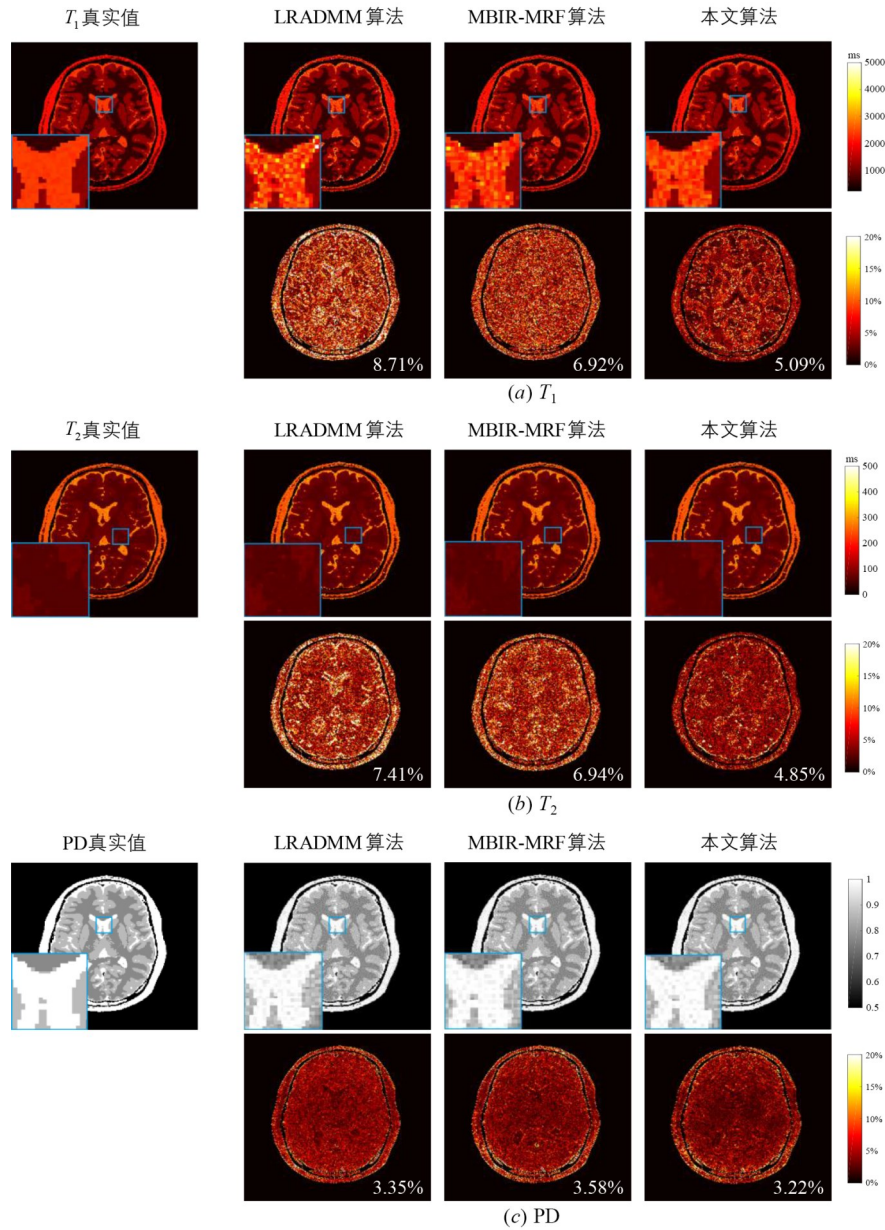


图6 不同MRF迭代重建算法的组织参数重建结果及其相对误差

时间以及收敛所需的迭代次数如表1所示,其测试硬件环境为 AMD Ryzen 4800H CPU 以及 16 GB DDR4 内存. 观察表1可知,尽管本文算法可以收敛至最低的组织参数重建误差,但需要付出远超LRADMM算法的计算代价,这是因为LRADMM算法在重建MRF像空间数据之前,首先在时域上对其进行压缩(通常为百倍数量级),极大限度地减少了计算代价. 而MBIR-MRF算法与本文算法在重建效率上相差不大.

表1 3种MRF迭代重建算法的计算效率

	LRADMM	MBIR-MRF	本文算法
计算时间/迭代	约23 s	约250 s	约280 s
迭代次数	30	60	70

由于LRADMM算法、MBIR-MRF算法以及本文算法所求解的均为非凸优化问题,因此这3种算法的重建结果在一定程度上依赖于初始化方案的选择. 其中,LRADMM算法^[11]使用零初始化方案,而MBIR-MRF算法^[9]以及本文算法使用网格化重建结果作为MRF像空间数据的初始值. 为了研究不同的算法对初始化方案的灵敏度,对于这3种算法,本文分别使用上述2种不同初始化方案进行重建,重建结果记录在表2中. 实验结果表明,在保持表1所示的迭代次数不变的情况下,上述3种MRF重建算法使用任何一种初始化方案均能够达到收敛,其中MBIR-MRF算法和本文算法在2种初始化方案下的收敛结果保持一致,而LRADMM算法使

用零初始化方案时的重建结果要略优于使用网格化重建初始化方案时的重建结果。

最后,本节还针对 Bloch 流形约束条件在 MRF 迭代重建过程起到的重要作用进行了相关研究. 对于本文算法,在去除 Bloch 流形约束条件后再次观察算法的性能表现,得到以下结论:本文算法在去除 Bloch 流形约

束条件后收敛速度变慢,且最终的收敛误差较大,无法满足临床要求. 同时,文献[11]也曾提出 LRADMM 算法在去除字典约束条件后组织参数的重建误差显著增大. 这些结论均表明,在 MRF 迭代重建的过程中引入 Bloch 流形约束条件是十分必要的,字典作为指纹流形先验可以有效缓解 MRF 重建问题的不适定性.

表 2 2 种初始化方案下的组织参数重建误差

初始化方案	LRADMM 算法			MBIR-MRF 算法			本文算法		
	T_1	T_2	PD	T_1	T_2	PD	T_1	T_2	PD
零初始化	8.71%	7.41%	3.35%	6.87%	6.94%	3.55%	5.09%	4.90%	3.25%
网格化重建	8.97%	7.97%	3.62%	6.92%	6.94%	3.58%	5.09%	4.85%	3.22%

3.2.3 实验 3: K 空间信号采集参数对 MRF 重建算法的影响

不同 MRF 重建算法的组织参数重建准确度从根本上都受制于采集得到的 K 空间信号,而 K 空间信号的采集结果主要受到 3 个因素的影响,分别是 K 空间采样率、采集长度 T 以及测量噪声,本小节主要研究这 3 种采集参数对 MRF 重建算法的影响.

(1) K 空间采样率对 MRF 重建算法的影响

为了加快扫描速度, MRF 技术在弛豫过程中一般使用非笛卡尔稀疏采样模板对 K 空间进行高度欠采样,从而获得稀疏 K 空间信号,而螺旋采样模板和径向采样模板是最常用的两种非笛卡尔采样模板. 基于这 2 种非笛卡尔采样模板,本节主要讨论不同的采样率对不同的 MRF 重建算法的影响. 实验中保持采集长度 $T=284$,信噪比 $\text{SNR}=30$ dB.

本节设置了 4 个非笛卡尔欠采样轨迹,分为螺旋采样轨迹和径向采样轨迹 2 组,每组的 2 条轨迹具有不同的采样率,如图 7 所示. 对于螺旋采样轨迹,轨迹 a 是本文使用的默认采样轨迹,它在 K 空间中心全采样, K 空间边缘处 $1/48$ 欠采样,共包含 1 960 个采样点;轨迹 b 在 K 空间中心 $1/24$ 欠采样, K 空间边缘处 $1/48$ 欠采样,包含 1 094 个采样点. 对于径向采样轨迹,轨迹 c 和轨迹 d 分别包含 8 条和 4 条径向采样线,总的采样点数目分别为

2 049 和 1 025. 值得关注的是,轨迹 a 与轨迹 c 的采样点数目大致相等,而轨迹 b 与轨迹 d 的采样点数目大致相等.

针对上述 4 条不同的采样轨迹,不同算法的组织参数重建结果如表 3 所示,表中记录的为重建组织生理参数图的平均相对误差. 针对 LRADMM 算法、MBIR-MRF 算法以及本文算法,分别对比轨迹 a 与轨迹 b 的重建结果,以及轨迹 c 与轨迹 d 的重建结果,可以得到如下结论:①组织参数的重建准确度与 K 空间采样率成正比;②本文算法在任一采样率下的组织参数重建准确度均优于其他 2 种算法. 此外,针对更低的 K 空间采样率,本文算法具有更强的鲁棒性. 对比轨迹 a 与轨迹 c 的重建结果,以及轨迹 b 与轨迹 d 的重建结果,尽管它们具有大致相同的 K 空间采样率,但是它们的重建结果却具有较大差异,具体表现:螺旋采样轨迹的组织参数重建准确度远高于径向采样轨迹. 这是因为在螺旋采样模板中,更多的采样点位于 K 空间的中心区域(即低频区域),这更有利于重建出磁共振对比度图像的全局特征.

(2) 采集长度对 MRF 重建算法的影响

在实验 1 中已经证明采集长度对常规 MRF 重建算法^[4]有较大的影响,为了验证不同采集长度对 MRF 迭代重建算法的影响,本实验分别对通过 pSSFP 序列获得的磁共振指纹进行 1 倍、2 倍、3 倍均匀下采样,得到采集长度 $T=850$, $T=426$ 以及 $T=284$,并针对这 3 个采集长度分别进行仿真实验. 实验中,针对每个时间点下采集得到的 K

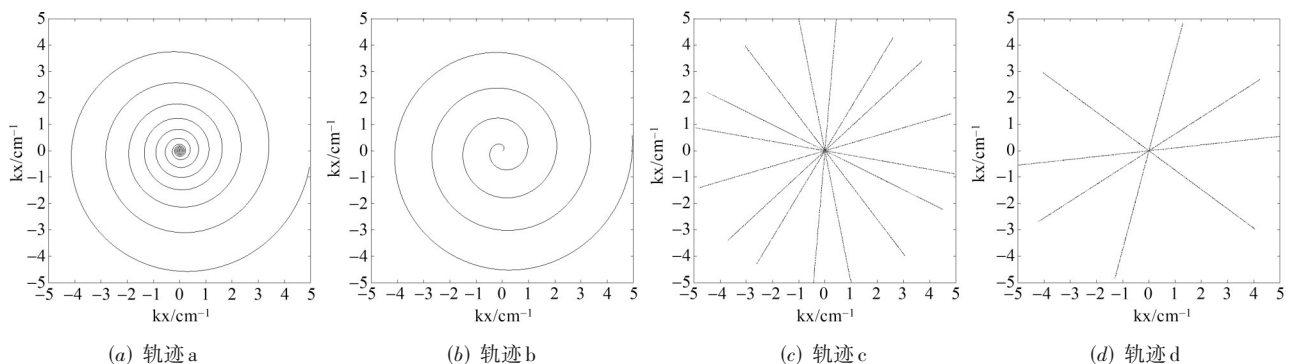


图 7 不同采样率的螺旋和径向采样轨迹

表 3 不同采样轨迹下的组织参数重建误差

采样模板	轨迹	LRADMM 算法			MBIR-MRF 算法			本文算法		
		T_1	T_2	PD	T_1	T_2	PD	T_1	T_2	PD
螺旋	a	8.71%	7.41%	3.35%	6.92%	6.94%	3.58%	5.09%	4.85%	3.22%
	b	9.72%	7.16%	3.49%	7.68%	7.31%	4.13%	6.47%	5.76%	3.29%
径向	c	15.7%	13.5%	5.85%	12.05%	12.38%	5.98%	8.42%	7.75%	6.59%
	d	17.2%	14.6%	6.05%	13.58%	13.68%	6.16%	9.65%	8.66%	6.74%

空间信号,添加噪声以保持信噪比 SNR=30 dB 不变.

LRADMM 算法、MBIR-MRF 算法以及本文算法在不同采集长度下的重建结果如图 8 所示,重建结果的评价指标为重建组织参数图的平均相对误差.结果表明,随着采集长度增加,上述 3 种算法的组织参数重建准确度都相应增加.并且,在所有的采集长度下,本文算法的组织参数重建准确度都要优于其他 2 种算法.

(3) 测量噪声强度对 MRF 重建算法的影响

因为 K 空间信号采集过程会受到采集系统及外部环境等因素的影响,采集得到的 K 空间信号通常含有测量噪声,研究中通常假设这种噪声为高斯白噪声.为了验证不同重建算法对测量噪声的鲁棒性,本实验设置 4 个测量噪声强度即 25 dB, 30 dB, 35 dB, 40 dB, 并分别测试所有算法在不同噪声强度下的性能表现,实验中保持采集长度 $T=284$ 不变.

LRADMM 算法、MBIR-MRF 算法以及本文算法在

不同测量噪声强度下的重建结果如图 9 所示,重建结果的评价标准为重建组织参数图的平均相对误差.从图中可知,本文算法在任意噪声强度下都能更准确度重建出 T_1 和 T_2 参数,而对于 PD 参数,3 种算法在信噪比较高的情况下,重建结果趋于一致.随着信噪比增大,观察不同算法重建误差曲线的整体趋势,可以推断本文算法对噪声的鲁棒性更强,且在低信噪比情况下,本文算法的优势更大.

3.2.4 实验 4: 本文算法的相关参数设置分析

考虑到引入局部低秩先验涉及到局部图像块的窗口尺寸 $\sqrt{M} \times \sqrt{M}$ 以及局部图像块采样密度 α 参数的设置,本节将针对这 2 种关键参数对本文算法的影响进行分析和讨论,从重建结果准确度及算法计算时间方面给出参数设置依据.

(1) 局部窗口尺寸的设置

由于 α 与 N_b 之间存在 $\alpha \approx MN_b/N$ 的等式联系,因此在实验中在讨论局部窗口尺寸时,需要调整 N_b 的值,保持

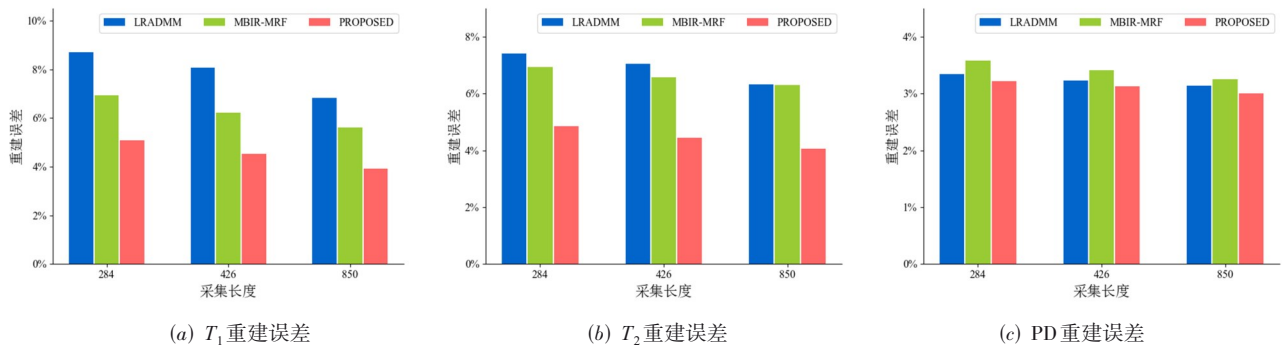


图 8 不同采集长度下的组织参数重建误差

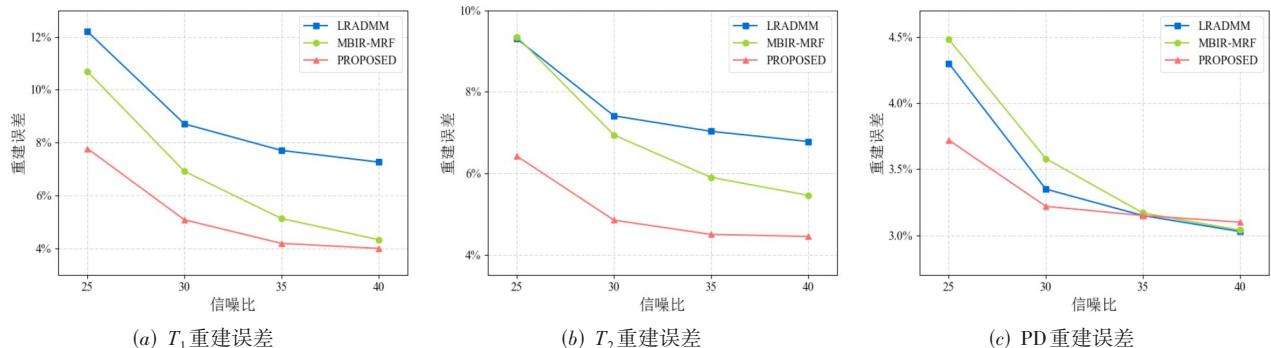


图 9 不同噪声强度下的组织参数重建误差

参数 α 不变. 局部图像块的窗口尺寸对本文算法的影响如图 10 所示, 图中选取了 4 个局部窗口尺寸, 分别为 7×7 , 11×11 , 15×15 , 19×19 . 由图 10 可知, 随着局部窗口尺寸减小, 本文算法的组织参数重建误差也逐渐减小, 当局部窗口尺寸为 $\sqrt{M} \times \sqrt{M} = 7 \times 7$ 时, T_1 , T_2

和 PD 三种组织参数的重建误差均收敛至最小值. 然而, 在保持采样密度 α 不变的情况下, 过小的局部窗口尺寸意味着更大的计算代价, 同时也可能导致局部低秩先验的约束作用消失. 综合以上因素, 本文选择 $\sqrt{M} \times \sqrt{M} = 7 \times 7$ 作为最佳局部窗口尺寸.

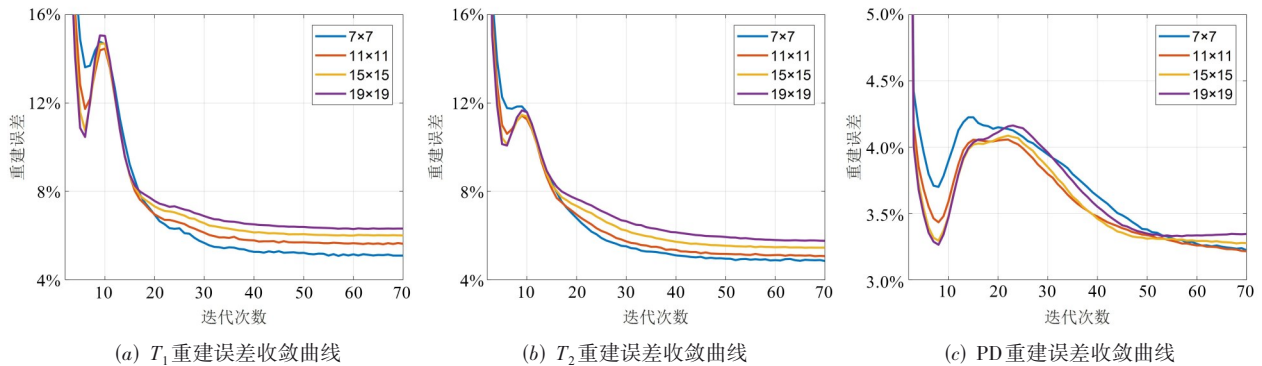


图 10 不同局部窗口尺寸下本文算法的重建结果

(2) 局部图像块采样密度的设置

局部图像块采样密度 α 为每轮迭代中观测目标的每个像素点被随机抽取的所有局部图像块重复采样的次数, 较大的 α 可以保证式 (18) 中的等号成立. 当讨论 α 参数时, 需要保持局部窗口尺寸为固定值 (实验中设置局部窗口尺寸为 $\sqrt{M} \times \sqrt{M} = 7 \times 7$). 此外, 由于参数 α 直接决定等式 (18) 右边项的系数大小, 因此实验中需调整 μ_2 和 λ_i 参数, 使得等式 (18) 右边项的系数 $\alpha\mu_2/2$ 以及式 (19) 中的奇异值阈值 λ_i/μ_2 始终保持不变. 局部组织块的采样密度对本文算法的影响如图 11 所示, 每个子图中的

4 条曲线分别对应 α 为 4, 6, 8, 10 的组织参数重建误差, 图右上角所示为虚线方框区域内 4 条曲线的局部放大. 比较这 4 条曲线可以发现, 在相同的迭代次数下, $\alpha=10$ 所对应的组织参数重建误差最小. 此外, 对比 $\alpha=4$, $\alpha=6$, $\alpha=8$ 对应的 3 条误差曲线的最终收敛结果可知, 随着 α 的增大, 组织参数的重建误差逐渐减小, 而 $\alpha=8$ 与 $\alpha=10$ 所对应的 2 条误差曲线的最终收敛结果却非常接近. 这表明本文算法的组织参数重建准确度不会随着 α 的增大而无限增大, 反而过大的 α 会增加算法的计算时间. 因此, 本文中设置采样密度 $\alpha=10$, 在获得较低重建误差的同时, 避免进一步增加算法的计算时间.

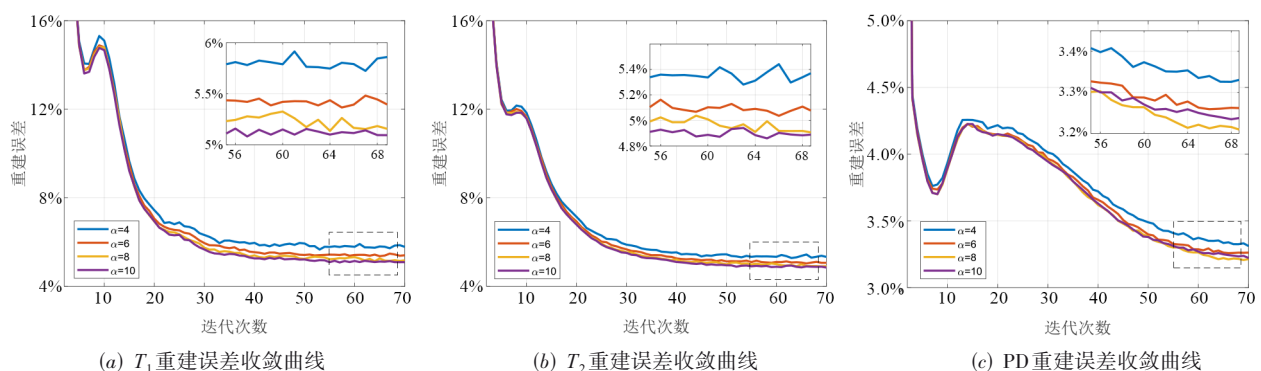


图 11 不同局部图像块采样密度下本文算法的重建结果

4 总结

本文提出一种融合局部低秩先验与 Bloch 流形约束的 MRF 重建模型, 并通过 ADMM 算法交替求解相关的非凸最小化问题. 本文算法通过引入空域的局部低秩先验有效地抑制了混叠伪影的产生, 与此同时, 利用字典提供的 Bloch 流形约束保护指纹时域特征不被丢

失, 提高 MRF 重建准确度. 仿真实验结果表明, ADMM 算法求解非凸 MRF 重建问题时取得了较好的收敛效果, 并且相较于引入了全局低秩先验与 Bloch 流形约束的其他同类算法, 本文算法具有更高的组织参数重建准确度. 然而, 本文算法在计算复杂度方面并不存在优势, 但是目前也存在一些方法可以对本文算法进行优

化,从而大大降低算法的计算时间.例如,可以通过奇异值分解对 MRF 像空间数据进行压缩,从而将算法的计算时间减小一个数量级,这将是我们的研究重点.

参考文献

- [1] POORMAN M E, MARTIN M N, MA D, et al. Magnetic resonance fingerprinting Part 1: Potential uses, current challenges, and recommendations[J]. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 2020, 51(3): 675-692.
- [2] BIPIN MEHTA B, COPPO S, FRANCES MCGIVNEY D, et al. Magnetic resonance fingerprinting: A technical review[J]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2019, 81(1): 25-46.
- [3] 李敏, 董正超, 张学武, 等. 磁共振指纹成像技术及其最新进展[J]. *中国科学: 生命科学*, 2019, 49(1): 28-40.
LI M, DONG Z C, ZHANG X W, et al. The technique of magnetic resonance fingerprinting and its latest development[J]. *Scientia Sinica (Vita)*, 2019, 49(1): 28-40. (in Chinese)
- [4] MA D, GULANI V, SEIBERLICH N, et al. Magnetic resonance fingerprinting[J]. *Nature*, 2013, 495(7440): 187-192.
- [5] JACKSON J I, MEYER C H, NISHIMURA D G, et al. Selection of a convolution function for Fourier inversion using gridding(computerised tomography application) [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1991, 10(3): 473-478.
- [6] FESSLER J A, SUTTON B P. Nonuniform fast Fourier transforms using Min-max interpolation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(2): 560-574.
- [7] ZHAO B, SETSOMPOP K, YE H H, et al. Maximum likelihood reconstruction for magnetic resonance fingerprinting [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2016, 35(8): 1812-1823.
- [8] DAVIES M, PUY G, VANDERGHEYNST P, et al. A compressed sensing framework for magnetic resonance fingerprinting[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2014, 7(4): 2623-2656.
- [9] ZHAO B. Model-based iterative reconstruction for magnetic resonance fingerprinting[C]//2015 IEEE International Conference on Image Processing. Quebec City: IEEE, 2015: 3392-3396.
- [10] MAZOR G, WEIZMAN L, TAL A, et al. Low-rank magnetic resonance fingerprinting[J]. *Medical Physics*, 2018, 45(9): 4066-4084.
- [11] ASSLÄNDER J, CLOOS M A, KNOLL F, et al. Low rank alternating direction method of multipliers reconstruction for MR fingerprinting[J]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2018, 79(1): 83-96.
- [12] WANG Z, LI H S, ZHANG Q W, et al. Magnetic resonance fingerprinting with compressed sensing and distance metric learning[J]. *Neurocomputing*, 2016, 174: 560-570.
- [13] MIAO X, LINGALA S G, GUO Y, et al. Accelerated cardiac cine MRI using locally low rank and finite difference constraints[J]. *Magnetic Resonance Imaging*, 2016, 34(6): 707-714.
- [14] ZHANG T, PAULY J M, LEVESQUE I R. Accelerating parameter mapping with a locally low rank constraint[J]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2015, 73(2): 655-661.
- [15] LIMA DA CRUZ G, BUSTIN A, JAUBERT O, et al. Sparsity and locally low rank regularization for MR fingerprinting[J]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2019, 81(6): 3530-3543.
- [16] BUSTIN A, LIMA DA CRUZ G, JAUBERT O, et al. High-dimensionality undersampled patch-based reconstruction (HD-PROST) for accelerated multi-contrast MRI [J]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2019, 81(6): 3705-3719.
- [17] ARBERET S, CHEN X, MAILHÉ B, et al. A parallel spatial and Bloch manifold regularized iterative reconstruction method for MR Fingerprinting[J]. *Magnetic Resonance Imaging*, 2021, 82: 74-90.
- [18] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2011, 3(1): 1-122.
- [19] RECHT B, FAZEL M, PARRILO P A. Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization[J]. *SIAM Review*, 2010, 52(3): 471-501.
- [20] 蒋明峰, 陆亮, 吴龙, 等. 基于加权 Schatten p 范数最小化的磁共振图像重构方法研究[J]. *电子学报*, 2019, 47(4): 784-790.
JIANG M F, LU L, WU L, et al. The research of MRI reconstruction method by using weighted Schatten P-norm minimization[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2019, 47(4): 784-790. (in Chinese)
- [21] NOCEDAL J, WRIGHT S J. *Numerical Optimization* [M]. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [22] AFONSO M V, BIOUCAS-DIAS J M, FIGUEIREDO M A T. Fast image recovery using variable splitting and con-

- strained optimization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(9): 2345-2356.
- [23] DANIEL J W. The conjugate gradient method for linear and nonlinear operator equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1967, 4(1): 10-26.
- [24] CAI J F, CANDES E J, SHEN Z W. A singular value thresholding algorithm for matrix completion[J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(4): 1956-1982.
- [25] COLLINS D L, ZIJDENBOS A P, KOLLOKIAN V, et al. Design and construction of a realistic digital brain phantom[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1998, 17(3): 463-468.
- [26] ASSLÄNDER J, GLASER S J, HENNIG J. Pseudo steady-state free precession for MR-fingerprinting[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2017, 77(3): 1151-1161.
- [27] 方杰, 刘仁金. 衍射层析成像的 Voronoi 图密度补偿算法的研究[J]. 电子学报, 2014, 42(7): 1268-1272.
- FANG J, LIU R J. Study on image reconstruction of diffraction tomography with density compensation algorithm by Voronoi diagrams[J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(7): 1268-1272. (in Chinese)

作者简介



李 敏 女, 1982 年 8 月出生, 山西大同人. 博士, 河海大学物联网工程学院副教授. 主要研究方向为遥感影像异常检测、磁共振指纹重建及图像复原.

E-mail: lm_0711@163.com



栗泽昊(通讯作者) 男, 1998 年 10 月出生, 河南登封人. 现为河海大学物联网工程学院硕士研究生. 主要研究方向为磁共振指纹重建.

E-mail: lizehaohu@163.com