

# 基于自适应事件触发的跳变系统故障检测滤波

张志涵<sup>1</sup>, 朱凤增<sup>1</sup>, 彭 力<sup>1,2</sup>

(1. 江南大学物联网应用技术教育部工程中心, 江苏无锡 214122;  
2. 无锡太湖学院江苏省物联网应用技术重点建设实验室, 江苏无锡 214064)

**摘 要:** 本文讨论了一类基于自适应事件触发机制的离散马尔科夫跳变系统在网络传输下的故障检测滤波器设计问题. 对系统测量输出设计自适应事件触发机制, 可以减少计算负载或节省有限的网络带宽. 使用 Bernoulli 随机变量来描述网络是否能够成功地接收系统跳变模式, 且基于 Lyapunov 稳定性理论设计了一种部分模态依赖的故障检测滤波器, 使残差误差系统均方指数稳定且满足  $H_\infty$  性能指标, 并通过求解线性矩阵不等式得到故障检测滤波器参数, 通过仿真例子说明该设计方法的有效性.

**关键词:** 自适应事件触发; 离散马尔科夫跳变系统; 部分模态依赖; 故障检测; 线性矩阵不等式

**基金项目:** 国家重点研发计划(No.2018YFD0400902); 国家自然科学基金(No.61873112)

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112(2023)02-0499-09

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.12263/DZXB.20210373

## Adaptive Event-Triggered Fault Detection Filter for Jump Systems

ZHANG Zhi-han<sup>1</sup>, ZHU Feng-zeng<sup>1</sup>, PENG Li<sup>1,2</sup>

(1. *Research Center of Engineering Applications for IOT, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu 214122, China;*  
2. *Jiangsu Province Internet of Things Application Technology Key Construction Laboratory, Wuxi Taihu College, Wuxi, Jiangsu 214064, China*)

**Abstract:** This paper deals with the problem of fault detection filter (FDF) for a class of discrete Markovian jump systems with adaptive event-triggered mechanism under network transmission. First, an adaptive event-triggered mechanism is designed for the systematic measurement output, which can reduce the computation load or save limited network bandwidth. Then, Bernoulli stochastic variables are used to describe whether the network can successfully receive the system jump modes. Next, based on the Lyapunov stability theory, a fault detection filter with partially mode-dependent is designed to make the residual error system exponentially mean-square stable and satisfy  $H_\infty$  performance. The parameters of fault detection filter are available by solving the linear matrix inequality (LMI). Finally, a numerical example is given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** adaptive event-triggered; discrete Markovian jump systems; partially mode-dependent; fault detection; linear matrix inequality

**Foundation Item(s):** National Key R&D Program of China (No.2018YFD0400902); National Natural Science Foundation of China (No.61873112)

## 1 引言

随着科技的不断发展, 控制系统日益复杂化、智能化, 并且广泛应用于众多工程领域. 为了提高系统的安全性、稳定性以及保证系统高效地运行, 故障检测技术一直应用于各类工程系统<sup>[1-4]</sup>. 但目前故障检测技术的被控对象大多是一般的确定性系统, 很少涉及随机系统, 而实际的工业系统内部结构复杂, 系统参数变化随

机性强, 因此, 针对随机系统的故障检测问题逐渐得到研究.

马尔科夫跳变系统作为一种随机混合系统, 在过去几十年中得到了深入的研究<sup>[5-7]</sup>. 文献[5]针对一类系统结构参数不完全已知的离散 Markov 跳变系统, 研究了具有方差约束的鲁棒控制器的设计问题, 文献[6]研究了一类马尔科夫跳变网络物理系统的有限时间滑

模控制问题,该系统会受到随机发生的不确定性和注入攻击的影响,文献[7]研究了一类带丢包的 Markov 切换系统的状态估计问题.

在有关马尔科夫跳变系统的研究工作中,为了确保模态依赖的滤波器或控制策略具有实用性,提出一个共同的理想假设,即估计器或控制器可完整的获得系统跳变的模态信息.但是在很多实际工业应用中,由于有限的物理装置存在识别系统模态不及时、传输丢包等现象,导致故障检测器或控制器无法及时得到与状态有关的信息,因此在实际中这种理想假设很难实现.为了解决这一问题,部分学者采用了模态独立的控制器或滤波器设计方案<sup>[8-10]</sup>,文献[8]设计了一个模态独立的控制器,解决了非线性马尔科夫跳变系统的鲁棒稳定性问题,文献[9]中介绍了一种模态不可用的线性马尔科夫跳变系统的控制策略,文献[10]给出了离散时域内具有乘性噪声的马尔科夫跳变系统的模态独立滤波器.显然,在这些设计方法中,即使系统模态有时是可用的,也被完全忽略了,削弱了控制器或滤波器的性能,增加了保守性,因此,一种新的  $H_\infty$  滤波器方法,即部分模态依赖滤波器引起了越来越多的关注<sup>[11-13]</sup>.文献[11]中为离散奇异马尔科夫跳变系统设计了一种部分模态依赖的滤波器;文献[12]研究了广义马尔科夫跳变系统的部分模态依赖观测器的控制问题;文献[13]研究了具有乘性噪声和部分模态依赖的非齐次马尔科夫跳变系统的  $H_\infty$  滤波问题,该滤波器设计方法桥接了两种极端情况,即将模态独立和模态依赖滤波器结合在一起,这种方法具有更广泛的应用.因此,为马尔科夫跳变系统设计一种部分模态依赖的故障检测滤波器具有重要意义.

另一方面,事件触发策略是一种在网络化系统中节约通信资源的有效机制.仅在满足相应触发条件时,信号才允许被传输,有效降低了系统的资源消耗和节

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(\theta(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(\theta(k))\boldsymbol{\omega}(k) + \mathbf{L}(\theta(k))\mathbf{f}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(\theta(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(\theta(k))\boldsymbol{\omega}(k) + \mathbf{G}(\theta(k))\mathbf{f}(k) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}(k) \in R^n$  为系统状态,  $\boldsymbol{\omega}(k) \in R^l$  为外部干扰输入向量,  $\mathbf{f}(k) \in R^q$  为被检测的故障向量,设  $\boldsymbol{\omega}(k)$  和  $\mathbf{f}(k)$  均为  $l_2$  范数有界向量,  $\mathbf{y}(k) \in R^p$  为系统测量输出向量.

在非负整数集  $\mathbf{Z}$  下,  $\{\theta(k), k \in \mathbf{Z}\}$  是离散马尔科夫链且在有限集合  $l = \{1, 2, \dots, n\}$  中取值,其状态转移概率矩阵为  $\boldsymbol{\Pi} = \{\pi_{ij}\}$ ,其中  $\pi_{ij} = P(\theta(k+1) = j | \theta(k) = i)$  和  $\pi_{ij} \geq 0, \forall i, j \in l$  对  $\theta(k) = i \in l$  所有的每个可能取值有  $\sum_{j=1}^n \pi_{ij} = 1, \mathbf{A}^i, \mathbf{B}^i, \mathbf{C}^i, \mathbf{D}^i, \mathbf{G}^i, \mathbf{L}^i$  为具有适当维数的已知矩阵.

省通信带宽,因此事件触发机制在各个领域有着广泛的应用<sup>[14-16]</sup>.文献[14]研究了事件触发方案下非线性离散网络系统故障检测问题,文献[15]研究了一类时变系统在欺骗攻击和事件触发机制下的分布式滤波问题,文献[16]解决了事件触发机制下的离散时间马尔科夫跳变系统的故障检测滤波问题.然而,上述研究采用的是具有恒定阈值参数的事件触发机制,由于事件触发机制中的触发阈值参数在决定是否向网络发送数据方面起着关键作用,在某些实际情况下,使用固定的触发阈值可能是不合理的.例如,采用一个过小的触发阈值产生的结果类似于时间触发方案,不能很好地节约网络资源,而采用一个过大的触发阈值可能导致由于数据传输少而影响滤波性能.因此,设计一个动态调整的事件触发机制来平衡滤波性能、有限能源以及通信资源是非常重要的.

因此,本文的目的是提出一种基于自适应事件触发的马尔科夫跳变系统部分模态依赖故障检测滤波器(Fault Detection Filter, FDF)设计方法,主要贡献包括:

(1) 针对马尔科夫随机跳变系统,提出了一种部分模态依赖的故障检测滤波设计方法,这种改进的方法允许滤波器以一定的概率从系统接收跳变模态.这样的滤波器包含两种特殊情况,即模态完全独立的故障检测滤波器和模态完全依赖的故障检测滤波器.

(2) 引入了一种自适应事件触发机制,以减少网络上的通信负担,同时确保系统的稳定性.

(3) LMI 形式给出了具有均方指数稳定性和鲁棒  $H_\infty$  性能的故障检测滤波器的充分条件.

## 2 问题描述

在固定概率空间下,考虑如下离散马尔科夫跳变系统模型:

为了降低通信负担,引入如下的自适应事件触发机制:

$$\mathbf{g}(k) = \boldsymbol{\varepsilon}^T(k)\boldsymbol{\varepsilon}(k) - \sigma(k)\mathbf{y}^T(k)\mathbf{y}(k) \quad (2)$$

其中,  $\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \mathbf{y}(k_u) - \mathbf{y}(k)$ ,  $k$  表示当前时刻,  $k_u$  表示在当前时刻之前最新的事件触发时刻,  $u$  标记为传输时刻.当满足  $\mathbf{g}(k) > 0$  时,自适应事件触发器才会被触发.因此,自适应事件触发的时刻可以被定义为

$$k_{u+1} = \min\{k \in N | k > k_u, \mathbf{g}(k) > 0\} \quad (3)$$

这里,  $\sigma(k)$  表示自适应参数,服从如下自适应规则<sup>[17]</sup>:

$$\frac{1}{\sigma(k+1)} = \frac{1}{\sigma(k)} + \frac{\mathbf{y}^T(k)\mathbf{y}(k)}{1 + \boldsymbol{\varepsilon}^T(k)\boldsymbol{\varepsilon}(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^T(k)\boldsymbol{\varepsilon}(k) \quad (4)$$

其中,初始条件 $\sigma(0) = \sigma_0 > 0$ .

**注 1** 事件触发的阈值 $\sigma(k)$ 由最新发送值和当前测量输出的误差大小决定,用于平衡网络传输的通信频率或通信负担,当自适应规则中的增益矩阵

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = (1-\alpha(k))(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{y}(k_u)) \\ \quad + \alpha(k)(\hat{\mathbf{A}}(\theta(k))\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{B}}(\theta(k))\mathbf{y}(k_u)) \\ \mathbf{r}(k) = (1-\alpha(k))\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \alpha(k)\hat{\mathbf{C}}(\theta(k))\hat{\mathbf{x}}(k) \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}(k) \in R^n$ 为状态估计, $\mathbf{r}(k) \in R^p$ 为故障检测器的残差输出, $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{A}}(\theta(k)), \hat{\mathbf{B}}(\theta(k)), \hat{\mathbf{C}}(\theta(k))$ 为待确定的参数矩阵.

另外, $\alpha(k)$ 用来描述跳变模态 $\theta(k)$ 在网络上的传输状况,如果跳变模态 $\theta(k)$ 被成功传输,则 $\alpha(k) = 1$ ,否则 $\alpha(k) = 0$ .假定随机变量 $\alpha(k)$ 是Bernoulli分布序列,与 $\theta(k)$ 是彼此相互独立的,且满足:

$$\begin{cases} \text{Prob}\{\alpha(k) = 1\} = E\{\alpha(k)\} = \alpha \\ \text{Prob}\{\alpha(k) = 0\} = 1 - E\{\alpha(k)\} = 1 - \alpha \\ E\{(\alpha(k) - \alpha)^2\} = (1 - \alpha)\alpha = \beta^2 \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\alpha$ 是一个已知的标量.

**注 2** 随机变量 $\alpha(k)$ 反映了网络通信信道的阻塞程度与跳变模态是否正确的传输, $\alpha$ 的值越大表示获得跳变模态的概率越大,或者说也可以说 $\alpha$ 的值越大表示通信信道越快.当 $\alpha(k) = 0$ 时,则是一般意义下的模态完全独立型的故障检测器;当 $\alpha(k) = 1$ 时,则是模态完全依赖的故障检测器.所以,式(5)形式的故障检测器桥接了两种极端的情况.因此,与文献[16]中所有时刻均须获得完全准确模态信息的完全依赖故障检测滤波器相比,它可以承受部分模态的丢失,可以用一定的概率测量系统模态,而不需要精确的测量,从而降低数据传输的负担;与文献[10]中模态完全独立的滤波器相比,其设计和应用范围也更广泛.

进一步地,故障检测滤波器可整理为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1) = (1-\alpha(k))(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{B}}\boldsymbol{\varepsilon}(k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{y}(k)) \\ \quad + \alpha(k)(\hat{\mathbf{A}}(\theta(k))\hat{\mathbf{x}}(k) + \hat{\mathbf{B}}(\theta(k))\boldsymbol{\varepsilon}(k) \\ \quad + \hat{\mathbf{B}}(\theta(k))\mathbf{y}(k)) \\ \mathbf{r}(k) = (1-\alpha(k))\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(k) + \alpha(k)\hat{\mathbf{C}}(\theta(k))\hat{\mathbf{x}}(k) \end{cases} \quad (7)$$

定义 $\bar{\mathbf{x}}^T(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \hat{\mathbf{x}}^T(k)]$ 为增广状态向量, $\mathbf{r}_e(k) = \mathbf{r}(k) - \mathbf{f}(k)$ 为残差误差信号,并令 $\bar{\boldsymbol{\omega}}^T(k) = [\boldsymbol{\omega}^T(k) \quad \mathbf{f}^T(k)]$ , $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T(k) = [0 \quad \boldsymbol{\varepsilon}^T(k)]$ ,由式(1)~式(7),整理可得增广系统(8):

$\mathbf{y}^T(k)\mathbf{y}(k)/1 + \boldsymbol{\varepsilon}^T(k)\boldsymbol{\varepsilon}(k)$ 为0时,事件触发机制被称为静态事件触发机制.与静态事件触发机制相比,自适应事件触发机制在调度数据传输方面可以提供更多的灵活性.

设计如下具有部分模态依赖的故障检测滤波器:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}}^i \bar{\boldsymbol{\omega}}(k) + \bar{\mathbf{C}}^i \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(k) \\ \quad + \bar{\beta}(\tilde{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{B}}^i \bar{\boldsymbol{\omega}}(k) + \tilde{\mathbf{C}}^i \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(k)) \\ \mathbf{r}_e(k) = \bar{\mathbf{D}}^i \bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{F}} \bar{\boldsymbol{\omega}}(k) + \bar{\beta} \tilde{\mathbf{D}}^i \bar{\mathbf{x}}(k) \end{cases} \quad (8)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}^i &= \bar{\mathbf{A}}^i + \alpha \tilde{\mathbf{A}}^i, \quad \bar{\mathbf{B}}^i = \bar{\mathbf{B}}^i + \alpha \tilde{\mathbf{B}}^i, \\ \bar{\mathbf{C}}^i &= \bar{\mathbf{C}}^i + \alpha \tilde{\mathbf{C}}^i, \quad \bar{\mathbf{D}}^i = \bar{\mathbf{D}}^i + \alpha \tilde{\mathbf{D}}^i, \\ \bar{\beta} &= \alpha(k) - \alpha, \quad \bar{\mathbf{F}} = [0 \quad -\mathbf{I}], \\ \bar{\mathbf{A}}^i &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}^i & 0 \\ \hat{\mathbf{B}}\mathbf{C}^i & \hat{\mathbf{A}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^i & \mathbf{L}^i \\ \hat{\mathbf{B}}\mathbf{D}^i & \hat{\mathbf{B}}\mathbf{G}^i \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{A}}^i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{B}}^i\mathbf{C}^i - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{C}^i & \hat{\mathbf{A}}^i - \hat{\mathbf{A}} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{B}}^i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{B}}^i\mathbf{D}^i - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{D}^i & \hat{\mathbf{B}}^i\mathbf{G}^i - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{G}^i \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{C}}^i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{B}}^i - \hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{C}}^i - \hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{D}}^i &= [0 \quad \hat{\mathbf{C}}], \quad \tilde{\mathbf{D}}^i = [0 \quad \hat{\mathbf{C}}^i - \hat{\mathbf{C}}]. \end{aligned} \quad (9)$$

本文的目的是在部分模态依赖的情况下,设计如式(5)所示的故障检测滤波器,对所有系统干扰输入,系统(8):

(1)考虑系统(8)在 $\bar{\boldsymbol{\omega}}(k) = 0$ 时,如果存在 $\lambda > 0$ 和 $\tau \in (0, 1)$ ,使得 $E\{\|\bar{\mathbf{x}}(k)\|^2\} \leq \lambda \tau^k E\{\|\bar{\mathbf{x}}(0)\|^2\}$ , $\forall \bar{\mathbf{x}}(0) \neq 0$ ,则称系统具有均方指数稳定性;

(2)在零初始条件下,如果存在一个标量 $\gamma > 0$ ,使得残差误差 $\mathbf{r}_e(k)$ 满足如下的 $H_\infty$ 性能指标:

$$E\{\|\mathbf{r}_e(k)\|^2\} < \gamma^2 E\{\|\bar{\boldsymbol{\omega}}(k)\|^2\} \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_e(k)\|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{r}_e^T(k)\mathbf{r}_e(k) \\ \|\bar{\boldsymbol{\omega}}(k)\|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\boldsymbol{\omega}}^T(k)\bar{\boldsymbol{\omega}}(k) \end{aligned}$$

本文选择评价函数和阈值分别如下:

$$\begin{cases} J(\mathbf{r}, k) = \left\{ \sum_{k_0}^{k_0+S} \mathbf{r}^T(k) \mathbf{r}(k) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ J_{th} = \sup_{\omega(k) \in I_2, f(k)=0} J(\mathbf{r}, k) \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $k_0$  表示初始评价时刻,  $S$  表示选择的时间窗宽度. 从评价函数和阈值公式中可以看出:  $S$  越大, 代表需要累加计算的残差数据越多, 故障检测判断的时间越长; 而较小的时间宽度, 代表了故障检测判断时间较短, 故障检测灵敏度更高.

通过如下的比较决策实现检测系统是否发生故障:

$$\begin{cases} J(\mathbf{r}, k) > J_{th} \Rightarrow \text{不正常} \Rightarrow \text{有故障} \\ J(\mathbf{r}, k) \leq J_{th} \Rightarrow \text{没有故障} \end{cases} \quad (12)$$

**引理 1**<sup>[18]</sup> 设  $V(\boldsymbol{\eta}(k)) = \boldsymbol{\eta}^T(k) \mathbf{P} \boldsymbol{\eta}(k)$  为 Lyapunov 函数, 如果存在实标量  $\lambda \geq 0, \mu > 0, v > 0$  以及  $0 < \psi < 1$ , 使得

$$\mu \|\boldsymbol{\eta}(k)\|^2 \leq V(\boldsymbol{\eta}(k)) \leq v \|\boldsymbol{\eta}(k)\|^2 \quad (13)$$

和

$$\mathbb{E}\{V(\boldsymbol{\eta}(k+1)|\boldsymbol{\eta}(k))\} - V(\boldsymbol{\eta}(k)) \leq \lambda - \psi V(\boldsymbol{\eta}(k)) \quad (14)$$

则可以得到

$$\mathbb{E}\{\|\boldsymbol{\eta}(k)\|^2\} \leq \frac{v}{\mu}(1-\psi)^k \|\boldsymbol{\eta}(0)\|^2 + \frac{\lambda}{\mu\psi} \quad (15)$$

**引理 2**<sup>[19]</sup> 如果存在矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{R} = \mathbf{R}^T$  以及  $\mathbf{Q} > 0$  使得  $\mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} - \mathbf{R} < 0$ , 那么存在一个矩阵  $\mathbf{G}$  使得

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{R} & \mathbf{A}^T \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} \mathbf{A} & \mathbf{Q} - \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

### 3 主要结果

**定理 1** 给定  $\gamma > 0$ , 对每一个  $i \in l$ , 如果存在正定对称矩阵  $\mathbf{P}^i$ , 使得

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \Gamma_{22} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \Gamma_{33} & * & * & * & * & * \\ \Gamma_{41} & \Gamma_{42} & \Gamma_{43} & \Gamma_{44} & * & * & * & * \\ \Gamma_{51} & \Gamma_{52} & \Gamma_{53} & 0 & \Gamma_{55} & * & * & * \\ \Gamma_{61} & 0 & \Gamma_{63} & 0 & 0 & \Gamma_{66} & * & * \\ \Gamma_{71} & 0 & \Gamma_{73} & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{77} & * \\ \Gamma_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_{88} \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

那么系统 (8) 是均方指数稳定且满足式 (10) 所示的  $H_\infty$  性能指标.

其中,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= -\mathbf{P}^i, \Gamma_{22} = \Gamma_{66} = \Gamma_{77} = \Gamma_{88} = -\mathbf{I}, \\ \Gamma_{33} &= -\gamma^2 \mathbf{I}, \Gamma_{41} = \mathbf{X}^i \widehat{\mathbf{A}}^i, \Gamma_{42} = \mathbf{X}^i \widehat{\mathbf{C}}^i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{43} &= \mathbf{X}^i \widehat{\mathbf{B}}^i, \Gamma_{51} = \beta \mathbf{X}^i \tilde{\mathbf{A}}^i, \Gamma_{52} = \beta \mathbf{X}^i \tilde{\mathbf{C}}^i, \\ \Gamma_{44} &= \Gamma_{55} = -\mathbf{X}^i, \mathbf{X}^i = \sum_{j=1}^n \pi_j \mathbf{P}^j, \\ \Gamma_{53} &= \beta \mathbf{X}^i \tilde{\mathbf{B}}^i, \Gamma_{61} = \sqrt{\sigma_0} \tilde{\mathbf{C}}^i, \Gamma_{63} = \sqrt{\sigma_0} \tilde{\mathbf{D}}^i, \\ \Gamma_{71} &= \widehat{\mathbf{D}}^i, \Gamma_{73} = \widehat{\mathbf{F}}^i, \Gamma_{81} = \beta \tilde{\mathbf{D}}^i. \end{aligned} \quad (18)$$

**证明** 定义系统的 Lyapunov 函数

$$V(\bar{\mathbf{x}}(k), \theta(k)) = \bar{\mathbf{x}}^T(k) \mathbf{P}^{\theta(k)} \bar{\mathbf{x}}(k) \quad (19)$$

证明分两步:

(1) 先证稳定性, 此时  $\bar{\omega}(k) = 0$ .

$$\begin{aligned} \Delta V(\bar{\mathbf{x}}(k), \theta(k)) &= \mathbb{E}\{\bar{\mathbf{x}}^T(k+1) \mathbf{X}^i \bar{\mathbf{x}}(k+1)\} \\ &\quad - \bar{\mathbf{x}}^T(k) \mathbf{P}^i \bar{\mathbf{x}}(k) \\ &= \bar{\mathbf{x}}^T(k) \widehat{\mathbf{A}}^{iT} \mathbf{X}^i \widehat{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{x}}(k) \\ &\quad + \bar{\mathbf{x}}^T(k) \widehat{\mathbf{A}}^{iT} \mathbf{X}^i \widehat{\mathbf{C}}^i \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(k) \\ &\quad + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T(k) \widehat{\mathbf{C}}^{iT} \mathbf{X}^i \widehat{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{x}}(k) \\ &\quad + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T(k) \widehat{\mathbf{C}}^{iT} \mathbf{X}^i \widehat{\mathbf{C}}^i \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(k) \\ &\quad + \beta^2 \bar{\mathbf{x}}^T(k) \tilde{\mathbf{A}}^{iT} \mathbf{X}^i \tilde{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{x}}(k) \\ &\quad + \beta^2 \bar{\mathbf{x}}^T(k) \tilde{\mathbf{A}}^{iT} \mathbf{X}^i \tilde{\mathbf{C}}^i \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(k) \\ &\quad + \beta^2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T(k) \tilde{\mathbf{C}}^{iT} \mathbf{X}^i \tilde{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{x}}(k) \\ &\quad + \beta^2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T(k) \tilde{\mathbf{C}}^{iT} \mathbf{X}^i \tilde{\mathbf{C}}^i \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(k) \\ &\quad - \bar{\mathbf{x}}^T(k) \mathbf{P}^i \bar{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{定义 } \tilde{\mathbf{C}}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{D}}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^i & \mathbf{G}^i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据自适应事件触发的条件 (2), 可以得到:

$$-\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T(k) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(k) + \sigma_0 \bar{\mathbf{x}}^T(k) \tilde{\mathbf{C}}^{iT} \tilde{\mathbf{C}}^i \bar{\mathbf{x}}(k) > 0 \quad (21)$$

因此,

$$\Delta V(\bar{\mathbf{x}}(k), \theta(k)) \leq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(k) \end{bmatrix}^T \mathbf{A}^i \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(k) \end{bmatrix} \quad (22)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^i &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^i & * \\ \mathbf{A}_{21}^i & \mathbf{A}_{22}^i \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{11}^i &= \widehat{\mathbf{A}}^{iT} \mathbf{X}^i \widehat{\mathbf{A}}^i + \beta^2 \tilde{\mathbf{A}}^{iT} \mathbf{X}^i \tilde{\mathbf{A}}^i + \sigma_0 \tilde{\mathbf{C}}^{iT} \tilde{\mathbf{C}}^i - \mathbf{P}^i, \\ \mathbf{A}_{21}^i &= \widehat{\mathbf{C}}^{iT} \mathbf{X}^i \widehat{\mathbf{A}}^i + \beta^2 \tilde{\mathbf{C}}^{iT} \mathbf{X}^i \tilde{\mathbf{A}}^i, \\ \mathbf{A}_{22}^i &= \widehat{\mathbf{C}}^{iT} \mathbf{X}^i \widehat{\mathbf{C}}^i + \beta^2 \tilde{\mathbf{C}}^{iT} \mathbf{X}^i \tilde{\mathbf{C}}^i - \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (23)$$

显然, 利用 Schur 引理, 式 (17) 隐含  $\mathbf{A}^i < 0$ .

因此, 可以得到:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}^T(k) \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{x}}(k) &\leq -\min\{\lambda_{\min}(-\mathbf{A}^i)\} \bar{\mathbf{x}}^T(k) \bar{\mathbf{x}}(k) \\ &\leq -\delta \bar{\mathbf{x}}^T(k) \bar{\mathbf{x}}(k) \end{aligned} \quad (24)$$

其中,  $0 < \delta \leq \min\{\lambda_{\min}(-\mathbf{A}^i)\}$ .

接下来进一步限制  $\delta$  的取值范围, 定义  $\rho = \max\{\lambda_{\max}(\mathbf{P}^i)\}$ , 那么  $\delta$  满足以下约束:

$$0 < \delta < \rho \quad (25)$$

又有

$$V(\bar{\mathbf{x}}(k), \theta(k)) \leq \rho \bar{\mathbf{x}}^T(k) \bar{\mathbf{x}}(k) \quad (26)$$

把不等式(26)代入到(24)中, 可以得到:

$$\begin{aligned} \Delta V(\bar{\mathbf{x}}(k), \theta(k)) &\leq -\frac{\delta}{\rho} V(\bar{\mathbf{x}}(k), \theta(k)) \\ &= \lambda - \psi V(\bar{\mathbf{x}}(k), \theta(k)) \end{aligned} \quad (27)$$

其中,  $0 < \psi = \frac{\delta}{\rho} < 1$ .

另外,

$$\mu \|\bar{\mathbf{x}}(k)\|^2 \leq V(\bar{\mathbf{x}}(k), \theta(k)) \leq \rho \|\bar{\mathbf{x}}(k)\|^2 \quad (28)$$

其中,  $\mu = \min\{\lambda_{\min}(\mathbf{P}^i)\}$ .

对不等式(27)和(28)应用引理 1, 令  $\lambda=0$ , 就可以得到

$$\mathbb{E}\{\|\bar{\mathbf{x}}(k)\|^2\} \leq \frac{\rho}{\mu}(1-\psi)\|\bar{\mathbf{x}}(0)\|^2 \quad (29)$$

因此, 系统(8)是均方指数稳定.

(2)再证  $H_\infty$  性能指标, 此时  $\bar{\omega}(k) \neq 0$ .

定义性能函数为

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \mathbb{E}\{V(\bar{\mathbf{x}}(k+1), \theta(k+1))\} \\ &\quad - \mathbb{E}\{V(\bar{\mathbf{x}}(k), \theta(k))\} + \mathbb{E}\{\mathbf{r}_e^T(k) \mathbf{r}_e(k)\} \\ &\quad - \gamma^2 \mathbb{E}\{\bar{\omega}^T(k) \bar{\omega}(k)\} \end{aligned} \quad (30)$$

根据自适应事件触发的条件(2), 可以得到:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{11} & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \bar{\mathbf{E}}_{21} & \bar{\mathbf{E}}_{22} & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{33} & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{44} & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{55} & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{66} & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \bar{\mathbf{E}}_{71} & \bar{\mathbf{E}}_{72} & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{74} & \bar{\mathbf{E}}_{75} & \bar{\mathbf{E}}_{76} & \bar{\mathbf{E}}_{77} & * & * & * & * & * & * & * \\ \bar{\mathbf{E}}_{81} & \bar{\mathbf{E}}_{82} & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{84} & \bar{\mathbf{E}}_{85} & \bar{\mathbf{E}}_{86} & \bar{\mathbf{E}}_{87} & \bar{\mathbf{E}}_{88} & * & * & * & * & * & * \\ \bar{\mathbf{E}}_{91} & \bar{\mathbf{E}}_{92} & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{94} & \bar{\mathbf{E}}_{95} & \bar{\mathbf{E}}_{96} & 0 & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{99} & * & * & * & * & * \\ \bar{\mathbf{E}}_{101} & \bar{\mathbf{E}}_{102} & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{104} & \bar{\mathbf{E}}_{105} & \bar{\mathbf{E}}_{106} & 0 & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{109} & \bar{\mathbf{E}}_{1010} & * & * & * & * \\ \bar{\mathbf{E}}_{111} & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{115} & \bar{\mathbf{E}}_{116} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{1111} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{1212} & * & * \\ 0 & \bar{\mathbf{E}}_{132} & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{136} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{1313} & * \\ 0 & \bar{\mathbf{E}}_{142} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{E}}_{1414} \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} 0 &< -\bar{\mathbf{e}}^T(k) \bar{\mathbf{e}}(k) + \sigma_0 \bar{\mathbf{x}}^T(k) \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ &\quad + \sigma_0 \bar{\mathbf{x}}^T(k) \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\omega}(k) + \sigma_0 \bar{\omega}^T(k) \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ &\quad + \sigma_0 \bar{\omega}^T(k) \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{D}} \bar{\omega}(k) \end{aligned} \quad (31)$$

因此,

$$\bar{J} \leq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{\mathbf{e}}(k) \\ \bar{\omega}(k) \end{bmatrix}^T \Psi^i \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) \\ \bar{\mathbf{e}}(k) \\ \bar{\omega}(k) \end{bmatrix} \quad (32)$$

其中,

$$\Psi^i = \begin{bmatrix} \Psi_{11}^i & * & * \\ \Psi_{21}^i & \Psi_{22}^i & * \\ \Psi_{31}^i & \Psi_{32}^i & \Psi_{33}^i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{11}^i &= \mathbf{A}_{11}^i + \bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}}^i + \beta^2 \bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}}^i, \Psi_{21}^i = \mathbf{A}_{21}^i, \\ \Psi_{22}^i &= \mathbf{A}_{22}^i, \Psi_{32}^i = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{X}^i \bar{\mathbf{C}}^i + \beta^2 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{X}^i \tilde{\mathbf{C}}^i, \\ \Psi_{31}^i &= \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{X}^i \bar{\mathbf{A}}^i + \beta^2 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{X}^i \tilde{\mathbf{A}}^i + \sigma_0 \bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{C}}^i + \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{D}}^i, \\ \Psi_{33}^i &= \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{X}^i \bar{\mathbf{B}}^i + \beta^2 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{X}^i \tilde{\mathbf{B}}^i - \gamma^2 \mathbf{I} \\ &\quad + \sigma_0 \bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}}^i + \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}^i \end{aligned} \quad (33)$$

利用 Schur 引理, 式(17)等于  $\Psi^i$ , 因此  $\Psi^i < 0$ , 从而  $\mathbb{E}\|\mathbf{r}_e(k)\|^2 < \gamma^2 \mathbb{E}\|\bar{\omega}(k)\|^2$  成立, 即系统(8)具有  $H_\infty$  性能.

证毕.

基于定理 1, 下面给出部分模态依赖故障检测器的可解性条件和参数表达形式.

**定理 2** 给定  $\gamma > 0$ , 如果存在正定矩阵  $\mathbf{P}^i$ , 对角矩阵  $\mathbf{V}_2$  及矩阵  $\mathbf{V}_1^i, \mathbf{V}_3^i, \mathbf{W}, \mathbf{M}^i, \mathbf{H}, \mathbf{K}^i$ , 使得

$$\begin{aligned}
\Xi_{11} &= -P_1^i, \Xi_{21} = -P_2^i, \Xi_{22} = -P_3^i, \\
\Xi_{33} &= \Xi_{44} = \Xi_{1111} = \Xi_{1212} = \Xi_{136} = \Xi_{1313} = \Xi_{1414} = -I, \\
\Xi_{55} &= \Xi_{66} = -\gamma^2 I, \Xi_{111} = \sqrt{\sigma_0} C^i, \\
\Xi_{71} &= V_1^i A^i + H C^i + \alpha K^i C^i - \alpha H C^i, \\
\Xi_{72} &= \Xi_{82} = W + \alpha M^i - \alpha W, \\
\Xi_{74} &= \Xi_{84} = H + \alpha K^i - \alpha H, \\
\Xi_{75} &= V_1^i B^i + H D^i + \alpha K^i D^i - \alpha H D^i, \\
\Xi_{76} &= V_1^i L^i + H G^i + \alpha K^i G^i - \alpha H G^i, \\
\Xi_{77} &= \Xi_{99} = X_1^i - V_1^i - V_1^{iT}, \Xi_{115} = \sqrt{\sigma_0} D^i, \\
\Xi_{81} &= V_3^i A^i + H C^i + \alpha K^i C^i - \alpha H C^i, \\
\Xi_{85} &= V_3^i B^i + H D^i + \alpha K^i D^i - \alpha H D^i, \\
\Xi_{86} &= V_3^i L^i + H G^i + \alpha K^i G^i - \alpha H G^i, \\
\Xi_{87} &= \Xi_{109} = X_2^i - V_3^i - V_2^T, \Xi_{116} = \sqrt{\sigma_0} G^i, \\
\Xi_{88} &= \Xi_{1010} = X_3^i - V_2 - V_2^T, \\
\Xi_{91} &= \Xi_{101} = \beta K^i C^i - \beta H C^i, \\
\Xi_{92} &= \Xi_{102} = \beta M^i - \beta W, \Xi_{132} = \hat{C} + \alpha \hat{C}^i - \alpha \hat{C}, \\
\Xi_{94} &= \Xi_{104} = \beta K^i - \beta H, \Xi_{142} = \beta \hat{C}^i - \beta \hat{C}, \\
\Xi_{95} &= \Xi_{105} = \beta K^i D^i - \beta H D^i, \\
\Xi_{96} &= \Xi_{106} = \beta K^i G^i - \beta H G^i
\end{aligned} \tag{35}$$

那么系统(8)是均方指数稳定并且具有  $H_\infty$  性能,且故障检测器的参数可以表示为

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= V_2^{-1} W, \hat{A}^i = V_2^{-1} M^i, \\
\hat{B} &= V_2^{-1} H, \hat{B}^i = V_2^{-1} K^i
\end{aligned} \tag{36}$$

证明

定义  $X^i = \sum_{j=1}^n \pi_{ij} P^j, i=1, 2$ .

$$\begin{aligned}
V^i &= \begin{bmatrix} V_1^i & V_2 \\ V_3 & V_2 \end{bmatrix}, V^{iT} = \begin{bmatrix} V_1^{iT} & V_3^{iT} \\ V_2^T & V_2^T \end{bmatrix}, \\
P^i &= \begin{bmatrix} P_1^i & * \\ P_2^i & P_3^i \end{bmatrix}, X^i = \begin{bmatrix} X_1^i & * \\ X_2^i & X_3^i \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{37}$$

根据引理2,定理1等价于下述不等式.

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11}^i & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \Omega_{22}^i & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \Omega_{33}^i & * & * & * & * & * \\ \Omega_{41}^i & \Omega_{42}^i & \Omega_{43}^i & \Omega_{44}^i & * & * & * & * \\ \Omega_{51}^i & \Omega_{52}^i & \Omega_{53}^i & 0 & \Omega_{55}^i & * & * & * \\ \Omega_{61}^i & 0 & \Omega_{63}^i & 0 & 0 & \Omega_{66}^i & * & * \\ \Omega_{71}^i & 0 & \Omega_{73}^i & 0 & 0 & 0 & \Omega_{77}^i & * \\ \Omega_{81}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega_{88}^i \end{bmatrix} < 0 \tag{38}$$

其中,

$$\begin{aligned}
\Omega_{11}^i &= -P^i, \Omega_{22}^i = \Omega_{66}^i = \Omega_{77}^i = \Omega_{88}^i = -I, \\
\Omega_{33}^i &= -\gamma^2 I, \Omega_{41}^i = V^i \hat{A}^i, \Omega_{42}^i = V^i \hat{C}^i, \\
\Omega_{43}^i &= V^i \hat{B}^i, \Omega_{44}^i = \Omega_{55}^i = X^i - V^i - V^{iT}, \\
\Omega_{51}^i &= \beta V^i \tilde{A}^i, \Omega_{52}^i = \beta V^i \tilde{C}^i, \Omega_{53}^i = \beta V^i \tilde{B}^i,
\end{aligned}$$

$$\Omega_{61}^i = \sqrt{\sigma_0} \tilde{C}^i, \Omega_{63}^i = \sqrt{\sigma_0} \tilde{D}^i, \Omega_{71}^i = \tilde{D}^i, \tag{39}$$

$$\Omega_{73}^i = \tilde{F}, \Omega_{81}^i = \beta \tilde{D}^i$$

通过式(9),可以计算出:

$$V^i \hat{A}^i = \begin{bmatrix} V_1^i A^i + V_2 \hat{B} C^i & V_2 \hat{A} + \alpha V_2 \hat{A}^i \\ +\alpha V_2 \hat{B}^i C^i - \alpha V_2 \hat{B} C^i & -\alpha V_2 \hat{A} \\ V_3^i A^i + V_2 \hat{B} C^i & V_2 \hat{A} + \alpha V_2 \hat{A}^i \\ +\alpha V_2 \hat{B}^i C^i - \alpha V_2 \hat{B} C^i & -\alpha V_2 \hat{A} \end{bmatrix},$$

$$V^i \hat{B}^i = \begin{bmatrix} V_1^i B^i + V_2 \hat{B} D^i & V_1^i L^i + V_2 \hat{B} G^i \\ +\alpha V_2 \hat{B}^i D^i - \alpha V_2 \hat{B} D^i & +\alpha V_2 \hat{B}^i G^i - \alpha V_2 \hat{B} G^i \\ V_3^i B^i + V_2 \hat{B} D^i & V_3^i L^i + V_2 \hat{B} G^i \\ +\alpha V_2 \hat{B}^i D^i - \alpha V_2 \hat{B} D^i & +\alpha V_2 \hat{B}^i G^i - \alpha V_2 \hat{B} G^i \end{bmatrix},$$

$$V^i \tilde{A}^i = \begin{bmatrix} V_2 \hat{B}^i C^i - V_2 \hat{B} C^i & V_2 \hat{A}^i - V_2 \hat{A} \\ V_2 \hat{B}^i C^i - V_2 \hat{B} C^i & V_2 \hat{A}^i - V_2 \hat{A} \end{bmatrix},$$

$$V^i \tilde{B}^i = \begin{bmatrix} V_2 \hat{B}^i D^i - V_2 \hat{B} D^i & V_2 \hat{B}^i G^i - V_2 \hat{B} G^i \\ V_2 \hat{B}^i D^i - V_2 \hat{B} D^i & V_2 \hat{B}^i G^i - V_2 \hat{B} G^i \end{bmatrix},$$

$$V^i \tilde{C}^i = \begin{bmatrix} 0 & V_2 \hat{B} + \alpha V_2 \hat{B}^i - \alpha V_2 \hat{B} \\ 0 & V_2 \hat{B} + \alpha V_2 \hat{B}^i - \alpha V_2 \hat{B} \end{bmatrix},$$

$$V^i \tilde{D}^i = \begin{bmatrix} 0 & V_2 \hat{B}^i - V_2 \hat{B} \\ 0 & V_2 \hat{B}^i - V_2 \hat{B} \end{bmatrix},$$

$$X^i - V^i - V^{iT} = \begin{bmatrix} X_1^i - V_1^i - V_1^{iT} & X_2^{iT} - V_2 - V_3^{iT} \\ X_2^i - V_3^i - V_2^T & X_3^i - V_2 - V_2^T \end{bmatrix} \tag{40}$$

引入新变量  $W = V_2 \hat{A}, M^i = V_2 \hat{A}^i, H = V_2 \hat{B}, K^i = V_2 \hat{B}^i$  带入式(38)中,即可得到定理2.

证毕.

**注3** 在不等式(17)中,Lyapunov矩阵  $X^i$  和滤波器增益矩阵是耦合的,这为滤波器参数的求解带来困难.相比于不等式(17),不等式(38)的优势在于引入了额外的松弛变量  $V^i$ ,以消除 Lyapunov 矩阵  $X^i$  和滤波器增益矩阵之间的乘积项,这为最终获得期望的故障检测滤波器(5)创造了条件.

**注4** 定理2给出了存在故障检测滤波器的 LMI 条件和由式(5)所示的故障检测器参数设计方法,通过 MATLAB 工具可以得到所需的故障检测滤波器,再利用式(11)可计算出阈值,由式(12)就可以容易检测出系统对象是否发生故障.

在很多实际应用中,性能指标  $\gamma$  是一个系统的重要指标,为了获得最小  $H_\infty$  性能指标  $\gamma$ ,线性矩阵不等式(34)转化为如下凸优化问题的求解:

$$\begin{aligned}
& \min \\
& P^i, V_1^i, V_2, V_3^i, W, M^i, H, K^i \bar{\gamma} \\
& \text{s. t. 式(34)}
\end{aligned}$$

其中,  $\bar{\gamma} = \gamma^2$ ,由于系统模态可以概率的形式获得,所以

部分模态依赖的故障检测滤波器在工程应用中更加实用.

### 4 例子仿真

考虑式(1)所示的离散系统具有如下参数:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.3 \\ 0.1 & -0.7 \end{bmatrix}, B^1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.7 \end{bmatrix}, L^1 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$C^1 = [0.9 \quad -0.4], D^1 = 0.8, G^1 = 0.2,$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.1 & -0.4 \end{bmatrix}, B^2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}, L^2 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.7 \end{bmatrix},$$

$$C^2 = [0.7 \quad 0.2], D^2 = 0.3, G^2 = 0.2.$$

其状态转移概率矩阵为

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

假设初始时间  $k_0 = 0$ , 时间宽度  $S = 80$ , 如图 1 所示, 系统的干扰输入  $\omega(k)$  为幅值小于 0.2 的随机信号, 故障信号  $f(k)$  为

$$f(k) = \begin{cases} 2, & 20 \leq k \leq 40 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

当  $\alpha = 0.7$  时, 利用 MATLAB 的 LMI 工具箱得到滤波器参数如下:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -0.234 & 0.133 \\ -1.687 & 0.172 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} -0.665 \\ -1.489 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C} = [-0.226 \quad 0.136],$$

$$\hat{A}^1 = \begin{bmatrix} -0.234 & 0.133 \\ -1.687 & 0.172 \end{bmatrix}, \hat{B}^1 = \begin{bmatrix} -0.665 \\ -1.489 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}^1 = [-0.443 \quad 0.301],$$

$$\hat{A}^2 = \begin{bmatrix} -0.087 & 0.033 \\ -0.597 & -0.536 \end{bmatrix}, \hat{B}^2 = \begin{bmatrix} -0.866 \\ -0.801 \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}^2 = [-0.210 \quad -0.080], \bar{\gamma} = 1.3154.$$

图 2 为基于自适应事件触发机制系统输出释放时间和释放时间间隔的关系, 图 3 为本文所设计的故障检

测滤波器的残差信号  $r(k)$ , 图 4 中实线和虚线分别表示无故障和有故障时残差评价函数  $J(r, k)$  的曲线.

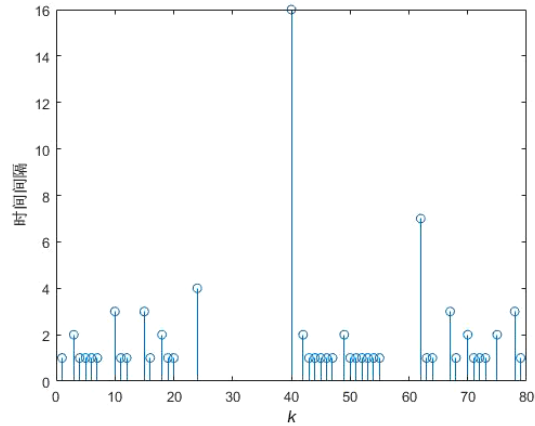


图 2 事件触发释放时间和时间间隔的关系图

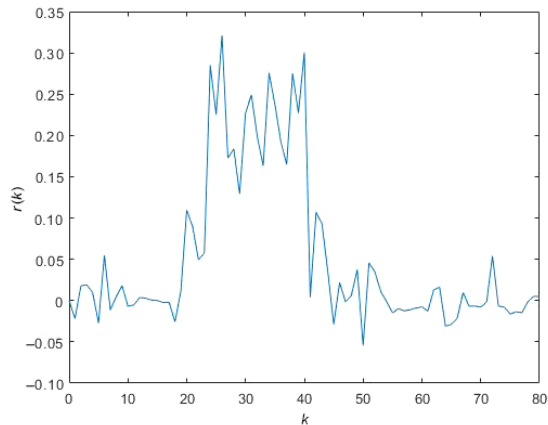


图 3 残差信号  $r(k)$

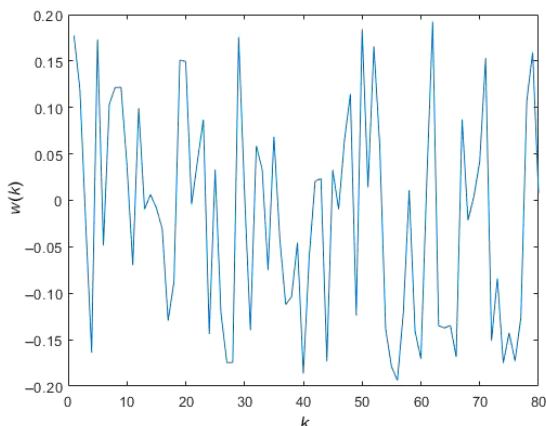


图 1 外部干扰  $\omega(k)$

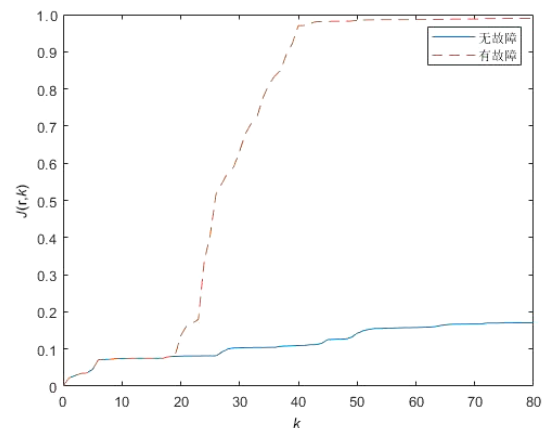


图 4 残差评价函数  $J(r, k)$

从图中可以看出, 当故障信号发生时, 残差信号和残差评价函数均有明显变化, 根据构造的残差评价函数和评价阈值, 我们可以得到阈值为  $J_{th} =$

$$\sup_{\omega(k) \in I_2, f(k)=0} J(r, k) = 0.1706.$$

由仿真结果可得,  $J(r, 24) = 0.1795 > J_{th}$ . 由此可得在故障发生之后 4 个时间周期, 故障检测滤波器便能检测出故障.

上述证明了本文所设计的故障检测滤波器的有效性, 下面给出不同的  $\alpha$  值对滤波器的性能影响以及相应的故障检测时间, 如表 1 所示.

表 1 不同的参数  $\alpha$  值下的  $\bar{y}$  值及故障检测时间

$\alpha$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\bar{y}$	1.480 0	1.392 0	1.340 8	1.321 0	1.311 2	1.305 3
故障检测时间	8	7	6	5	3	2

表 1 的结果表明, 在相同的状态转移概率矩阵条件下,  $\alpha$  值越大, 则  $\bar{y}$  值越小, 所需的故障检测时间也越少, 即故障检测滤波器获得的系统模式越多, 其性能会更好.

为了证明所提出自适应事件触发机制的优势, 我们将其与时间触发机制、固定阈值事件触发机制进行了比较. 首先, 定义通信率为事件触发次数与采样次数的比值.

给定  $\alpha=0.7$  和初始事件触发参数  $\sigma(0)=0.8$ , 通过求解可以得到这三种触发机制的故障检测滤波器相关参数. 表 2 为三种触发机制下的通信率对比以及检测时间对比. 可以看出, 自适应事件触发和固定阈值事件触发最终的数据传输量相似, 且低于时间触发机制下的数据传输量. 这也就意味着在引入事件触发机制后, 可以显著地节约通信资源, 降低通信负担. 另一方面, 自适应事件触发机制所需的故障检测时间略高于时间触发机制所需的故障检测时间, 且两者均低于固定阈值事件触发机制的检测时间. 也就是说, 自适应事件触发机制以略微增加通信资源消耗为代价, 实现了更快的故障检测. 因此, 自适应事件触发机制可以很好地权衡通信资源和滤波性能.

表 2 不同触发机制下的通信率及故障检测时间

触发机制	时间触发	自适应事件触发	固定阈值事件触发
通信率	1	0.512 5	0.45
故障检测时间	3	4	6

本文与其他现有工作相比: 一方面, 采用了部分模式依赖的故障检测滤波器, 即当其系统跳变模式在传输过程中存在丢失时, 也能够克服信息丢失带来的缺陷, 有效检测出故障, 与文献[16]、文献[20]中采用的模式依赖的故障检测滤波器相比, 更具有现实意义; 另一方面, 本文是采用 Bernoulli 随机变量去描述滤波器是否接收到系统模式, 在文献[21]中则是采用两个马

尔科夫链, 构造出一个异步的滤波器, 相比较而言, 这种异步的方法会随着滤波器跳变模式的增加而导致更高的复杂度.

## 5 结论

本文研究了基于自适应事件触发机制的离散马尔科夫跳变系统的故障检测滤波器设计问题. Bernoulli 随机变量描述了系统模式的可用性, 所设计故障检测滤波器具有部分模式依赖性, 其性能包含模式独立和模式依赖两种情况. 为了减少通信负担, 引入了一种自适应事件触发机制来平衡网络的通信频率. 应用 LMI 给出滤波器存在的充分条件, 并得到滤波器参数的表达形式, 所设计的滤波器能够使得残差误差系统均方指数稳定, 且满足  $H_\infty$  性能指标, 通过仿真例子证明了所提出的故障检测滤波器设计有效.

## 参考文献

- [1] 张伟, 周维佳, 刘晓源. 基于扩展 LLE 方法的非线性系统故障诊断研究[J]. 电子学报, 2015, 43(9): 1810-1815.  
ZHANG W, ZHOU W J, LIU X Y. An improved LLE-based approach to fault diagnosis of nonlinear system[J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(9): 1810-1815. (in Chinese)
- [2] 赵洪山, 张健平, 王桂兰, 等. 基于状态估计的风电机组液压变桨距系统故障检测[J]. 电力系统自动化, 2016, 40(22): 100-104.  
ZHAO H S, ZHANG J P, WANG G L, et al. State estimation based fault detection of hydraulic variable-pitch system for wind turbines[J]. Automation of Electric Power Systems, 2016, 40(22): 100-104. (in Chinese)
- [3] 刘金平, 王杰, 唐朝晖, 等. 基于自适应滑窗递归稀疏主成分分析的工业过程故障监测[J]. 电子学报, 2020, 48(9): 1795-1803.  
LIU J P, WANG J, TANG Z H, et al. Industrial process fault monitoring based on adaptive sliding window-recursive sparse principal component analysis[J]. Acta Electronica Sinica, 2020, 48(9): 1795-1803. (in Chinese)
- [4] 阮玉斌, 王武, 杨富文. 具有测量数据丢失的网络化系统的故障检测滤波[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(3): 291-295.  
RUAN Y B, WANG W, YANG F W. Fault detection filter for networked systems with missing measurements[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(3): 291-295. (in Chinese)
- [5] 伍友利, 方洋旺, 董福安, 等. 一类 Markov 跳变系统鲁棒方差控制[J]. 电子学报, 2010, 38(6): 1438-1442.

- WU Y L, FANG Y W, DONG F A, et al. Robust variance-constrained control for a class of Markov jumping system [J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(6): 1438-1442. (in Chinese)
- [6] CAO Z R, NIU Y G, SONG J. Finite-time sliding-mode control of Markovian jump cyber-physical systems against randomly occurring injection attacks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(3): 1264-1271.
- [7] 周卫东, 刘萌萌. 带丢包 Markov 切换线性系统的状态估计问题研究[J]. 电子学报, 2016, 44(3): 646-652.
- ZHOU W D, LIU M M. State estimation for jump Markov linear systems with packet dropouts[J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(3): 646-652. (in Chinese)
- [8] WU H N, CAI K Y. Mode-independent robust stabilization for uncertain Markovian jump nonlinear systems via fuzzy control[J]. IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics- Part B: Cybernetics, 2006, 36(3): 509-519.
- [9] OLIVEIRA R C L F, VARGAS A N, VAL J B R D, et al. Mode-independent  $H_2$ -control of a DC motor modeled as a Markov jump linear system[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2014, 22(5): 1915-1919.
- [10] COSTA O L V, BENITES G R A M. Robust mode-independent filtering for discrete-time Markov jump linear systems with multiplicative noises[J]. International Journal of Control, 2013, 86(5): 779-793.
- [11] 赖永波, 陆国平. 离散奇异跳变系统的网络化  $H_\infty$  鲁棒滤波[J]. 控制工程, 2015, 22(6): 1186-1191.
- LAI Y B, LU G P. Networked robust  $H_\infty$  filtering for discrete singular jump systems[J]. Control Engineering of China, 2015, 22(6): 1186-1191.
- [12] 王国良, 孙广斌, 薄海英. 广义马尔科夫跳变系统的部分模态依赖观测器设计[J]. 控制与决策, 2015, 30(4): 733-738.
- WANG G L, SUN G J, BO H Y. Partially mode-dependent observer design of singular Markovian jump systems [J]. Control and Decision, 2015, 30(4): 733-738.
- [13] HUA M G, ZHENG D D, DENG F Q, et al.  $H_\infty$  filtering for nonhomogeneous Markovian jump repeated scalar nonlinear systems with multiplicative noises and partially mode-dependent characterization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man & Cybernetics: Systems, 2019, PP(99): 1-13.
- [14] LI H Y, CHEN Z R, WU L G, et al. Event-triggered fault detection of nonlinear networked systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(4): 1041-1052.
- [15] BU X Y, DONG H L, HAN F, et al. Event-triggered distributed filtering over sensor networks with deception attacks and partial measurements[J]. International Journal of General Systems, 2018, 47(5): 522-534.
- [16] QIAO B N, SU X J, JIA R F, et al. Event-triggered fault detection filtering for discrete-time Markovian jump systems[J]. Signal Processing, 2018, 152(11): 384-391.
- [17] ZHANG H, WANG Z P, YAN H C, et al. Adaptive event-triggered transmission scheme and  $H_\infty$  filtering co-design over a filtering network with switching topology[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(12): 4296-4307.
- [18] YANG F W, WANG Z D, Hung Y S, et al.  $H_\infty$  control for networked systems with random communication delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(3): 511-518.
- [19] OLIVEIRA M C D, BERNUSSOU J, GEROMEL J C. A new discrete-time robust stability condition[J]. Systems & Control Letters, 1999, 37: 261-265
- [20] ZHONG M, YE H, SHI P, et al. Fault detection for Markovian jump systems[J]. IEE Proceedings of Control Theory and Applications, 2005, 152(4): 397-402.
- [21] WU Z G, SHI P, SU H Y, et al. Asynchronous  $l_2-l_\infty$  filtering for discrete-time stochastic Markov jump systems with randomly occurred sensor nonlinearities[J]. Automatica, 2014, 50(1): 180-186.

#### 作者简介



张志涵 女, 1995年生, 山东菏泽人. 硕士研究生. 主要研究方向为故障检测、容错控制.



朱凤增 男, 1992年生, 山东临沂人. 博士研究生. 主要研究方向为网络化动态系统状态估计、故障诊断、容错控制.



彭力(通讯作者) 男, 1967年生, 河北唐山人. 教授, 博士生导师. 主要研究方向为复杂系统控制与优化、视觉物联网.

E-mail: pengli@jiangnan.edu.cn