

基于矩阵偏序关系的形态学算子

王 娜, 王俊平, 朱俊辉

(西安电子科技大学通信工程学院, 陕西西安 710071)

摘要: 已有形态偏序由于忽略了图像像素的局部相关性导致运算结果产生噪声叠加、拓扑失真等问题, 本文在矩阵Frobenius范数的基础上定义了一种新的偏序关系, 从理论上证明了该序满足的自反性、传递性和反对称性. 在此基础上, 本文提出了基于新序的形态学膨胀、腐蚀算子和相关的梯度运算算子. 为验证新序和算子的有效性, 与已有的算法进行对比实验, 结果表明, 新序和相应的算子在保证颜色分量相关性的同时, 利用矩阵运算保证了像素的局部相关性, 在抑制噪声和边缘保持方面均优于现有的算法. 同时, 通过结果对比和理论分析发现, 新的形态算子对结构元素尺寸的包容性强, 克服了形态算子在实际应用时难以选择合适结构元素大小的问题. 这种新序是多通道图像处理的基础, 可以拓宽形态学理论的应用范围.

关键词: 数学形态学; 矩阵的Frobenius范数; 偏序关系; 像素局部相关性; 噪声抑制; 拓扑保持

基金项目: 国家自然科学基金(No.61872433)

中图分类号: TP391.4

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2023)01-0213-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20220007

Morphological Operators Based on Matrix Partial Ordering Relation

WANG Na, WANG Jun-ping, ZHU Jun-hui

(School of Telecommunication, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: The existing morphological partial orderings neglect the local correlation of image pixels, which leads to problems such as noise superposition and topological distortion in the calculation results. This paper defines a new partial ordering relation based on the matrix Frobenius norm, which theoretically proves the reflexivity, transitivity and antisymmetry of the ordering. On this basis, this paper proposes the morphological dilation, erosion operators and the related gradient operators based on the new ordering. In order to verify the effectiveness of the new ordering and operators, those new operators are compared with the existing algorithms. The experimental results show that the new ordering and the corresponding operators ensure the correlation of the color components while using matrix operation to ensure the local correlation of the pixels. It outperforms the existing algorithms in terms of noise suppression and edge preservation. At the same time, through comparison of the results and theoretical analysis, it is found that the new morphological operators have a strong tolerance for the size of structural element, which overcomes the difficulty of selecting suitable size when the morphological operators are applied. This new ordering is the basis of multi-channel image processing and it can broaden the application range of morphological.

Key words: mathematical morphology; Frobenius norm of matrix; partial ordering relation; pixel local correlation; noise suppression; topology maintenance

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.61872433)

1 引言

数学形态学(Mathematical Morphology, MM)作为一种非线性图像处理方法, 在图像滤波^[1]、边缘提取^[2-4]、图像增强^[5]以及目标识别^[6]等领域均有应用和发展. MM最初用于二值图像和灰度图像的滤波^[7], 随着彩色图像处理需求的增加, 很多学者开始尝试将形态学扩

展到彩色图像. 由于彩色像素是矢量数据, 因此标量序在彩色图像下不再适用. 为解决MM处理彩色图像困难的问题, 学者们提出了多种矢量排序策略. 边缘排序(Marginal ordering, M-ordering)在每个颜色分量上对像素进行排序, 并将排序后的分量进行重新组合, 但这种算法会产生原图中不存在的“假色”^[8]. 除此之外, 条件

序(Conditional Ordering, C-ordering)作为一种可以对底层像素数据进行完全排序的有效算法,逐渐受到重视.该序基于颜色通道的优先级实现像素排序,其排序结果受通道优先级的影响,优先级越高的颜色通道对排序结果的影响越大.而如何确定合适的优先级,是该算法需要改进的地方.为此,Aptoula 等人^[9,10]提出通过模糊数学理论使各通道具有同等重要的作用,从而获得更好的效果.与此同时,学者们逐渐意识到颜色分量相关性对处理结果的影响.Comer 等人^[11]提出约简序(Reduced Ordering, R-ordering),该序通过使用秩函数将颜色分量投影到标量空间,基于给定的参考像素,利用像素与参考像素之间的一维距离(例如欧几里得距离)作为排序的标准,从而实现像素排序.虽然取得了更好的效果,但该序严重依赖于给定的参考像素,会在不同的参考像素下得到不同的排序结果^[12].为此,学者们提出将 R-ordering 和 C-ordering 结合^[13,14],从而避免定义参考像素,同时还打破了空间的局限性将形态学运算扩展到任意颜色空间.近年来,随着形态学偏序理论的发展和提升,学者们甚至结合多种模型来定义效果更好的形态学算子.例如,李亚宁等人^[15]提出在图空间上定义彩色矢量形态学算子,而 Burgeth 等人^[16]和 Welk 等人^[17]则通过将像素分解为 2x2 的对称矩阵来定义新的矢量算子.同时, Bouchet 等人^[18]基于像素间的模糊偏好关系实现像素矢量排序,提出处理效果较好的模糊形态学算子.不难发现,已有算法均忽略了图像像素的局部相关性,导致图像经形态运算后容易产生噪声污染和边缘失真.

像素局部相关性作为衡量图像质量的重要指标^[19,20],是影响图像质量的重要因素.而已有算子却忽略了其在形态处理过程中的重要性,导致运算后图像的质量下降.本文提出了一种基于矩阵 Frobenius 范数的偏序关系并在此基础上定义了新的形态学算子.该算子在保证颜色分量相关性的同时,利用矩阵运算保证了像素的局部相关性.实验结果表明,该算子在抑制噪声和边缘保持方面均优于现有的算法.同时,该算子对结构元素尺寸的包容性强,在获得更好处理效果的同时拓宽了形态算子的应用范围.

2 矩阵偏序关系和形态学算子的定义

矩阵运算作为数值分析领域的重要理论成果,可以描述元素间的关联特性.在 R-ordering 中,通常利用欧氏距离 $|X| = \sqrt{r^2 + g^2 + b^2}$ 来衡量颜色分量间的相关性^[11-14].本文将矢量域推广到矩阵域, Frobenius 范数则是最简单、高效的选择,可以用来衡量矩阵到原点的距离,同时保证元素间的关联特性^[21-23].

2.1 基于矩阵范数的矩阵偏序关系

由于图像在计算机中以离散矩阵的形式进行存

储,因此利用矩阵运算对图像进行处理有极大的运算便利,无需特殊的预处理操作.由于灰度图像的像素值是一个 $[0, 255]$ 之间的实数,因此无需考虑颜色分量相关性^[24],灰度值作为像素矩阵中的元素即可.而彩色图像的像素值作为矢量数据,不但需要考虑颜色分量相关性,而且需要满足像素局部相关性.因此,像素矩阵中的元素为像素的欧氏距离则更加合理.

定义 1 设像素矩阵中以像素 x 的灰度值(或欧氏距离)为中心的 n 维矩阵 A_x 是像素 x 对应的像素方阵(若像素方阵 A_x 超出像素矩阵的边界,则不足部分用 0 补足). a_{ij} 为像素方阵 A_x 中的元素,则像素方阵 A_x 的 Frobenius 范数定义为

$$\|A_x\|_F = \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \quad (1)$$

其中, n 为像素方阵的尺寸,在数值上等于结构元素的尺寸.

定义 2 设矩阵 A 和 B 分别是像素 x 和 y 对应的像素方阵,则基于矩阵范数的矩阵偏序关系定义为

$$\Gamma(A, B) = A < B \triangleq \begin{cases} \|A\|_F < \|B\|_F \\ \text{or} \\ \|A\|_F = \|B\|_F \text{ and } a_{ij} \leq b_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\Gamma(A, B)$ 表示矩阵 A 和 B 的矩阵偏序关系.根据定义 2 可知,首先比较像素的局部相关性,然后再比较其分量相关性.当像素方阵的范数不同时,直接得出矩阵偏序关系,进而得到像素间的顺序关系.当像素方阵的范数相同时,则依据像素方阵中元素 a_{ij} 和 b_{ij} 的大小关系以确定像素间的顺序关系.本文规定分量相关性的比较顺序和元素与中心元素的距离保持一致,即从距离近的元素开始比较.当距离相同时,从中心元素正上方开始顺时针依次进行比较.为了更好地说明该矩阵偏序关系,本文给出以像素方阵 $A_{n \times n}$ 和 $B_{n \times n}$ 为例的 $\Gamma(A, B)$ 算法伪代码(n 为奇数且 $n \geq 3$),如算法 1 所示:其中 $A_{n \times n}$ 和 $B_{n \times n}$ 分别表示任意像素 x 和 y 对应的像素方阵,即

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

式(2)给出了矩阵偏序关系的基本定义,但能否作为定义形态算子的偏序还需要满足自反性、反对称性和传递性^[12],接下来给出矩阵偏序关系下三个性质的关系式和证明.

性质 1 设矩阵 A 为像素 x 对应的像素方阵,自反性是指像素方阵 A 满足

$$\Gamma(A, A) = A < A \quad (3)$$

算法 1 矩阵偏序关系

输入: A_{nn} AND B_{nn}

输出: $\Gamma(A, B)$

1. IF $\|A\|_F > \|B\|_F$ OR $\|A\|_F < \|B\|_F$ THEN Step 12
2. IF $\|A\|_F = \|B\|_F$ THEN Step 3
3. FOR EACH a_{ij} OF A AND b_{ij} OF B DO
4. $dis = 0, i = \frac{n+1}{2}, j = \frac{n+1}{2}$
5. WHILE $dis \leq \frac{\sqrt{2}(n-1)}{2}$ DO
6. IF $a_{ij} > b_{ij}$ OR $a_{ij} < b_{ij}$ THEN Step 12
7. IF $a_{ij} = b_{ij}$ THEN Step 8,9,5
8. IF $dis \% \sqrt{2} = 0$ THEN $dis = \frac{dis}{\sqrt{2}} + 1$
9. IF $dis \% \sqrt{2} \neq 0$ THEN $dis = dis \times \sqrt{2}$
10. END
11. END
12. RETURN $\Gamma(A, B)$

证明

$$\begin{aligned} & A = A \\ \Leftrightarrow & \|A\|_F = \|A\|_F \text{ and } a_{ij} = a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \\ \Leftrightarrow & A \prec A \\ \Leftrightarrow & \Gamma(A, A) \end{aligned}$$

证毕

性质 2 设矩阵 A 和 B 分别为像素 x 和 y 对应的像素方阵, 反对称性是指像素方阵 A 和 B 满足

$$\begin{cases} \Gamma(A, B) \\ \Gamma(B, A) \end{cases} \Rightarrow A = B \quad (4)$$

证明

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \Gamma(A, B) \\ \Gamma(B, A) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \Gamma(A, B) = \begin{cases} \|A\|_F < \|B\|_F \\ \text{or} \\ \|A\|_F = \|B\|_F \text{ and } a_{ij} \leq b_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \\ \Gamma(B, A) = \begin{cases} \|B\|_F < \|A\|_F \\ \text{or} \\ \|B\|_F = \|A\|_F \text{ and } b_{ij} \leq a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \|A\|_F = \|B\|_F \text{ and } a_{ij} \leq b_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \\ \|B\|_F = \|A\|_F \text{ and } b_{ij} \leq a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \\ \Rightarrow & \|A\|_F = \|B\|_F \text{ and } a_{ij} = b_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \\ \Rightarrow & A = B \end{aligned}$$

证毕

性质 3 设矩阵 A, B, C 分别为像素 x, y, z 对应的像素方阵, 传递性是指像素方阵 A, B, C 满足

$$\begin{cases} \Gamma(A, B) \\ \Gamma(B, C) \end{cases} \Rightarrow \Gamma(A, C) \quad (5)$$

证明

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \Gamma(A, B) \\ \Gamma(B, C) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \Gamma(A, B) = \begin{cases} \|A\|_F < \|B\|_F \\ \text{or} \\ \|A\|_F = \|B\|_F \text{ and } a_{ij} \leq b_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \\ \Gamma(B, C) = \begin{cases} \|B\|_F < \|C\|_F \\ \text{or} \\ \|B\|_F = \|C\|_F \text{ and } b_{ij} \leq c_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \|A\|_F < \|B\|_F < \|C\|_F \\ \text{or} \\ \|A\|_F = \|B\|_F = \|C\|_F \text{ and } a_{ij} \leq b_{ij} \leq c_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \|A\|_F < \|C\|_F \\ \text{or} \\ \|A\|_F = \|C\|_F \text{ and } a_{ij} \leq c_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \\ \Rightarrow & \Gamma(A, C) \end{aligned}$$

证毕

性质 4 设矩阵 A 和 B 分别为像素 x 和 y 对应的像素方阵, 如果 $\Gamma(A, B)$, 则 $\Gamma(\lambda A, \lambda B), \forall \lambda \in R^+$.

证明

根据矩阵范数的齐次性, 有

$$\begin{cases} \|\lambda A\|_F = |\lambda| \cdot \|A\|_F \\ \|\lambda B\|_F = |\lambda| \cdot \|B\|_F \end{cases}, \forall \lambda \in R$$

$$\begin{aligned} & \Gamma(A, B) = \begin{cases} \|A\|_F < \|B\|_F \\ \text{or} \\ \|A\|_F = \|B\|_F \text{ and } a_{ij} \leq b_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} |\lambda| \cdot \|A\|_F < |\lambda| \cdot \|B\|_F \\ \text{or} \\ |\lambda| \cdot \|A\|_F = |\lambda| \cdot \|B\|_F \text{ and } \lambda \cdot a_{ij} \leq \lambda \cdot b_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}, \forall \lambda \in R^+ \\ \Rightarrow & \begin{cases} \|\lambda A\|_F < \|\lambda B\|_F \\ \text{or} \\ \|\lambda A\|_F = \|\lambda B\|_F \text{ and } \lambda \cdot a_{ij} \leq \lambda \cdot b_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}, \forall \lambda \in R^+ \\ \Rightarrow & \Gamma(\lambda A, \lambda B), \forall \lambda \in R^+ \end{aligned}$$

证毕

2.2 形态学算子的定义

经过证明, 本文提出的序关系满足偏序理论的三个基本要求. 因此基于这种偏序关系, 本文给出形态学算子的基本定义.

设 E_i 为图像 I 中任意像素 i 处的结构元素^[25,26], 是由特定像素组成的形态提取目标对象. 结构元素 E_i 的

形状和大小并不唯一,一般分为固定结构元素和可变结构元素两种. X 为图像 I 的像素矩阵, p 和 q 为结构元素 E_i 中的任意像素, A_p 和 A_q 分别是像素 p 和 q 对应的像素方阵, 则基于矩阵偏序关系 Γ 的形态学膨胀、腐蚀算子的定义如下.

定义3 膨胀算子:

$$\mathfrak{M}(I, E, \Gamma) = \vee \left\{ \Gamma(A_p, A_q) : A_p, A_q \in X, \forall p, q \in E_i, i \in I \right\} \quad (6)$$

定义4 腐蚀算子:

$$\mathfrak{A}(I, E, \Gamma) = \wedge \left\{ \Gamma(A_p, A_q) : A_p, A_q \in X, \forall p, q \in E_i, i \in I \right\} \quad (7)$$

其中, \wedge 表示提取结构元素 E_i 中 Γ 关系下的最小像素矢量, 而 \vee 表示提取结构元素 E_i 中 Γ 关系下的最大像素矢量.

由于矩阵偏序关系满足偏序的基本性质, 则基于该偏序的膨胀、腐蚀算子也一定满足增长性. 因此基于膨胀、腐蚀算子, 本文给出膨胀梯度、腐蚀梯度、开、闭等算子的定义.

定义5 膨胀梯度:

$$H(I, E, \Gamma) = \mathfrak{M}(I, E, \Gamma) - I \quad (8)$$

定义6 腐蚀梯度:

$$P(I, E, \Gamma) = I - \mathfrak{A}(I, E, \Gamma) \quad (9)$$

定义7 开运算:

$$\Omega(I, E, \Gamma) = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}(I, E, \Gamma), E, \Gamma) \quad (10)$$

定义8 闭运算:

$$\mathfrak{C}(I, E, \Gamma) = \mathfrak{A}(\mathfrak{M}(I, E, \Gamma), E, \Gamma) \quad (11)$$

3 实验验证

本文所有的实验均在硬件环境为 Windows 10 64 位操作系统、CPU 3.00 GHz、内存 8 GB, 软件环境为 Eclipse 4.5.2, JDK 1.8, Matlab R2018b 的计算机上进行.

3.1 彩色像素排序对比

为了更加直观体现出本算子在保留拓扑信息方面的优势和有效性, 本文选取经典图像的局部对其像素进行排序, 如图 1 所示.

图 1(a) 为待处理的经典图像, 为了能直观看到排序算法的排序效果, 本文对图中黑色框里的像素进行排序, 待处理区域的局部放大如图 1(b) 所示.

为了不失一般性和有效性, 本文选择使用广泛的 R-ordering^[12] 和处理效果好的模糊序算法^[18] 与本文提出的算法进行对比. 图 1 中 (c), (d), (e) 图分别为图 (b) 在 R-ordering、模糊序、本偏序下的排序结果.

通过对比发现, 三种排序结果都遵循红色系排在



图 1 经典图像局部像素排序结果对比

左边, 绿色系排在右边的基本规律. 但是, 在 R-ordering 和模糊序的结果图中均出现了不太理想的像素顺序, 比如左边区域中排列着几个明显的绿色像素, 而原本应该排在中间位置的过渡像素却被排在了右边的区域.

反观由本偏序关系给出的排序结果图, 像素从左向右的排列顺序与图 1(b) 中像素在原始图像中的排列基本保持一致且过渡平缓, 不会出现类似图 1(c) 和图 1(d) 中那种明显的像素跳变, 而这种像素跳变往往是形态处理中引入噪声、导致失真的重要原因.

通过对比排序结果, 证明了本序算法在彩色像素排序中的有效性以及抑制噪声、保留边缘信息等一系列优良特性.

3.2 灰度图像形态处理

灰度图像由于只有一个像素分量, 所以其拓扑结构是表达信息的重要途径. 虽然经典的灰度形态处理已经趋于成熟且被成功应用于故障检测^[27]、医学图像分析^[28] 等多个领域, 但由于边缘失真、灰度图像过时等原因, 其后续研究较少. 为了更进一步说明本算子在边缘保护方面的优越性, 下面给出灰度图像在经典标量

形态算子^[7]、Loewner序灰度形态算子^[16]及本算子下的形态处理结果,如图2所示.

图2(a)为原始灰度图像,图2(b)~(g)为其在5×5固定结构元素下形态膨胀、腐蚀的结果.对比图2(a),(b),(d),(f)不难发现,由经典灰度形态算子和Loewner序形态算子处理后,图像在数字和红色框中的区域均发生严重失真,并且未失真区域的信号强度也明显减弱.而本文算子却保留了原图中这些重要的结构边缘,可以很容易辨认出处理后图中的数字和红色框里的内容.

同理对比图2(a),(c),(e),(g)发现,图像由经典灰度形态算子和Loewner序形态算子处理后红色框中的图案因发生重叠而模糊不清.

综上所述,本算子不但可以处理灰度图像,并且在保留图像拓扑结构方面较其他已有算子有显著提升.

3.3 彩色图像形态处理

形态学运算往往是边缘提取、图像增强、目标识别等处理的预操作,因此其处理效果的好坏将直接影响后续处理、分析的有效性.本文所提出的形态学算子可以解决现有算子因忽略像素局部相关性而引入噪声、拓扑失真等一系列问题,提高处理形态算子、基于本偏序的形态算子下的膨胀、膨胀梯度结果后图像的质量.在3.1节中,本文已初步证明了本算法对图像局部处理效果的可行性和有效性.为了进一步证明本算子的优势,图3和图4给出了基于R-ordering的形态算子、基于模糊序的形态算子以及基于本偏序的形态算子对街道图像、帽子图像进行膨胀、腐蚀运算后的结果.

图3为街道图像(a)在5×5固定结构元素下三种形态算子膨胀、膨胀梯度的结果.对比图3(b),(d),(f)不难发现,基于R-ordering的形态膨胀使中间大楼的窗户发生明显模糊,而基于模糊序的形态膨胀和基于本算法的形态膨胀则得以使信息很好的保留.

为了使对比效果更明显图3(c),(e),(g)给出三种算法的膨胀梯度结果,容易发现街道图像经基于R-ordering的形态算子膨胀后,拓扑结构严重失真且引入了大量噪声.而基于模糊序的形态算子,虽然对图像的结构信息有所保留,但仍然引入了噪声.反观由本形态算子处理后的图像,图像的结构不但保存完整而且基本没有噪声干扰,就连图像右下角原本对比度低的汽车的轮廓和结构都非常清楚.

图4为帽子图像(a)在5×5固定结构元素下三种形态算子腐蚀、腐蚀梯度的结果.对比图4(b),(d),(f),基于R-ordering的形态腐蚀使原图的亮度变暗且帽子上的字母变得模糊难以辨认,基于模糊序的形态腐蚀次之,而基于本算法的形态腐蚀与原图基本保持一致.虽然基于模糊序的形态腐蚀可以较好地保留细节,但

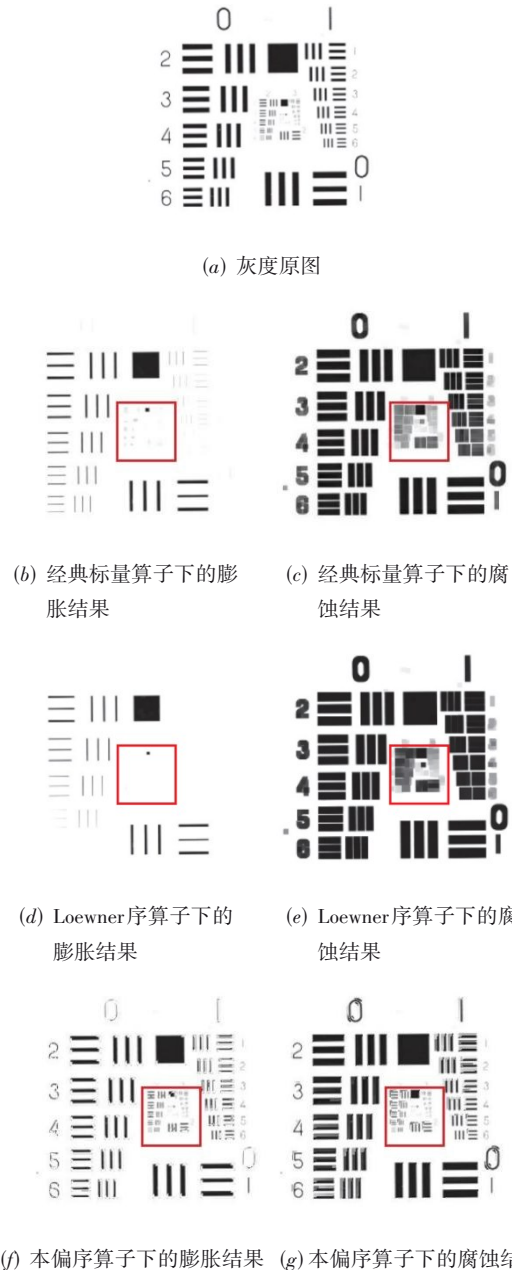


图2 灰度图像在经典形态算子、Loewner序形态算子、本偏序形态算子下的膨胀、腐蚀结果

从图4(e)中不难发现产生了大量噪声,这势必对图像后续处理不利.反观图4(g)发现,帽子轮廓清楚且没有噪声污染,是三种形态算子中处理效果最理想的.

综上所述,通过主观对比发现,本文提出的形态学算子在处理彩色图像时,不但可以保留图像原本的边缘信息,而且可以抑制噪声的产生.

4 形态算子在不同结构元素大小下的性能

通常,学者们利用数学形态学进行图像滤波时往往需要考虑合适的结构元素大小.滤波窗口过小不能

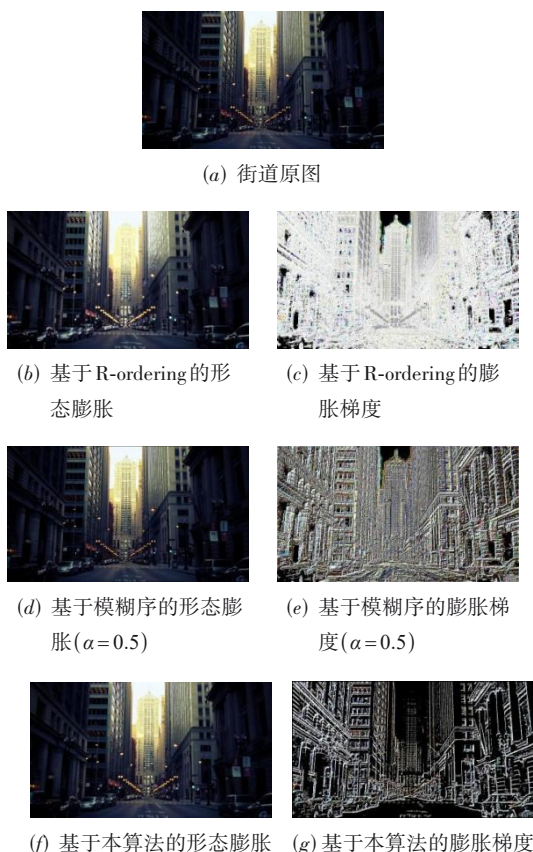


图3 街道图像在基于R-ordering的形态算子、基于模糊序的形态算子、基于本偏序的形态算子下的膨胀、膨胀梯度结果

滤除大型目标,而滤波窗口过大则容易导致图像过于平滑,失去结构边缘^[29,30].为了解决这一问题,学者们采用多个尺寸的窗口对图像进行多次形态运算^[31,32],但这样做势必会导致噪声叠加、边缘失损等问题.

为了验证本算子在不同尺寸结构元素下保留图像拓扑结构的性能,本文利用特征相似性指数(Feature SIMilarity, FSIM)^[33]来衡量不同形态算子的性能.

FSIM是一种基于相位一致性(Phase Congruency, PC)和梯度幅度(Gradient Magnitude, GM)的图像质量评价指标.其中,PC作为一种图像局部结构重要性的无量纲度量,包含了丰富的纹理、边缘和结构信息,是FSIM的主要特征;而GM在表征图像局部质量方面与PC起互补作用,因此作为FSIM的次要特征.考虑到色度对彩色图像的重要性,Zhang等人将色度信息合并到FSIM中,提出更适合衡量彩色图像质量的指标并命名为FSIMc.作为一种无量纲度量,FSIMc的取值范围为 $[0, 1]$,其值越大则代表图像的质量越高,经处理后图像的结构信息保存越完整.在6个标准数据库上进行的大量实验表明,FSIMc评价结果更接近人的主观判断,其准确率优于已有的质量评价算法.

图5展示了60幅彩色图像在基于R-ordering的算

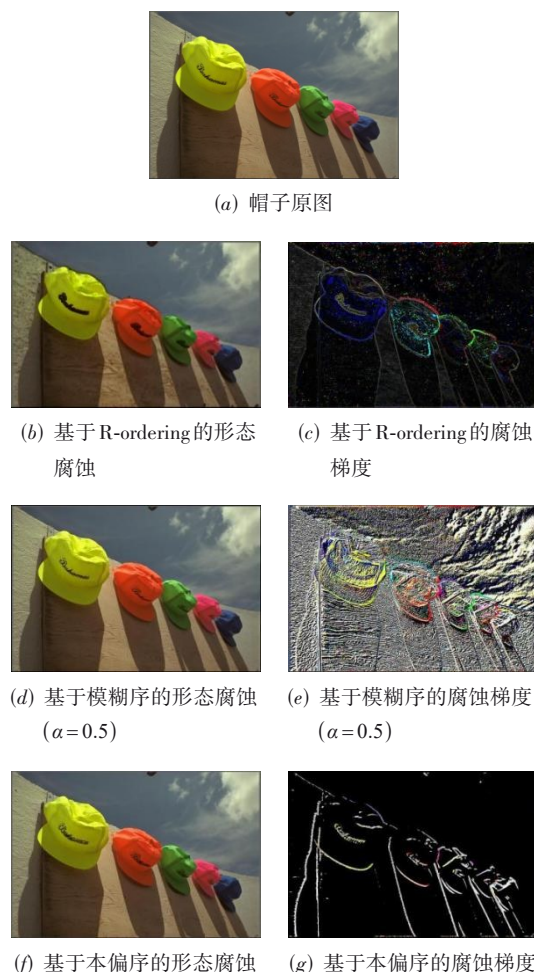


图4 帽子图像在基于R-ordering的形态算子、基于模糊序的形态算子、基于本偏序的形态算子下的腐蚀、腐蚀梯度结果

子、基于模糊序的算子以及基于本偏序的算子经形态运算后FSIMc值随结构元素尺寸的平均变化趋势.

对比图5中(a),(b)发现,随着结构元素尺寸的变化,经三种算子处理后图像的FSIMc值都有所下降.但对比三条曲线可以得到如下结论:

(1) 当结构元素尺寸相同时,本算子处理后图像的平均FSIMc值最高,基于模糊序的形态学算子次之,基于R-ordering的形态学算子最低.这说明,本算子在相同结构元素尺寸下可以保留图像更多的拓扑信息.

(2) 随着结构元素尺寸的增加,代表本算子的曲线的下降斜率最小,基于模糊序的形态算子次之,基于R-ordering的形态算子最高.这表明,本算子对结构元素尺寸的包容性最强.即使在尺寸很大的结构元素下,经本算子处理后图像的结构信息也不会发生明显失真.

从图5(a),(b)中本形态算子膨胀、腐蚀曲线的下降斜率来看,膨胀运算的下降斜率略小于腐蚀运算,而基于R-ordering的形态算子的两种曲线斜率基本一致.又因为开运算是图像先腐蚀后膨胀的结果,所以受膨

胀运算的影响,图 5(c), (d)中黑色和蓝色两条曲线的交点出现在不同尺寸下. 因此图 5(c), (d)中当结构元素尺寸较小时,基于 R-ordering 的形态算子经开、闭运算处理后图像的平均 FSIMc 值略高于本算子. 但随着结构元素尺寸的增加,由于本偏序算子对结构元素尺寸的包容性强,图像的平均 FSIMc 又高于另外两种算子,且尺寸越大效果越明显.

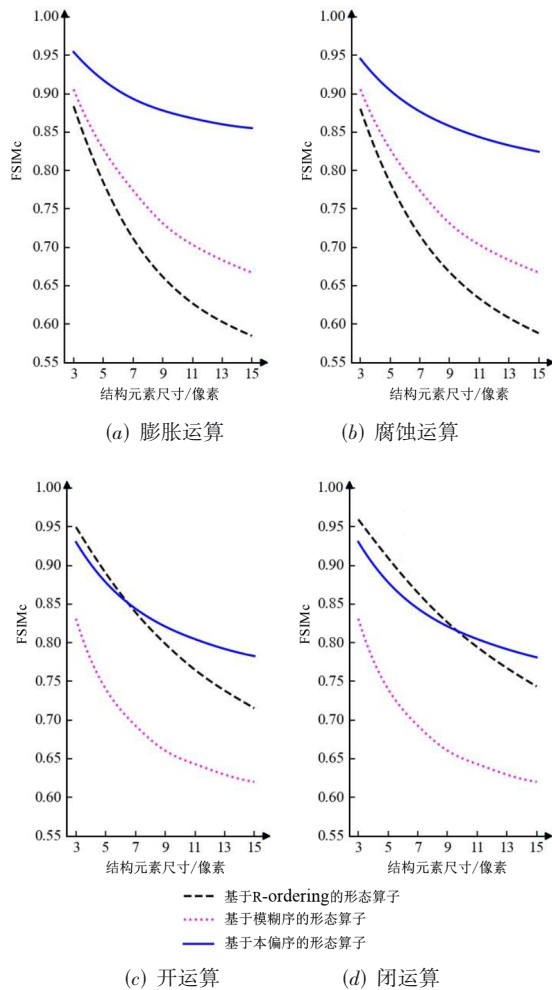


图5 三种形态算子在膨胀运算、腐蚀运算、开运算、闭运算下 FSIMc 值随结构元素尺寸的平均变化

通过客观的研究和分析发现,本算子可以最大程度保留图像的拓扑结构,即使在结构元素尺寸很大时也不会发生严重的结构失真. 根据这一特性,学者们在形态滤波时就可以不受窗口尺寸的约束,得到更理想的处理效果.

5 结论

为了解决已有形态偏序忽略像素局部相关性这一缺陷,本文首次提出了基于矩阵范数的偏序关系,并基

于该关系定义了新的形态学算子. 通过主观对比发现,本文所提出的形态学算子不但可以抑制噪声,而且可以保留图像的拓扑信息,防止图像边缘失真. 同时,通过对多幅图像实验发现,本算子对结构元素尺寸的包容性强. 当处理结构元素尺寸要求较大的图像时,经过本算子处理后图像的结构信息也不会发生明显失真,可以拓宽形态学理论的应用范围. 此外,该形态算子在图像边缘检测、提取等方面的应用将是后续研究的内容.

参考文献

- [1] GUO Y Y. Adaptive weighted morphological filters[C]// Proceedings of the 2020 12th International Conference on Machine Learning and Computing. Shenzhen: ACM, 2020: 439-442.
- [2] 王弘毅, 赵欢. 基于数学形态学预处理的 Canny 算子边缘检测算法[J]. 菏泽学院学报, 2019, 41(2): 25-29. WANG H Y, ZHAO H. Canny operator edge detection algorithm based on mathematical morphology pretreatment [J]. Journal of Heze University, 2019, 41(2): 25-29. (in Chinese)
- [3] WANG C, DENG C X, YUE X H, et al. Detection algorithm based on wavelet threshold denoising and mathematical morphology[J]. International Journal of Performability Engineering, 2020, 16(3): 470-481.
- [4] REN H E, XU X Y, ZHU M, et al. A new kind of image edge detection based on the theory of the adaptive lifting wavelet and morphology[J]. Journal of Information Technology Research, 2018, 11(3): 90-104.
- [5] SAZAK Ç, NELSON C J, OBARA B. The multiscale bowler-hat transform for blood vessel enhancement in retinal images[J]. Pattern Recognition, 2019, 88: 739-750.
- [6] GE Y, JIANG X M. Mathematical morphology and deep learning-based approach for bearing fault recognition[J]. International Journal of Performability Engineering, 2018, 14(5): 995-1003.
- [7] BOATO G, DANG-NGUYEN D T, DE NATALE F G B. Morphological filter detector for image forensics applications[J]. IEEE Access, 2020, 8(1): 13549-13560.
- [8] WITTE V D, SCHULTE S, NACHTEGEAL M, et al. Vector morphological operators for colour images[C]//International Conference Image Analysis and Recognition (ICIAR 2005). Toronto: Springer, 2005: 667-675.
- [9] APTOULA E, LEFÈVRE S. On lexicographical ordering in multivariate mathematical morphology[J]. Pattern Recognition Letters, 2008, 29(2): 109-118.
- [10] APTOULA E, LEFÈVRE S. α -trimmed lexicographical

- extrema for pseudo-morphological image analysis[J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2008, 19(3): 165-174.
- [11] COMER M L, DELP E J. Morphological operations for color image processing[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 1999, 8(3): 279-289.
- [12] RIVEST J F. Morphological operators on complex signals [J]. *Signal Processing*, 2004, 84(1): 133-139.
- [13] ANGULO J. Morphological colour operators in totally ordered lattices based on distances: application to image filtering, enhancement and analysis[J]. *Computer Vision and Image Understanding*, 2007, 107(1-2): 56-73.
- [14] GONZALEZ P, CABEZAS V, MORA M, et al. Morphological color images processing using distance-based and lexicographic order operators[C]//2010 XXIX International Conference of the Chilean Computer Science Society. Antofagasta: IEEE, 2010: 258-264.
- [15] 李亚宁, 王俊平, 高艳红. 图空间上彩色矢量形态学算子[J]. *电子学报*, 2015, 43(3): 424-430.
LI Y N, WANG J P, GAO Y H. Color vector morphological operators on graph space[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(3): 424-430. (in Chinese)
- [16] BURGETH B, KLEEFELD A. An approach to color-morphology based on Einstein addition and Loewner order[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2014, 47: 29-39.
- [17] WELK M, KLEEFELD A, BREUß M. Quantile filtering of colour images via symmetric matrices[J]. *Mathematical Morphology-Theory and Applications*, 2016, 1: 136-174.
- [18] BOUCHET A, ALONSO P, PASTORE J I, et al. Fuzzy mathematical morphology for color images defined by fuzzy preference relations[J]. *Pattern Recognition*, 2016, 60: 720-733.
- [19] 路文, 李帅, 徐红强, 等. 一种利用像素局部相关性的图像质量评价方法[J]. *西安电子科技大学学报*, 2017, 44(1): 94-99.
LU W, LI S, XU H Q, et al. Local pixel correlation for image quality assessment[J]. *Journal of Xidian University*, 2017, 44(1): 94-99. (in Chinese)
- [20] TRÉMEAU A, COLANTONI P. Regions adjacency graph applied to color image segmentation[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, 9(4): 735-744.
- [21] YAO Y, DONG G H, XIAO X, et al. Frobenius-norm-based measures of quantum coherence and asymmetry[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 1-12.
- [22] JOHNSON S C, WICKS M, ŽEFŘAN M, et al. The structured distance to the nearest system without property P[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(9): 2960-2975.
- [23] YOU S H, AHN C K, ZHAO S Y, et al. Frobenius norm-based unbiased finite impulse response fusion filtering for wireless sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2022, 69(2): 1867-1876.
- [24] NACHTEGAEL M, SUSSNER P, MÉLANGE T, et al. On the role of complete lattices in mathematical morphology: From tool to uncertainty model[J]. *Information Sciences*, 2011, 181(10): 1971-1988.
- [25] WANG J P, LIANG G M, WU Y, et al. New colour morphological operators on hypergraph[J]. *IET Image Processing*, 2018, 12(5): 690-695.
- [26] ZHAO L L, WANG J P, LI Y B. Colour morphological operators based on formal concept analysis[J]. *Signal Image and Video Processing*, 2020, 14: 151-158.
- [27] ONISHI H, SASA Y, NAGAI K, et al. A pattern defect inspection method by parallel grayscale image comparison without precise image alignment[C]//IEEE 2002 28th Annual Conference of the Industrial Electronics Society. Seville: IEEE, 2002: 2208-2213.
- [28] NAWA K, SURYANI E, PRASETYO H. Dengue virus infected leukocyte classification on microscopic images with image histogram based support vector machine[C]//2019 5th International Conference on Science and Technology(ICST). Yogyakarta: IEEE, 2019: 1-5.
- [29] 惠振阳, 胡友健. 基于LiDAR数字高程模型构建的数学形态学滤波取证技术[J]. *激光与光电子学进展*, 2016, 53(8): 7-13.
HUI Z Y, HU Y J. Review on morphological filtering algorithms based on LiDAR digital elevation model construction[J]. *Laser & Optoelectronics Progress*, 2016, 53(8): 7-13. (in Chinese)
- [30] 周琳娜, 王东明, 郭云彪, 等. 基于数字图像边缘特性的形态学滤波取证技术[J]. *电子学报*, 2008, 36(6): 1047-1051.
ZHOU L N, WANG D M, GUO Y B, et al. Exposing digital forgeries by detecting image blurred mathematical morphology edge[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2008, 36(6): 1047-1051. (in Chinese)
- [31] KILIAN J, HAALA N, ENGLICH M. Capture and evaluation of airborne laser scanner data[J]. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, 1996, 31(B3): 383-388.
- [32] ZHANG K Q, CHEN S C, WHITMAN D, et al. A pro-

gressive morphological filter for removing nonground measurements from airborne LIDAR data[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2003, 41(4): 872-882.

- [33] ZHANG L, ZHANG L, MOU X Q, et al. FSIM: A feature similarity index for image quality assessment[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(8): 2378-2386.

作者简介



王 娜 女,1995年10月出生于宁夏回族自治区吴忠市.现为西安电子科技大学硕士研究生.主要研究方向为图像/视频处理及应用.
E-mail: nawang_xidian@163.com



王俊平 女,1964年出生于陕西省渭南市.现为西安电子科技大学教授.主要研究方向为多媒体通信、图像/视频处理及应用、DFM及SOC等.
E-mail: jpwang@mail.xidian.edu.cn



朱俊辉 男,1998年9月出生于河南省周口市.现为西安电子科技大学硕士研究生.主要研究方向为图像与视频处理.
E-mail: zjh1443@stu.xidian.edu.cn