一元子结构谓词逻辑中相似的代数语义

王军涛[1],王 梅[2],折延宏[1]
(1. 西安石油大学理学院,陕西西安 710065;2. 陕西科技大学电气与控制工程学院,陕西西安 710021)

摘 要: 借助一元模糊谓词逻辑与S5型模糊模态逻辑的等价性,建立了一元子结构谓词逻辑中相似联结词的代数语义,引入了相似一元剩余格,并研究了其基本的代数性质. 其次,研究了相似一元剩余格上的相似滤子,刻画了可表示的相似一元剩余格. 最后,引入了相似一元剩余格对应的逻辑系统,证明了其完备性定理,并解决了其最小半线性扩张问题.

关键词: 一元子结构谓词逻辑;相似一元剩余格;相似滤子;完备性;半线性扩张

基金项目: 国家自然科学基金(No.12001423,No.61976244,No.12171294);陕西省自然科学基础研究计划(No.2020JQ-762,No.2021JQ-580);陕西省教育厅自然科学研究专项计划(No.20JK0626)

中图分类号: O155 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2023)04-0956-09

电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.12263/DZXB.20210267

Algebraic Semantics of Similarity in Monadic Substructural Predicate Logics

WANG Jun-tao[1], WANG Mei[2], SHE Yan-hong[1]
(1. *School of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an, Shaanxi* 710065, *China*;
2. *School of Electrical and Control Engineering, University of Science and Technology, Xi'an, Shaanxi* 710021, *China*)

Abstract: Using the equivalence between monadic fuzzy predicate logics and S5 type fuzzy modal logic, the algebraic semantics of similarity in monadic substructural predicate logics are introduced, the resulting class of algebras called similarity monadic residuated lattices, and their basic algebraic properties are studied. Secondly, the similarity filters of similarity monadic residuated lattices are introduced, and representable similarity monadic residuated lattices are characterized by using them. Finally, the logic system corresponding to similarity monadic residuated lattices is established, and its minimum semilinear extension and completeness are studied.

Key words: monadic substructural predicate logic; similarity monadic residuated lattice; similarity filter; completeness; semilinear extension

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.12001423, No.61976244, No.12171294); Natural Science Foundation of Shaanxi Province (No.2020JQ-762, No.2021JQ-580); Natural Science Foundation of Education Committee of Shannxi Province (No.20JK0626)

1 引言

在经典逻辑推理中,已知前提所使用的概念和提供的信息都是精确的,就能保证推得的结果也是准确无误的,这种精确的、严格的逻辑推理是人工智能科学及相关研究中普遍采用的方法,并在逻辑程序设计、定理自动证明以及知识推理等领域具有广泛应用,它不仅为计算机程序设计语言提供主要思想,而且在计算机硬件设计中也有一定应用,形成了传统计算机的理论基础. 然而传统计算机通常只能按照经典逻辑进行识别,对模糊概念却无能为力.

为了克服上述不足,1965年,美国控制论专家Zadeh[1]提出了模糊集的概念,从而使计算机不仅可以对模糊概念进行处理,还可以在信息有限的情况下,提供精确的答案. 随着模糊集理论研究的不断深入,近年来模糊逻辑也取得了一定的进展. 模糊逻辑主要采用代数逻辑的研究方法,而后者则以逻辑代数为工具来进行研究. 由此可知,逻辑代数在模糊逻辑的研究中起

收稿日期:2021-02-22;修回日期:2021-12-06;责任编辑:王天慧

着十分重要的作用[2,3]. 在模糊逻辑对应的代数系统研究中,国内外学者对于剩余格[4]尤为关注,主要原因有以下两点:剩余格是一类范围较广的逻辑代数,常见的逻辑代数,如MV-代数,BL-代数,MTL-代数等都是特殊的剩余格;剩余格也是子结构逻辑最具代表性的代数语义. 由此可见,在为数众多的逻辑代数中,剩余格是一类比较重要的,也是应用相当广泛的代数系统. 近年来,基于剩余格的逻辑代数在模糊逻辑的研究中发挥着重要作用,取得了一系列重要的研究成果[5~12].

为了推广模糊系统中的模糊等价关系,1971年Zadeh[13]利用模糊序关系引入了模糊系统中的相似关系,并在模糊控制,模糊推理以及近似推理等方面取得了广泛的应用[14~16]. 近年来,国内外学者将相似关系推广到一些具体的模糊逻辑系统中,并取得了一系列有意义的研究成果,如:1998年,Hjek[17]研究了基本模糊逻辑中的相似关系;2000年,Blohlvek[18]研究了模糊概念格中的相似关系,并将所得结论应用于近似推理的研究;2002年,Georgescu等[19]研究了模糊概念格及非可换模糊逻辑中的相似关系;2003年,Turunen[20]研究了多值逻辑系统中的相似关系. 尽管相似关系在模糊逻辑及模糊推理中有着广泛的应用,但是不能从逻辑和代数两方面共同去研究对应的理论,这是因为相似关系S取的总是单位区间[0,1]中的值,导致模糊逻辑代数与其上的相似关系S不再是一个代数簇,也就不能从泛代数角度去研究相关问题,从而导致逻辑代数带上相似关系S不再构成可代数化意义下的逻辑代数. 为了从逻辑和代数两个角度提供处理相似关系的方法,Gerla等[21]将Łukasiewicz三角模上相似关系的定义域和值域统一为MV-代数 L,进而引入了MV-代数L上的相似算子S: $L\times L\to L$,它不仅保持了相似关系的一些基本性质,还使得利用代数逻辑的方法研究相似关系成为可能,建立了相似MV-代数(L,S),并刻画了可表示的相似MV-代数,建立了相似MV-代数对应的逻辑系统,并证明了其完备性. 随后,Almiñana等[22]研究了相似DH-代数,刻画了可表示的相似DH-代数;2019年,Borumand Saeid等[23]引入了相似MTL-代数,刻画了可表示的相似MTL-代数,证明了其对应逻辑系统的完备性;2021年,本文作者[24]研究了子结构逻辑中相似联结词的代数解释,引入了相似剩余格,并证明了对应逻辑系统的完备性定理.

近年来,随着模糊逻辑的快速发展,模糊谓词逻辑的研究也取得了一定的进展,得到了一些重要的结论. 尽管模糊谓词逻辑的相关问题得到了广泛的探讨,但仍然存在有待发掘的丰富内容,模糊谓词逻辑片段的研究便是其中之一. 一元模糊谓词逻辑是指只包含一元谓词和一个对象变量的模糊谓词逻辑,它是模糊谓词逻辑的一元片段[25]. 随着一元模糊谓词逻辑研究的不断深入,其对应的代数语义— 一元逻辑代数也被逐渐关注,如:Rutledge[26]引入了一元多值谓词逻辑对应的代数语义一元MV-代数$(L,\exists)$,它是由MV-代数L与其上的一个一元运算∃构成,研究表明该一元算子正是S5(MV)中必然模态词的真值函数;Wang等[27]研究了一元hoop-代数,为基于一元连续三角模谓词逻辑提供了统一的代数框架;Liu[28]研究了一元相等代数,证明了一元相等代数与一元BCK-代数是范畴等价;Castaño等[29]研究了一元BL-代数,并证明其是$\mathrm{mBL}_{\forall}$的等价代数语义;本文作者[30]引入并研究了一元NM-代数,在一元左连续三角模逻辑代数的公理系统方面进行了初步探索;Rachunek等[31]建立了一元剩余格的公理系统,讨论了其与相关一元逻辑代数之间的关系.

上述研究工作表明,目前相似逻辑代数的研究备受广大学者的关注,相应的研究成果也不断地涌现,这为模糊命题逻辑中相似联结词的研究提供了坚实的代数基础. 然而需要注意的是,当前相似逻辑代数的研究主要集中在命题逻辑的情况,而对模糊谓词逻辑的情况几乎没有涉及. 实际上,模糊谓词逻辑是较模糊命题逻辑更为深刻、表达能力更强的形式系统,研究其上的相似联结词,不仅能够得到较模糊命题逻辑更为深刻的理论,同时也能为研究其上的伪距离奠定基础. 本文研究了一元子结构谓词逻辑中相似联结词的代数语义——相似一元剩余格的相关理论,为处理一元子结构谓词逻辑中相似联结词提供统一的代数框架,实现一元子结构谓词逻辑中相似的代数语义和逻辑系统的和谐统一,这是本文主要的研究动机.

2　预备知识

首先回顾文献[4]中关于逻辑系统ML及其对应代数语义剩余格簇的一些基本知识.

定义1[4]　逻辑系统ML的公理集及推理规则集如下.

公理集:

(ML1) $(\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow\big((\psi\Rightarrow\chi)\Rightarrow(\varphi\Rightarrow\chi)\big)$,

(ML2) $\varphi\Rightarrow(\varphi\sqcup\psi)$,

(ML3) $\psi\Rightarrow(\varphi\sqcup\psi)$,

(ML4) $(\varphi\Rightarrow\chi)\Rightarrow\big((\psi\Rightarrow\chi)\Rightarrow((\phi\Rightarrow\psi)\Rightarrow\chi)\big)$,

(ML5) $(\varphi\sqcap\psi)\Rightarrow\varphi$,

(ML6) $(\psi\sqcap\psi)\Rightarrow\varphi$,

(ML7) $(\varphi\&\psi)\Rightarrow\varphi$,

(ML8) $(\varphi\&\psi)\Rightarrow(\psi\&\varphi)$,

(ML9) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \big((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \sqcup \chi))\big)$,

(ML10) $\big(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)\big) \Rightarrow \big((\varphi \& \psi) \Rightarrow \chi\big)$,

(ML11) $\big((\varphi \& \psi) \Rightarrow \chi\big) \Rightarrow \big(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)\big)$

(ML12) $\overline{0} \Rightarrow \varphi$.

推理规则(MP规则)：φ和$\varphi \Rightarrow \psi$蕴涵ψ.

注1 Noguera在文献[32]中指出逻辑系统ML属于蕴涵逻辑，从而是Blok和Pigozzi[33]意义下的可代数化逻辑，且其对应的代数语义是剩余格簇.

定义2[3] 剩余格是(2, 2, 2, 2, 0, 0)型代数$(L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$且满足如下条件：

(1) $(L, \wedge, \vee, 0, 1,)$是有界格，0和1分别为L的最小元和最大元；

(2) $(L, \odot, 1)$是可换幺半群；

(3) 对任意的$x, y, z \in L$, $x \odot y \leqslant z$ 当且仅当$x \leqslant y \rightarrow z$.

命题1[4] 设L是一个剩余格，对任意的$x, y, z \in L$，则以下结论成立：

(1) $x \leqslant y$ 当且仅当 $x \rightarrow y = 1$;

(2) $x \rightarrow x = 1$, $x \rightarrow 1 = 1$, $1 \rightarrow x = x$;

(3) $x \odot y \leqslant z$ 当且仅当 $x \leqslant y \rightarrow z$;

(4) $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$;

(5) $x \vee y \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$;

(6) $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$;

(7) $x \odot y \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$;

(8) $x \wedge y \leqslant ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$;

(9) $x \leqslant y \rightarrow x$.

滤子理论在逻辑代数次直积表示定理的研究中起着非常重要的作用，下面简单介绍剩余格滤子的相关概念.

定义3[12] 设L是一个剩余格，F是L的一个非空子集. 若对任意的$x, y \in L$,

(1) 当$x, y \in F$, 有$x \odot y \in F$;

(2) 当$x \in F$且$x \leqslant y$时，有$y \in F$.

则称F是L的滤子.

定义4[12] 设F是剩余格L的一个滤子，则F称为

(1) 真滤子若$F \neq L$;

(2) 素滤子若F满足对任意的$x, y \in F$，都有$x \rightarrow y \in F$或$y \rightarrow x \in F$;

(3) 极大滤子若L中不存在严格包含F真滤子；

(4) 极小素滤子若F是全体素滤子之集关于包含关系的最小元.

定义5[24] 称剩余格L是一簇剩余格$(L_i)_{i \in I}$的次直积，其应满足以下条件：

(1) $L \leqslant \prod_{i \in I} L_i$;

(2) 对于每个$j \in I, \pi_j(L) = L_j$，其中π_j: $\prod_{i \in I} L_i \rightarrow L_j$是投射映射.

若$\alpha(L)$是$(L_i)_{i \in I}$的次直积，则称嵌入映射α: $L \rightarrow \prod_{i \in I} L_i$是次直的.

定义6[24] 若剩余格L同构于一族线性序剩余格的次直积，则称L是一个可表示的剩余格.

命题2[34] 剩余格是可表示的当且仅当其是一个MTL-代数.

定理1[34] 设L是一个MTL-代数且F是L的滤子，则下列事实等价.

(1) F是一个极小素滤子；

(2) $F = \cup\{a^{\perp} | a \in F\}$, $a^{\perp} = \{x \in L | a \vee x = 1\}$.

下面回顾一元子结构谓词逻辑系统与一元剩余格的相关理论.

定义7[25] 子结构谓词逻辑系统ML$\forall$的公理集及推理规则如下：

公理集：

(ML) ML的公理集及由推理规则所得的公理；

($\forall$1) $(\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(t)$，其中$t$可替换$\varphi$中的$x$;

($\exists$1) $\varphi(t) \Rightarrow (\exists x)\varphi(x)$，其中$t$可替换$\varphi$中的$x$;

($\forall$2) $(\forall x)(\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow \forall(x)\varphi)$，其中$t$可替换$\chi$中的$x$;

($\exists$2) $(\forall x)(\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\exists x)\varphi \Rightarrow \chi)$，其中$t$可替换$\chi$中的$x$;

($\forall$3) $(\forall x)(\chi \sqcup \varphi) \Rightarrow (\chi \sqcup \forall(x)\varphi)$，其中$t$可替换$\chi$中的$x$.

推理规则($N_{\forall}$规则)：从φ推出$(\forall x)\varphi$.

称mML$\forall$为ML$\forall$的一元子结构谓词逻辑，即只包含一元谓词和一个对象变量的子结构谓词逻辑.

捷克著名逻辑学家Hάjek[35]已经证明了一元模糊谓词逻辑$mBL_{\forall}$与模糊模态逻辑S5(BL)等价，基于此，Castaño[29]引入了一元BL-代数，并证明其是S5(BL)的等价代数语义. 利用类似的方法，Rachunek等[31]建立了一元剩余格，并证明了其是模态逻辑S5(ML)的等价代数语义，其中S5(ML)的公理系统如下：

(ML) 逻辑系统ML的公理集；

($\square_1$) $\square\varphi \Rightarrow \varphi$;

($\square_2$) $\square(\varphi \Rightarrow \square\psi) \equiv (\Diamond\varphi \Rightarrow \square\psi)$;

($\square_3$) $\square(\square\varphi \Rightarrow \psi) \equiv (\square\varphi \Rightarrow \square\psi)$;

($\Diamond_1$) $\square(\Diamond\varphi \sqcup \psi) \equiv (\Diamond\varphi \sqcup \square\psi)$;

($\Diamond_2$) $\Diamond(\varphi \& \varphi) \equiv \Diamond\varphi \& \Diamond\varphi$.

推理规则：

(1) MP规则：从φ和$\varphi \Rightarrow \psi$，推出ψ;

(2) $N_{\square}$规则：从φ推出$\square\varphi$.

定义8[31] 一元剩余格是(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0)型代数$(L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \forall, \exists, 0, 1)$，其中$(L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$

是一个剩余格且 $\forall$ 和 $\exists$ 满足如下条件:

(M1) $x \to \exists x = 1$;

(M2) $\forall x \to x = 1$;

(M3) $\forall(x \to \exists y) = \exists x \to \exists y$;

(M4) $\forall(\exists x \to y) = \exists x \to \forall y$;

(M5) $\forall(x \vee \exists y) = \forall x \vee \exists y$;

(M6) $\exists\forall x = \forall x$;

(M7) $\forall\forall x = \forall x$;

(M8) $\exists(\exists x \odot \exists y) = \exists x \odot \exists y$;

(M9) $\exists(x \odot x) = \exists x \odot \exists x$.

本文将一元剩余格 $(L, \wedge, \vee, \odot, \to, \forall, \exists, 0, 1)$ 简记为 $(L, \forall, \exists)$.

命题 3[31]　设 $(L, \forall, \exists)$ 是一元剩余格,对任意的 $x, y \in L$,则以下结论成立:

(M10) $\forall(x \to y) \to (\forall x \to \forall y) = 1$;

(M11) $\forall(x \wedge y) = \forall x \wedge \forall y$;

(M12) $\exists(\exists x \to y) \to (\exists x \to \exists y) = 1$;

(M13) $\exists(x \wedge \exists y) = \exists x \wedge \exists y$;

(M14) $\exists(x \vee y) = \exists x \vee \exists y$;

(M15) $\forall(\forall x \odot \forall y) = \forall x \odot \forall y$;

(M16) $\forall(\forall x \to \forall y) = \forall x \to \forall y$;

(M17) $\forall\exists x = \exists x$.

3　相似一元剩余格

为了给一元子结构谓词逻辑中相似联结词提供代数基础,本节引入了相似一元剩余格,并研究其基本的代数性质.

定义 9　设 $(L, \forall, \exists)$ 是一元剩余格,

$$\mathrm{S}: (L, \forall, \exists) \times (L, \forall, \exists) \to (L, \forall, \exists)$$

是 $(L, \forall, \exists)$ 上的一个二元函数. 对任意 $x, y, z \in L$, 若 S 满足以下条件:

(S1) $\mathrm{S}(x, x) = 1$;

(S2) $\mathrm{S}(x, y) = \mathrm{S}(y, x)$;

(S3) $\mathrm{S}(x, y) \odot \mathrm{S}(y, z) \leqslant \mathrm{S}(x, z)$;

(S4) $\mathrm{S}(x, y) \leqslant x \leftrightarrow y$, 其中 $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$;

(S5) $\mathrm{S}(x \leftrightarrow y, 1) \leqslant \mathrm{S}(x, z) \leftrightarrow \mathrm{S}(y, z)$;

(S6) $\forall\mathrm{S}(x, y) \leqslant \mathrm{S}(\forall x, \forall y)$;

(S7) $\exists\mathrm{S}(x, y) \leqslant \mathrm{S}(\exists x, \exists y)$.

则称 S 是一元剩余格 $(L, \forall, \exists)$ 的相似算子, 具有相似算子的一元剩余格 $(L, \forall, \exists, \mathrm{S})$ 为相似一元剩余格.

由于全体相似一元剩余格集构成一个代数簇, 从而其子代数、同态以及商代数等基本定义均可由泛代数中的类似定义得到, 本文就不再赘述.

下面我们给出相似一元剩余格的一些例子.

例 1　设 $(L, \forall, \exists)$ 是一个一元剩余格. 定义 $\vartriangle$: $(L, \forall, \exists) \times (L, \forall, \exists) \to (L, \forall, \exists)$ 如下:

$$\vartriangle(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases},$$

则 $(L, \forall, \exists, \vartriangle)$ 是一个相似一元剩余格.

例 2　设 $(L, \forall, \exists)$ 是一元剩余格. 定义

$$E(x, y) = x \leftrightarrow y,$$

容易验证 $(L, \forall, \exists, \mathrm{E})$ 是一个相似一元剩余格.

例 3　设 $L = \{0, a, b, c, 1\}$ 且 $0 \leqslant a \leqslant c \leqslant 1$, $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$. 定义二元运算 $\odot$ 和 $\to$ 如下:

$\odot$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a
b	0	a	b	a	b
c	0	a	a	c	c
1	0	a	b	c	1

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1
b	0	c	1	c	1
c	0	a	a	1	1
1	0	a	b	c	1

则 $(L, \wedge, \vee, \odot, \to, 0, 1)$ 是一个剩余格. 定义一元映射 $\forall$ 和 $\exists$ 如下:

$$\forall = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ 0 & a & a & a & 1 \end{pmatrix}, \exists = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

此外, 定义 $\mathrm{S}: (L, \forall, \exists) \times (L, \forall, \exists) \to (L, \forall, \exists)$ 如下:

$\mathrm{S}(0, 0) = \mathrm{S}(a, a) = \mathrm{S}(b, b) = \mathrm{S}(c, c) = \mathrm{S}(1, 1) = 1$,

$\mathrm{S}(a, 0) = \mathrm{S}(0, a) = \mathrm{S}(b, 0) = \mathrm{S}(0, b) = \mathrm{S}(c, 0) = \mathrm{S}(0, c) = \mathrm{S}(1, 0) = \mathrm{S}(0, 1) = 0$,

$\mathrm{S}(a, 1) = \mathrm{S}(1, a) = a$, $\mathrm{S}(b, 1) = \mathrm{S}(1, b) = b$,

$\mathrm{S}(c, 1) = \mathrm{S}(1, c) = c$, $\mathrm{S}(b, a) = \mathrm{S}(a, b) = b$,

$\mathrm{S}(c, a) = \mathrm{S}(a, c) = c$, $\mathrm{S}(b, c) = \mathrm{S}(c, b) = a$,

则容易验证 $(L, \forall, \exists, \mathrm{S})$ 是一个相似一元剩余格.

命题 4　设 $(L, \forall, \exists, \mathrm{S})$ 是一个相似一元剩余格, 则以下性质成立: 对任意的 $x, y, z, t \in L$,

(1) $\mathrm{S}(x, y) = \forall\mathrm{S}(x, y)$ 当且仅当 $\mathrm{S}(x, y) = \exists\mathrm{S}(x, y)$;

(2) $\exists(\mathrm{S}(x, y) \to \mathrm{S}(z, t)) \leqslant \forall\mathrm{S}(x, y) \to \mathrm{S}(\exists z, \exists t)$;

(3) $\forall(\forall\mathrm{S}(x, y) \to \mathrm{S}(z, t)) = \forall\mathrm{S}(x, y) \to \forall\mathrm{S}(z, t)$.

证明　由命题 3 和定义 8 可证.

命题 5 设 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 是一个相似一元剩余格，则以下结论等价：

（1）$\exists\mathrm{S}(x,y)\odot\exists\mathrm{S}(z,t)=\mathrm{S}(\exists x,\exists y)\odot\mathrm{S}(\exists z,\exists t)$；

（2）若 $\mathrm{S}(\exists z,\exists t)=\mathrm{S}(\exists k,\exists l)$，$\mathrm{S}(x,y)=\mathrm{S}(\exists x,\exists y)$，则 $\exists\mathrm{S}(x,y)\odot\exists\mathrm{S}(z,t)=\exists\mathrm{S}(x,y)\odot\exists\mathrm{S}(k,l)$.

证明 （2）⇒（1）若 $\mathrm{S}(\exists z,\exists t)=\mathrm{S}(\exists k,\exists l)$，则

$$\begin{aligned}\exists\mathrm{S}(x,y)\odot\exists\mathrm{S}(z,t)&=\mathrm{S}(\exists x,\exists y)\odot\mathrm{S}(\exists z,\exists t)\\&=\mathrm{S}(\exists x,\exists y)\odot\mathrm{S}(\exists k,\exists t)\\&=\exists\mathrm{S}(x,y)\odot\exists\mathrm{S}(k,t).\end{aligned}$$

（1）⇒（2）注意到 $\mathrm{S}(x,y)=\mathrm{S}(\exists x,\exists y)$，又由（S7）可得

$$\mathrm{S}(x,y)=\mathrm{S}(\exists x,\exists y)=\exists\mathrm{S}(x,y).$$

4 可表示的相似一元剩余格

本节研究了相似一元剩余格的相似滤子，并给出了可表示相似一元剩余格的等价刻画.

定义 10 设 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 是一个相似一元剩余格且 F 是 L 的滤子. 对任意的 $x,y\in L$，若 F 满足：

$$x,y\in F \text{ 蕴涵 } \mathrm{S}(\forall x,\forall y)\in F,$$

则称 F 是相似一元剩余格 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 的相似滤子. 一个相似滤子称为素的当且仅当对任意的 $x,y\in L$，$x\to y,\ y\to x\in F$.

例 4 设 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 是例 1 中的相似一元剩余格，容易验证 $\{1\}$ 是 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 的相似滤子，然而其并不是素相似滤子. 在例 3 中，容易验证 $(a,b,c,1)$ 是 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 的一个素相似滤子.

下面给出相似一元剩余格上相似滤子的刻画.

命题 6 设 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 是一个相似一元剩余格且 F 是 L 的一个滤子，则以下事实等价：

（1）F 是 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 的相似滤子；

（2）对任意 $x\in F$，$\mathrm{S}(\forall x,1)\in F$.

证明 （1）⇒（2）在定义 10 中令 $y=1$ 即得.

（2）⇒（1）对任意的 $x,y\in L$，由 $\mathrm{S}(\forall x,1)\in F$，$\mathrm{S}(\forall y,1)\in F$ 以及定义 1（S2），（S3）可得：$\mathrm{S}(\forall x,1)\odot\mathrm{S}(\forall y,1)\leqslant\mathrm{S}(\forall x,\forall y)$，由定义 9 可知 F 是 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 的相似滤子.

由泛代数的知识自然可得命题 7 和命题 8.

命题 7 设 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 是相似一元剩余格且 F 是 L 的相似滤子，则 $\sim_F$ 是 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 的一个相似同余.

设 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 是相似一元剩余格且 F 是它的一个相似滤子. 定义映射：$\mathrm{S}_F: L/F\times L/F\to L/F$,

$$\mathrm{S}_F([x],[y])=[\mathrm{S}(x,y)]_F.$$

命题 8 设 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 是相似一元剩余格且 F 是相似滤子，则 $(L/F,\forall_F,\exists_F,\mathrm{S}_F)$ 是相似一元剩余格.

由于相似剩余格与相似 MTL-代数有着明显的差别，实际上在一般的相似剩余格中，预线性

$$(x\to y)\vee(y\to x)=1$$

及其广义形式均不成立，这就直接导致了相似剩余格不能像相似 MTL-代数那样可以表示成一系列线性序相似 MTL-代数的次直积. 基于上述考虑，下面给出了处理可表示相似一元剩余格的方法.

定义 11 设 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 是一个相似一元剩余格，若其同构于一族线性序相似一元剩余格的次直积，则称 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 是一个可表示的相似一元剩余格.

例 5 设 L 是一个二值剩余格，则 $(L,\mathrm{id}_L,\mathrm{id}_L,\vartriangle)$ 是一个可表示的相似一元剩余格，其中 id_L 是剩余格 L 上的恒等映射，$\vartriangle$ 如例 1 中所定义.

注 2 （1）例 5 表明一个二值剩余格（线性序剩余格）可以通过提升结构成为一个可表示的相似一元剩余格，然而并非每一个线性序剩余格都可以通过类似的方法成为一个可表示的相似一元剩余格，主要原因是每一个线性序剩余格并非都有与其对应的一元逻辑代数结构[30].

（2）正像相似剩余格一样，相似一元剩余格也并非都是可表示的. 这是因为在相似一元剩余格中析取规则的分离形式：

$$x\vee y=1 \text{ 蕴涵 } x\vee\mathrm{S}(1,\forall y)=1,$$

是不成立的. 下面来举例说明：设 $(L,\forall,\exists)$ 是例 3 中的一元剩余格，由例 1 可知 $(L,\forall,\exists,\vartriangle)$ 是一个相似一元剩余格. 可以验证：虽然 $y\vee z=1$，但是

$$y\vee\vartriangle(1,\forall z)=y\vee x=x\neq 1.$$

由线性序相似剩余格与线性序相似 MTL-代数等价，自然可以得到如下结论.

定理 2 可表示的相似一元剩余格与可表示的相似一元 MTL-代数等价.

下面给出了可表示相似一元剩余格的刻画，这是对相似一元剩余格对应逻辑系统进行半线性扩张的代数基础.

定理 3 设 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 是一个相似一元剩余格，则以下结论等价.

（1）$(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 是可表示的相似一元剩余格；

（2）对任意 $x,y\in L$，$\mathrm{S}(\forall(x\to y),1)\vee\forall(y\to x)=1$；

（3）对任意 $x,y\in L$，$x\vee y=1$ 蕴涵 $\forall x\vee\mathrm{S}(\forall y,1)=1$；

（4）每个极小一元素滤子是一个相似滤子.

证明 （1）⇒（2）若 $(L,\forall,\exists,\mathrm{S})$ 是可表示的相似一元剩余格，由定义 11 可得：一个命题在相似一元剩余格中成立当且仅当它在线性序相似一元剩余格中成立，由于线性序相似一元剩余格等价于线性序相似一元 MTL-代数. 容易验证对任意 $x,y\in L$，

$$\mathrm{S}(\forall x\to\forall y,1)\vee(\forall y\to\forall x)=1$$

在线性序相似一元剩余格中成立．一方面，若$x\leqslant y$，则$S(\forall x\to\forall y,1)=1$，从而$S(\forall x\to\forall y,1)\vee(\forall y\to\forall x)=1$．另一方面，若$y\leqslant x$，则$x\to y=1$，从而$S(\forall x\to\forall y,1)\vee(\forall y\to\forall x)=1$．

（2）⇒(3) 若$x\vee y=1$，由命题1（8）可得$x\to y=y$且$y\to x=x$，从而$\forall(x\to y)=\forall y$且$\forall(y\to x)=\forall x$. 因此由（2）可得：

$$\forall x\vee S(\forall y,1)=\forall(y\to x)\vee S(\forall(x\to y),1)=1.$$

（3）⇒（4）若F是L的唯一极小素滤子，下证F是相似一元剩余格$(L,\forall,\exists,S)$的相似滤子．假设$x,y\in F$，则存在$z\in L$且$z\notin F$使得$z\vee x=1$，由（3）可知$S(\forall x,1)\vee\forall z=1\in F$，又由于$\forall z\notin F$且$F$是素滤子，从而$S(\forall x,1)\in F$. 类似可证$S(\forall y,1)\in F$，进而$S(\forall x,1)\odot S(\forall y,1)\in F$，进一步由定义1（S3）可得：$S(\forall x,\forall y)\in F$，这就说明极小素滤子$F$是$(L,\forall,\exists,S)$的一个相似滤子．

（4）⇒（1）由定理2可知，可表示的相似一元剩余格和可表示的相似一元MTL-代数等价，以此为基础来证明该条结论．假设$(L,\forall,\exists,S)$的一个相似一元MTL-代数且$\mathcal{F}$是一元MTL-代数L的所有极小一元素滤子的集合．由于一元MTL-代数$(L,\forall,\exists)$是可以表示成一簇线性序一元MTL-代数$\{L/\sim_F|F\in\mathcal{F}\}$，且$i:L\to\Pi_{F\in\mathcal{F}}L/F$是对应的表示．由假设可知：$F\in\mathcal{F}$是$(L,\forall,\exists,S)$的相似滤子，由命题8可得：$(L/F,\forall_F,\exists_F,S_F)$是一个相似一元MTL-代数．显然$i$也是相似一元MTL-代数的一个表示．

注3　每个线性序相似一元剩余格$(L,\forall,\exists,S)$都是可表示的．事实上，若L是线性序剩余格且$x,y\in L$，如果$x\leqslant y$，则$x\to y=1$，如果$y\leqslant x$，则$y\to x=1$，然而无论取上述哪种情况，定理3（2）都成立．需要注意的是，上述命题的逆命题一般并不成立，我们通过下列给予说明．设$L=\{0,a,b,c,d,1\}$，其中$0\leqslant a,b$; $a\leqslant c,d$; $b\leqslant c$; $c,d\leqslant 1$. 定义L上的二元运算$\odot$和$\to$如下：

$\odot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	a
b	0	0	b	b	0	b
c	0	0	b	b	a	c
d	0	0	0	0	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$\to$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	d	1
a	c	1	c	1	1	1
b	d	d	1	1	d	1
c	a	d	c	1	d	1
d	b	c	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

则$(L,\wedge,\vee,\odot,\to,0,1)$是一个剩余格．定义二元函数$S:L\times L\to L$如下：

$$S(x,y)=\begin{cases}1, & x=y\\ x, & y=1\\ \neg y, & x=0\\ a, & (x,y)=(a,b),(c,d)\\ d, & (x,y)=(a,c)\\ c, & (x,y)=(a,d),(b,c)\\ 0, & (x,y)=(b,d)\end{cases}$$

容易验证$(L,\mathrm{id}_L,\mathrm{id}_L,S)$是一个相似一元剩余格，由定理3（3）可知其是可表示的，然而并非是线性序的．

5　相似一元剩余格对应的逻辑完备性

本节基于相似一元剩余格的公理系统，利用一元模糊谓词逻辑与S5型模糊模态逻辑的等价性，定义了相似一元剩余格代数簇对应的逻辑系统SML，证明了其完备性，给出其成为半线性逻辑的条件．

定义12　逻辑系统SML是由S5（ML）通过添加逻辑联结词S扩张而来．SML的公理集是由S5（ML）的公理加上如下公式：

（S1）$S(\varphi,\varphi)\equiv\bar{1}$;

（S2）$S(\varphi,\psi)\Rightarrow S(\psi,\varphi)$;

（S3）$S(\varphi,\psi)\Rightarrow(S(\psi,\phi)\Rightarrow S(\varphi,\phi))$;

（S4）$S(\varphi,\psi)\Rightarrow(\varphi\Rightarrow\psi)$;

（S5）$S(\varphi\Rightarrow\psi,\bar{1})\Rightarrow(S(\varphi,\phi)\Rightarrow S(\psi,\phi))$;

（S6）$\Box(S(\varphi,\psi))\Rightarrow S(\Box\varphi,\Box\psi)$;

（S7）$\Diamond(S(\varphi,\psi))\Rightarrow S(\Diamond\varphi,\Diamond\psi)$.

推理规则（MP规则、$N_\Box$规则，以及N_S规则）：从φ和ψ，推出$S(\varphi,\psi)$.

定义13　设$(L,\forall,\exists,S)$是相似一元剩余格，若映射$e:F(S)\to(L,\forall,\exists,S)$满足：

（1）$e(\varphi\sqcap\psi)=e(\varphi)\wedge e(\psi)$;

（2）$e(\varphi\sqcup\psi)=e(\varphi)\vee e(\psi)$;

（3）$e(\varphi\Rightarrow\psi)=e(\varphi)\to e(\psi)$;

（4）$e(\varphi\&\psi)=e(\varphi)\&e(\psi)$;

（5）$e(\Box\varphi)=\forall e(\varphi)$;

（6）$e(\Diamond\varphi)=\exists e(\varphi)$;

（7）$e(S(\varphi,\psi))=S(e(\varphi),e(\psi))$.

则称e为逻辑系统SML中的赋值．

定义14　设$(L,\forall,\exists,S)$是相似一元剩余格，$\varphi\in F(S)$. 若对于逻辑系统SML中的任意赋值e，均有$e(\varphi)=1$，则称φ为重言式．

逻辑系统SML的理论、证明、模型等概念与S5（ML）的相关定义类似，在此不再赘述．

命题9　设T是逻辑系统SML中给定的理论．对

每个公式φ，令$[\varphi]_T$是所有使$T\vdash\varphi\Rightarrow\phi$（在$T$下与$\varphi$等价的公式）成立的公式$\phi$的集合．$L_T$是所有$[\varphi]_T$类组成的集合．定义

$$[\varphi]_T\odot[\phi]_T=[\varphi\&\phi]_T,$$
$$[\varphi]_T\to[\phi]_T=[\varphi\Rightarrow\phi]_T,$$
$$[\varphi]_T\wedge[\phi]_T=[\varphi\sqcap\phi]_T,$$
$$[\varphi]_T\vee[\phi]_T=[\varphi\sqcup\phi]_T,$$
$$\forall_T[\varphi]_T=[\Box\varphi]_T,$$
$$\exists_T[\varphi]_T=[\Diamond\varphi]_T,$$
$$S_T([\varphi]_T,[\phi]_T)=[S(\varphi,\phi)]_T.$$

命题10 $(L_T,\odot,\to,\wedge,\vee,\forall_T,\exists_T,0_T,1_T,S_T)$是一个相似一元剩余格．

容易验证逻辑系统SML关于相似一元剩余格簇是可靠的，即若SML中可以由理论T推导出公式φ，则对于任意相似一元剩余格和理论T上的任意的模型ϑ，都有$\vartheta(\varphi)=1$．只需验证逻辑系统SML中的推理规则和推广规则的可靠性是否成立即可．

命题11 逻辑系统SML中的推理规则和推广规则是可靠的．对任意公式φ和ϕ：

（1）若对每个相似剩余格和T上的每个模型ϑ，都有$\vartheta(\varphi)=\vartheta(\phi)=1$，则对每个相似剩余格和$T$上的每个模型$\vartheta$，都有$\vartheta(S(\varphi,\phi))=1$．

（2）若对每个相似剩余格和T上的每个模型ϑ，$\vartheta(\varphi)=1$且$\vartheta(\varphi\Rightarrow\phi)=1$，则对每个相似剩余格和$T$上的每个模型$\vartheta$，都有$\vartheta(\phi)=1$．

（3）若对每个相似剩余格和T上的每个模型ϑ，

$\vartheta(\varphi)=1$，则对每个相似剩余格和T上的每个模型ϑ，都有$\vartheta(\Box\phi)=1$．

证明 （1）假设$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$是SML中关于$\varphi$的一个$T$证明，$(L,\forall,\exists,S)$是一个相似剩余格且$\vartheta$是一个$(L,\forall,\exists,S)$模型．下面将用归纳法证明$i\in N$, $\vartheta(\varphi_i)=1$．若存在$j,k\leqslant i$使得φ_i是$\varphi_j\Leftrightarrow\varphi_k$，则由归纳假设可得：$\vartheta(\varphi_i)=\vartheta(\varphi_k)=1$，从而 $\vartheta(\varphi_i)=S(\vartheta(\varphi_j),\vartheta(\varphi_k))=S(1,1)=1$．再令$i=n$可知$\vartheta(\varphi)=1$．

（2）若φ_i是一个公理，则有$\vartheta(\varphi_i)=1$．假设存在$j,k\leqslant i$使得φ_k是$\varphi_j\Rightarrow\varphi_i$．由归纳假设可得：$1=\vartheta(\varphi_k)=\vartheta(\varphi_j)$，从而$\vartheta(\varphi_i)=1\Rightarrow\vartheta(\varphi_i)=\vartheta(\varphi_j\Rightarrow\varphi_i)=\vartheta(\varphi_k)=1$．

（3）容易验证$\vartheta(\Box\phi)=\forall(\vartheta\phi)=\forall 1=1$．

显然，逻辑系统SML的完备性定理是可证的．

定理4 设T是SML上的理论，则对每个公式φ，以下事实等价．

（1）$T\vdash\varphi$；

（2）每个相似一元剩余格$(L,\forall,\exists,S)$和T上的每个模型ϑ，都有$\vartheta(\varphi)=1$；

（3）$[\varphi]=[1]_T$．

模糊逻辑系统称为半线性当且仅当其关于一簇线性序模糊逻辑代数完备[36]，从代数角度来看，就是对应逻辑代数的次直积分解定理成立．常见的模糊逻辑（如MV，BL以及MTL等）都属于半线性逻辑，然而ML却并非是半线性的．由注2可知，一般情况下SML并非是半线性的，那么如何对其进行半线性扩张是一个值得研究的问题．

下面将研究逻辑系统SML的最小半线性扩张的问题．为了研究这个问题，首先引入逻辑系统SML的扩张$\mathrm{SML_r}$，并确保其代数语义恰好是可表示的相似剩余格．要解决这个问题，自然会联想到前文中定理3中对可表示相似一元剩余格的刻画．

定义15 逻辑系统$\mathrm{SML_r}$是SML加上公理：

（S8）$(S\Box(\varphi\Rightarrow\psi),\overline{1})\sqcup\Box(\psi\Rightarrow\varphi)$.

$\mathrm{SML_r}$的推理规则与SML一致．

类似命题9中L_T的定义，记L_{rT}为$\mathrm{SML_r}$中所有$[\varphi]_T$类组成的集合，自然也可以得到如下的结论．

命题12 $(L_{rT},\odot,\to,\wedge,\vee,\forall_T,\exists_T,0_T,1_T,S_{rT})$是可表示的相似一元剩余格．

定理5 设T是$\mathrm{SML_r}$上的理论，则对每个公式φ，以下事实等价．

（1）$T\vdash\varphi$；

（2）每个相似一元剩余格$(L,\forall,\exists,S)$和T上的每个模型ϑ，都有$\vartheta(\varphi)=1$；

（3）每个线性相似一元剩余格$(L,\forall,\exists,S)$和T上的每个模型ϑ，都有$\vartheta(\varphi)=1$；

（4）$[\varphi]=[1]_T$．

证明 （1）⇒（2）由命题11可证．

（2）⇒（3）由命题4可证．

（3）⇒（4）由命题4和命题12可证．

（4）⇒（1）显然成立．

由定理3和文献[36]中的定理7可得下列结论．

定理6 逻辑系统$\mathrm{SML_r}$是半线性逻辑，且是SML的最小半线性扩张．

6 结束语

本文建立了一元子结构谓词逻辑中相似联接词的代数语义—相似一元剩余格，研究了其基本性质，刻画了可表示相似一元剩余格，建立了相似一元剩余格对应的逻辑系统，证明了其完备性，得到了其成为半线性逻辑的条件．由于该部分内容是当前国内外研究的热点问题，后续工作可以从以下方面来展开：张小红等[37]出版了国内第一部研究模糊量词及其积分语义的著作，系统地论述了近年来国内外模糊量词及积分语义所取得的最新成果，并得到了一些有趣而深刻的结论．本文主要研究了一元子结构谓词逻

辑中相似联接词的代数语义，后续可以研究其对应的积分语义.

参考文献

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] 王军涛, 折延宏. 不确定性推理的代数理论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2020.
WANG J T, SHE Y H. Algebraic Theory of Uncertain Reasoning[M]. Beijing: Electronic Industry Press, 2020. (in Chinese)

[3] 辛小龙, 王军涛, 杨将. 逻辑代数上的非可换测度[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
XIN X L, WANG J T, YANG J. Non Probabilistic Measures on Logical Algebras[M]. Beijing: The Science Publishing Company, 2019. (in Chinese)

[4] WARD M, DILWORTH P R. Residuated lattice[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1939, 45(3): 335-354.

[5] 左卫兵. 基于剩余格语义的格值逻辑系统的程度化方法[J]. 电子学报, 2017, 45(8): 1842-1848.
ZUO W B. Graded method of lattice-valued logic system based on residuated lattice semantics[J]. Acta Electronica Sinca, 2017, 45(8): 1842-1848. (in Chinese)

[6] 吴洪博,王娜. BR_0-代数中MT理想的扩展及素MT理想的存在性 [J]. 电子学报, 2015, 43(6): 1137-1143.
WU H B, WANG N. The extension of MT ideals and the existence of prime MT ideal in BR_0-algebras[J]. Acta Electronica Sinca, 2015, 43(6): 1137-1143. (in Chinese)

[7] 左卫兵. MTL-代数语义上逻辑公式的概率真度[J]. 电子学报, 2015, 43(2): 293-298.
ZUO W B. Probability truth degrees of formulas in MTL-algebras semantics [J]. Acta Electronica Sinca, 2015, 43(2): 293-298. (in Chinese)

[8] 左卫兵. 基于MV-代数语义的格值逻辑的程度化方法[J]. 电子学报, 2013, 41(10): 2035-2040.
ZUO W B. Graded method of lattice-valued logic system based on MV-algebras semantics[J]. Acta Electronica Sinca, 2013, 41(10): 2035-2040. (in Chinese)

[9] 吴洪博, 汪宁. 基于正则FI-代数的MT理想及其应用[J]. 电子学报, 2013, 41(7): 1389-1394.
WU H B, WANG N. MT ideals of regular FI-algebras with their applications[J]. Acta Electronica Sinca, 2013, 41(7): 1389-1394. (in Chinese)

[10] 吴洪博, 张琼. NML系统的有限强完备性[J]. 电子学报, 2010, 38(6): 1414-1418.
WU H B, ZHANG Q. On the finite strong completeness of NML[J]. Acta Electronica Sinca, 2010, 38(6): 1414-1418. (in Chinese)

[11] 吴洪博, 石慧君. Heyting 系统及其H-空间化表示形式[J]. 电子学报, 2012, 40(5): 995-999.
WU H B, SHI H J. Heyting system and its representation by H-spatilization[J]. Acta Electronica Sinca, 2012, 40(5): 995-999. (in Chinese)

[12] ZHU Y Q, XU Y. On filter theory of residuated lattices [J]. Information Sciences, 2010, 180(19): 3614-3632.

[13] ZADEH L A. Similarity relations and fuzzy orderings[J]. Information Sciences, 1971, 3(2): 177-200.

[14] 井美, 惠小静,王蓉. 基于相似度的直觉模糊推理反向三I算法的鲁棒性[J]. 电子学报, 2020, 48(2): 265-271.
JING M, HUI X J, WANG R. Robustness of intuitionistic fuzzy inference reverse triple I methods based on similarity[J]. Acta Electronica Sinca, 2020, 48(2): 265-271. (in Chinese)

[15] 高峰, 赵竹新, 文攻坚, 等. 基于Vague集的特征不确定性建模及相似度求解[J]. 电子学报, 2011, 39(11): 2622-2626.
GAO F, ZHAO Z X, WEN G J, et al. Modeling of the uncertain of image features and their simiularity computing based on vague sets[J]. Acta Electronica Sinca, 2011, 39(11): 2622-2626. (in Chinese)

[16] 罗敏霞, 姚宁. L系统中公式的语构程度化方法[J]. 电子学报, 2011, 39(2): 424-428.
LUO M X, YAO N. Syntactic graded method of formulars in the system L[J]. Acta Electronica Sinca, 2011, 39(2): 424-428. (in Chinese)

[17] HAJEK P. Metamathematics of Fuzzy Logic[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[18] BVELOHLAVEK R. Similarity relations in concept lattices[J]. Journal of Logic and Computation, 2000, 10(6): 823-845.

[19] GEORGESCU G, POPESCU A. Concept lattices and similarity in non commutative fuzzy logic[J]. Fundamenta Informaticae, 2002, 53(1): 23-54.

[20] TURUNEN E. A Lukasiewicz-style many-valued similarity reasoning review[C]//Beyond Two: Theory and Applications of Multiple-Valued Logic. Heidelberg: Physica-Verlag, 2003: 315-348.

[21] GERLA B, LEUCSTEAN I. Similarity MV-algebras[J]. Fundamenta Informaticae, 2006, 69(3): 287-300.

[22] ALMINANA F G, PELAYSE M E. Similarity DH-algebras[J]. Journal of Algebraic Structures and Their Appli-

cations, 2015, 2(1): 59-71.

[23] WANG J T, BORUMAND S A, HE P F. Similarity MTL-algebras and their corresponding logics[J]. Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, 2019, 32(5-6): 607-628.

[24] 王军涛. 相似剩余格及其对应逻辑系统的完备性[J]. 高校应用数学学报, 2021, 36(1): 111-126.
WANG J T. Similarity residuated lattices and the completeness of their corresponding logics[J]. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 2021, 36(1): 111-126. (in Chinese)

[25] HAJEK P. Monadic fuzzy predicate logics[J]. Studia Logica, 2002, 71: 165-175.

[26] RUTLEDGE J D. A Preliminary Investigation of the Intinitely Many-Valued Predicate Calculus[D]. New York: Cornell University, 1959.

[27] WANG J T, XIN X L, HE P F. Monadic bounded hoops [J]. Soft Computing, 2018, 22: 1749-1762.

[28] LIU H X. On categorical equivalences of equality algebras and monadic equality algebras[J]. Logic Journal of the IGPL, 2019, 27(3): 267-280.

[29] CASTANO D, CIMADAMORE C R, DIAZ VARELA J P, et al. Monadic BL-algebras: The equivalent algebraic semantics of Hájek's monadic fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2017, 320: 40-59.

[30] WANG J T, HE P F, SHE Y H. Monadic NM-algebras [J]. Logic Journal of the IGPL, 2019, 27(6): 812-835.

[31] RACHUNEK J, SALOUNVA D. Monadic bounded residuated lattices[J]. Order, 2013, 30: 195-210.

[32] NOGUERA C. Algebraic Study of Axiomatic Extensions of Triangular Norm Based Fuzzy Logics[D]. Bellaterra: Artificial Intelligence Research Institute, 2006.

[33] BLOK W J, PIGOZZI D. Algebraizable logics[J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 1989, 77: 1-84.

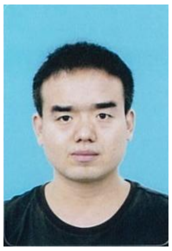
[34] ESTEVA F, GODO L. Monoidal t-norm based logic: Towards a logic for left continuous t-norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124(3): 271-288.

[35] HAJEK P. On fuzzy modal logics S5(C)[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161: 2389-2396.

[36] CINTULA P, NOGUERA C. Implicational (semilinear) logics II: Additional connectives and characterizations of semilinearity[J]. Archive for Mathematical Logic, 2016, 55: 353-372.

[37] 张小红, 折延宏. 模糊量词及其积分语义[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
ZHANG X H, SHE Y H. Fuzzy Quantifier and Their Integral Semantics[M]. Beijing: The Science Publishing Company, 2017. (in Chinese)

作者简介



王军涛 男,1987年12月生,陕西咸阳人,2018年7月获西北大学理学博士学位. 现为西安石油大学理学院副教授、硕士生导师. 主要研究方向为序代数、模糊逻辑及不确定性推理.
E-mail: wjt@xsyu.edu.cn

王 梅 女,1992年3月生,山西长治人. 现为陕西科技大学电气与控制工程学院博士研究生. 主要研究方向为序代数及不确定性推理.
E-mail: wangmeimath@163.com

折延宏(通讯作者) 男,1983年5月生,陕西延安人. 2010年7月获陕西师范大学理学博士学位. 现为西安石油大学理学院教授、硕士生导师. 主要研究方向为多粒度数据分析、模糊逻辑及不确定性推理.
E-mail: yanhongshe@xsyu.edu.cn