

# 阵元失效条件下的高精度 DOA 估计方法

孙兵<sup>1</sup>, 吴晨曦<sup>1</sup>, 阮怀林<sup>1</sup>, 叶文强<sup>2</sup>, 苏宝桐<sup>3</sup>

(1. 国防科技大学电子对抗学院, 安徽合肥 230037; 2. 解放军 63768 部队, 陕西西安 710043;  
3. 解放军 65655 部队, 内蒙古赤峰 024000)

**摘要:** 为解决波达方向 (Direction Of Arrival, DOA) 估计方法在阵元失效条件下性能下降甚至失效的问题, 本文提出一种基于 Toeplitz 协方差矩阵重构的 DOA 估计方法. 首先, 提出了一种失效阵元检测方法, 并根据阵列的鲁棒性将失效阵元分为冗余阵元失效和非冗余阵元失效两种情况. 然后, 分别针对两种失效场景提出相应 DOA 估计方法: 一是冗余阵元失效, 利用阵列冗余度, 结合差联合阵列对失效阵元进行填充; 二是非冗余阵元失效, 利用阵列冗余度进行填充后仍存在空洞, 结合矩阵填充理论, 用迹范数代替秩范数进行凸松弛以恢复协方差矩阵, 进而实现对虚拟阵元空洞的填充, 恢复阵列自由度. 相对于稀疏类算法, 有效消除了模型失配的影响. 最后, 基于子空间方法进行 DOA 估计. 理论和仿真结果表明, 相对于现有方法, 本文方法有效避免了阵元失效的影响, 提高了估计精度.

**关键词:** 波达方向; 阵元失效; 阵元诊断; 矩阵重构; 冗余度

**中图分类号:** TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2020)09-1688-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2020.09.004

## High Accuracy DOA Estimation Method with Array Sensor Failure

SUN Bing<sup>1</sup>, WU Chen-xi<sup>1</sup>, RUAN Huai-lin<sup>1</sup>, YE Wen-qiang<sup>2</sup>, SU Bao-tong<sup>3</sup>

(1. College of Electronic Engineering, National University of Defense Technology, Hefei, Anhui 230037, China;  
2. PLA Troop 63768, Xi'an, Shaanxi 710043, China; 3. PLA Troop 65655, Chifeng, Inner Mongolia 024000, China)

**Abstract:** Array sensors failure can significantly deteriorate the performance of direction of arrival (DOA) estimation. To address this problem, an algorithm via covariance matrix reconstruction is proposed. Firstly, we devise a diagnosis method to detect the failure sensors. Based on the robustness of the array, the sensor failure scenarios are divided into redundant sensor failures and non-redundant sensor failures. Then, the corresponding DOA estimation method is adopted for two failure scenarios. For redundant sensor failures, the virtual sensors of the difference coarray can be used to occupy the positions of the failed physical sensors by utilizing the array redundancy. For non-redundant sensor failures, the virtual sensors in the difference coarray will have holes. Employing the matrix completion theory, we use trace norm instead of the rank norm for convex relaxation to recover the matrix, thereby realizing the filling of the virtual sensor holes in the difference coarray and restoring the DOFs. Compared with the sparsity-based methods, the proposed method can eliminate the effect of the off-grid. Finally, the subspace method is employed for DOA estimation. Theoretical analysis and simulation results show that the proposed methods can alleviate the effect of array sensor failure and improve the estimation performance.

**Key words:** direction of arrival; sensor failure; sensor diagnosis; matrix reconstruction; redundant

## 1 引言

波达方向 (Direction Of Arrival, DOA) 是阵列信号处理领域的核心研究内容之一. 目前各类 DOA 估计算法一般都建立在阵元没有失效的情况下, 特别是一些算

法对于阵元位置分布有很高要求<sup>[1-3]</sup>. 近期, 文献[4, 5]对阵列的鲁棒性展开了研究, 研究表明, 这类算法的特性易收到阵列故障的影响, 一旦阵元失效, 自由度急剧下降甚至测向失效. 文献[4, 5]引入  $k$ -必要阵元和  $k$ -必要阵列族来对失效阵元进行分类, 但是当  $k$  取不同值时

情况相对复杂. 本文将失效情况分为冗余阵元失效和非冗余阵元失效.

对于阵元失效条件下的 DOA 估计问题, 文献[6]提出了一种基于神经网络的阵元失效 DOA 估计方法, 通过训练数据模型来恢复缺失数据, 但此方法过于依赖先验知识. 文献[7]提出了阵元失效检测方法, 运用迭代求解, 但在矩阵病态时收敛速度较慢. 文献[8]通过仅重新优化未失效阵元的幅度激励来恢复阵列的波束, 但是该方法仅改变未失效阵元的权系数, 并不能恢复阵列的自由度. 文献[9]提出了一种基于差分阵列的数据协方差矩阵重构方法, 但该方法仅适用于特定位置的阵元失效场景. 文献[10]利用差联合阵虚拟阵元代替损坏阵元, 但该方法仅解决了冗余阵元失效情况的恢复问题, 对于非冗余阵元失效情况并不适用.

针对上述问题, 本文提出了一种阵元失效检测方法, 并将失效情况分为两类. 若冗余阵元失效, 基于差联合阵列对失效阵元进行填充, 利用连续的差联合阵虚拟阵元结合 MUSIC 算法进行 DOA 估计, 即差联合 MUSIC 方法 (CO-MUSIC). 若非冗余阵元失效, 差联合阵的虚拟阵元存在空洞<sup>[11,12]</sup>, 这影响了 CO-MUSIC 的适用性, 虽然也有其它稀疏类方法可以适用于非冗余阵元失效场景, 如文献[13]中的 CO-LASSO 方法, 但是该类方法计算量大, 另外需要对连续角度域进行离散化处理, 存在模型失配问题. 针对非冗余阵元失效, 本文引入映射矩阵, 结合矩阵填充理论<sup>[14-16]</sup>, 用迹范数代替秩范数进行凸松弛实现 Toeplitz 协方差矩阵重构, 进而完成虚拟阵元空洞的填充, 恢复阵列自由度. 相对于稀疏类算法, 有效消除了模型失配的影响. 另外, 本文方法对于冗余阵元失效同样适用, 在利用阵列冗余度填充失效阵元位置后, 进一步使用协方差矩阵重构, 虽没有增加虚拟阵元数目, 但在重构过程中消除了部分噪声的影响, 进而较 CO-MUSIC 具有更高的估计精度.

## 2 阵元失效诊断及分类

以阵元数为  $N$  的均匀线阵为例, 间距  $d = \lambda/2$ ,  $\lambda$  是信号波长. 假设有  $K$  个相互独立的远场窄带信号, 其到达角为:  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k]$ , 则阵列输出数据可表示为:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (1)$$

其中  $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T$  为阵列的输出数据,  $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T$  为  $K$  个人射信号,  $\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)]^T$  为高斯白噪声,  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_k)]$  为流型矩阵,  $\mathbf{a}(\theta_k) = [1, e^{-j\frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta_k}, \dots, e^{-j\frac{2(N-1)\pi d}{\lambda} \sin\theta_k}]^T$  为导向矢量.

输出数据的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}\{\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)\}$$

$$= \mathbf{A} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_k^2 \end{bmatrix} \mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (2)$$

其中  $\sigma_k^2$  为第  $k$  个人射信号的功率,  $\sigma_n^2$  为背景噪声功率.

阵元失效, 即认为不能从失效阵元获取任何有用信息. 设第  $i$  个阵元失效, 则将流型矩阵  $\mathbf{A}$  第  $i$  行元素置换为  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{R}$  的第  $i$  行元素和第  $i$  列元素除  $R(i, i)$  以外全部为  $0$ .

假设第 2 个阵元失效, 则  $\mathbf{A}$  的第 2 行为  $0$ , 即:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ e^{j2\theta_1} & e^{j2\theta_2} & e^{j2\theta_3} & \dots & e^{j2\theta_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(N-1)\theta_1} & e^{j(N-1)\theta_2} & e^{j(N-1)\theta_3} & \dots & e^{j(N-1)\theta_k} \end{bmatrix} \quad (3)$$

根据式(2)可得协方差矩阵:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 + \sigma_n^2 & 0 & \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 e^{-j2\theta_k} & \dots & \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 e^{-j(N-1)\theta_k} \\ 0 & \sigma_n^2 & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 e^{j2\theta_k} & 0 & \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 + \sigma_n^2 & \dots & \sigma_k^2 e^{-j(N-3)\theta_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 e^{j(N-1)\theta_k} & 0 & \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 e^{j(N-3)\theta_k} & \dots & \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 + \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

由式(4)可以看出, 理想情况下, 只需判断  $\mathbf{R}$  是否存在唯一非  $0$  值的行和列, 即可确定有无阵元失效及失效位置. 但实际情况中, 采样噪声并非理想的高斯白噪声, 噪声协方差矩阵并非对角阵, 且信号和噪声很难完全不相关, 即使存在失效阵元, 协方差矩阵中不会出现大量的  $0$ , 而是均为非  $0$  值. 因而需要设计算法来检测失效阵元及其位置.

阵元失效情况下, 实际协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$  与理想协方差矩阵  $\mathbf{R}$  相比,  $\hat{\mathbf{R}}$  中  $0$  值位置被信号与噪声互相关项和噪声互相关项替代, 其所在行绝对值之和明显小于其它未失效阵元对应的行绝对值之和的均值, 列也是一样. 因此可以通过下式对阵元是否失效进行判断:

$$\begin{cases} r(i, :) \leq \alpha \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r(i, :) \\ r(:, j) \leq \alpha \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r(:, j) \end{cases} \quad (5)$$

其中  $r(i, :) = \sum_{j=1}^N |R(i, j)|$  为  $\hat{\mathbf{R}}$  各行绝对值之和,

$r(:, j) = \sum_{i=1}^N |R(i, j)|$  为  $\hat{\mathbf{R}}$  各列绝对值之和,  $\alpha$  为检测

门限因子,经验取值为 $\alpha=0.5$ .当 $r(i,:)$ 和 $r(:,j)$ 同时满足式(5),且 $i=j$ ,则第 $i$ 个阵元失效.

为了对失效情况进行分类,这里首先给出差联合阵概念,定义如下集合:

$$D = \{d_n - d_{n'}, d_n, d_{n'} \in C \quad (6)$$

其中, $C$ 为阵列各个阵元位置构成的集合, $d_n, d_{n'}$ 为不同阵元的位置, $D$ 为各阵元位置之差构成的集合. $D$ 中存在相同的元素,定义集合中所有不相同位置差构成的集合为 $D_u$ ,集合 $D_u$ 中的位置差 $d_u$ 在集合 $D$ 中出现的次数定义为权重系数 $\omega_d(d_u)$ .

已知失效阵元位置,对未失效阵元位置运用式(6)得到集合 $D$ ,再去掉相同位置差得到集合 $D_u$ ,最终得到阵元失效情况下的连续虚拟阵元个数 $Q$ .完好均匀线阵的连续虚拟阵元个数为 $2N-1$ .如果 $Q=2N-1$ ,判断为冗余阵元失效,否则为非冗余阵元失效.

为了简化讨论,文中假设:若失效阵元在阵列两端的位置,可恢复的最大自由度为除去端点阵元后余下阵元的最大自由度,不再对失效阵元在端点的情况展开分析.以10阵元均匀线阵为例,图1是不同失效场景下物理阵元位置和差联合阵虚拟阵元位置,物理阵元用实心圆表示,虚拟阵元用空心圆表示,失效阵元和虚拟阵元空洞用叉号表示.

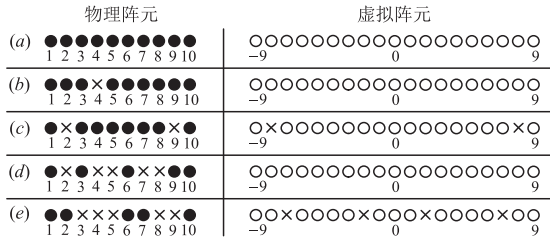


图1 不同失效场景下物理阵元位置和差联合阵虚拟阵元位置

图1中,(a)是没有阵元失效的场景,(b)、(d)是冗余阵元失效场景,(c)、(e)是非冗余阵元失效场景,可以看出,冗余阵元失效不会改变差联合阵.而非冗余阵元失效,差联合阵的虚拟阵元出现空洞.

### 3 不同阵元失效情况下的 DOA 估计方法

#### 3.1 冗余阵元失效

以阵元数为 $N$ 的均匀线阵为例,输出信号的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 & \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{-jG} & \cdots & \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{-jP} \\ \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{jG} & \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 & \cdots & \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{-jQ} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{jP} & \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{jQ} & \cdots & \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \end{bmatrix} + \sigma_n^2 \mathbf{I}$$

$$= \begin{bmatrix} R(0) & R(-1) & \cdots & R(-(N-1)) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(-(N-2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(N-1) & R(N-2) & \cdots & R(0) \end{bmatrix} + \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (7)$$

其中 $G = \pi \sin \theta_k$ ;  $P = \pi(N-1) \sin \theta_k$ ;  $Q = \pi(N-2) \sin \theta_k$ ;  $\{R(d_u) | d_u = -(N-1)d, \dots, (N-1)d\}$ 表示不同的波程差.

根据式(6)的定义,可以得到差联合阵各虚拟阵元位置表示为:

$$D_u = \{-(N-1)d, \dots, (N-1)d\} \quad (8)$$

由式(7)和式(8)可知,差联合阵表示了该阵列所有阵元位置之差,各阵元位置差与协方差矩阵得到的波程差存在对应关系.

考虑到实际应用中信噪比和快拍数对输出数据协方差矩阵影响,同一波程差对应的各个协方差矩阵元素不完全相等,因此进行平均运算:

$$\hat{R}(d_u) = \frac{1}{\omega_d(d_u)} \sum_{i=1}^{\omega_d(d_u)} R_i(d_u) \quad (9)$$

其中 $R_i(d_u)$ 表示同一波程差对应的第 $i$ 个协方差矩阵元素.

假设存在阵元失效,未失效阵元数为 $N_1$ ,此时输出数据的协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 是 $N_1 \times N_1$ 的矩阵.通过差联合运算,可以得到连续虚拟阵元个数为 $Q$ ,根据波程差与差联合阵列一一对应的特性,对协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 进行扩展构成维数为 $\frac{Q+1}{2} \times \frac{Q+1}{2}$ 的Toeplitz矩阵 $\mathbf{R}_T$ ,其元素为:

$$R_T(i, j) = \hat{R}((i-j)d) \quad (10)$$

对于冗余阵元失效, $Q=2N-1$ ,则 $\mathbf{R}_T$ 维数为 $N \times N$ ,结合MUSIC算法进行DOA估计.

#### 3.2 非冗余阵元失效

假设存在非冗余阵元失效,未失效的阵元数目为 $N_2$ ,此时输出数据的协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 是 $N_2 \times N_2$ 矩阵.为了恢复自由度,将协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 进行扩展构成一个 $N \times N$ 的Toeplitz矩阵 $\mathbf{R}_T$ :

$$R_T(i, j) = \begin{cases} \hat{R}(d_u), & \text{if } (i-j)d = d_u \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

与冗余阵元失效不同,非冗余阵元失效得到的 $D_u$ 中元素不是连续的,存在空洞,得到的 $\mathbf{R}_T$ 某些位置元素为零.如果能将零元素的位置进行有效填充,则能得到一个扩展孔径的虚拟线阵.

实际应用中,用 $L$ 快拍的采样协方差矩阵对 $\mathbf{R}$ 进行等效:

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(t_l) \mathbf{X}^H(t_l) \quad (12)$$

因此, $\mathbf{R}_T$ 的等效值 $\hat{\mathbf{R}}_T$ 可以由 $\hat{\mathbf{R}}$ 扩展得到.由于信号是

稀疏的,因此  $\hat{\mathbf{R}}_T$  是低秩的,基于低秩矩阵恢复理论可以对其中的零元素进行填充,从而求解对  $\hat{\mathbf{R}}_T$  进行填充后得到的协方差矩阵  $\mathbf{R}_c$ . 我们通过研究有限快拍下  $\mathbf{R}_c$  和采样协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_T$  之间误差的二阶统计特性来实现  $\mathbf{R}_c$  和  $\hat{\mathbf{R}}_T$  之间的拟合. 利用如下矩阵恢复模型:

$$\min \text{rank}(\mathbf{R}_c), \text{ s. t. } \|\hat{\mathbf{R}}_T^{-\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{R}}_T - \mathbf{R}_c)\hat{\mathbf{R}}_T^{-\frac{1}{2}}\|_F^2 \leq \eta, \mathbf{R}_c \geq 0 \quad (13)$$

其中  $\mathbf{R}_c$  表示重构后的目标矩阵,  $\eta$  表示设定的阈值,但是选取合适  $\eta$  值比较困难. 式(13)优化模型可以进一步转化为:

$$\min \text{rank}(\mathbf{R}_c), \text{ s. t. } \|\hat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}}\text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_T - \mathbf{R}_c)\|_2^2 \leq \eta, \mathbf{R}_c \geq 0 \quad (14)$$

其中  $\hat{\mathbf{W}} = \frac{1}{L}\hat{\mathbf{R}}_T^T \otimes \hat{\mathbf{R}}_T$ . 由于  $\hat{\mathbf{R}}_T$  中的零值元素不提供任何有用信息,我们引入映射矩阵  $\mathbf{P}$ :

$$\min \text{rank}(\mathbf{R}_c), \text{ s. t. } \|\hat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}}\text{vec}(\mathbf{P} \cdot (\hat{\mathbf{R}}_T - \mathbf{R}_c))\|_2^2 \leq \eta, \mathbf{R}_c \geq 0 \quad (15)$$

其中  $\mathbf{P}$  是映射矩阵,具体表示为:

$$P(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{if } i - j = d_u \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

引入  $\mathbf{P}$  后,消除  $(\hat{\mathbf{R}}_T - \mathbf{R}_c)$  的运算结果中原本零值位置对估计结果的影响.

直接求解式(15)的矩阵秩最小化问题是 NP-hard 问题. 为了避免非凸性,利用半正定矩阵的迹范数对秩范数进行凸松弛. 即用  $\text{tr}(\mathbf{R}_c)$  代替  $\text{rank}(\mathbf{R}_c)$ .  $\text{tr}(\mathbf{R}_c)$  表示目标矩阵  $\mathbf{R}_c$  的迹. 则式(15)的进一步表示为:

$$\min \text{tr}(\mathbf{R}_c), \text{ s. t. } \|\hat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}}\text{vec}(\mathbf{P} \cdot (\hat{\mathbf{R}}_T - \mathbf{R}_c))\|_2^2 \leq \eta, \mathbf{R}_c \geq 0 \quad (17)$$

由文献[17]可知,估计误差  $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{R}}_T - \mathbf{R}_c$  满足渐进正态分布:

$$\text{vec}(\mathbf{E}) \sim \text{AsN}(\mathbf{0}, \mathbf{W}) \quad (18)$$

其中  $\mathbf{W} = \frac{1}{L}\mathbf{R}_T^T \otimes \mathbf{R}_T$ ,  $\mathbf{W}$  可以通过  $\hat{\mathbf{W}} = \frac{1}{L}\hat{\mathbf{R}}_T^T \otimes \hat{\mathbf{R}}_T$  近似估计.

由式(18)可以推出:

$$\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\text{vec}(\mathbf{E}) \sim \text{AsN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{N^2}) \quad (19)$$

则

$$\|\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\text{vec}(\mathbf{E})\|_2^2 \sim \text{As}\chi^2(N^2) \quad (20)$$

其中  $\text{As}\chi^2(N^2)$  表示自由度为  $N^2$  的渐近卡方分布. 这里引入参数  $\mu$ :

$$\|\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\text{vec}(\mathbf{E})\|_2^2 \leq \mu^2 \quad (21)$$

其中  $\mu$  使得真解落入置信区间  $[0, \mu]$  的概率为  $\rho$ ,  $\rho$  一般选取较大值,如  $\rho = 0.99$ .  $\mu$  可以通过 Matlab 软件中求

解卡方分布置信区间的函数  $\mu = \sqrt{\text{chi2inv}(\rho, N^2)}$  计算.

用式(21)代替式(17)的约束条件,转而求解下式优化问题:

$$\min \text{tr}(\mathbf{R}_c), \text{ s. t. } \|\mathbf{W}^{-\frac{1}{2}}\text{vec}(\mathbf{P} \cdot (\hat{\mathbf{R}}_T - \mathbf{R}_c))\|_2^2 \leq \mu^2, \mathbf{R}_c \geq 0 \quad (22)$$

这个约束最小化问题可以通过优化工具箱解决,如 CVX. 在获得  $\mathbf{R}_c$  后,使用 root-MUSIC 算法进行 DOA 估计.

## 4 仿真实验

本节使用 CO-MUSIC 方法、CO-Lasso 方法<sup>[13]</sup>及本文方法,对超定和欠定两种情况进行仿真. 选用阵元数目为 10 的均匀阵列,以 3 信源和 8 信源为例. 设 3 信源的 DOA 为  $[-33.43^\circ, -10.19^\circ, 11.57^\circ]$ ; 8 信源的 DOA 为  $[-65^\circ, -50.34^\circ, -33.43^\circ, -10.25^\circ, 11.65^\circ, 30.46^\circ, 49^\circ, 65.24^\circ]$ . 设置 CO-MUSIC 方法的角度搜索间隔为  $0.1^\circ$ , CO-Lasso 方法的完备字典间隔设置为  $0.1^\circ$ .

### 4.1 可行性分析

冗余阵元失效,以图 1(d)失效第 2, 4, 5, 7, 8 阵元为例. 对 3 信源和 8 信源情况进行仿真实验,信噪比  $\text{SNR} = -5\text{dB}$ ,快拍数  $L = 1024$ . 实验结果如图 2 所示.

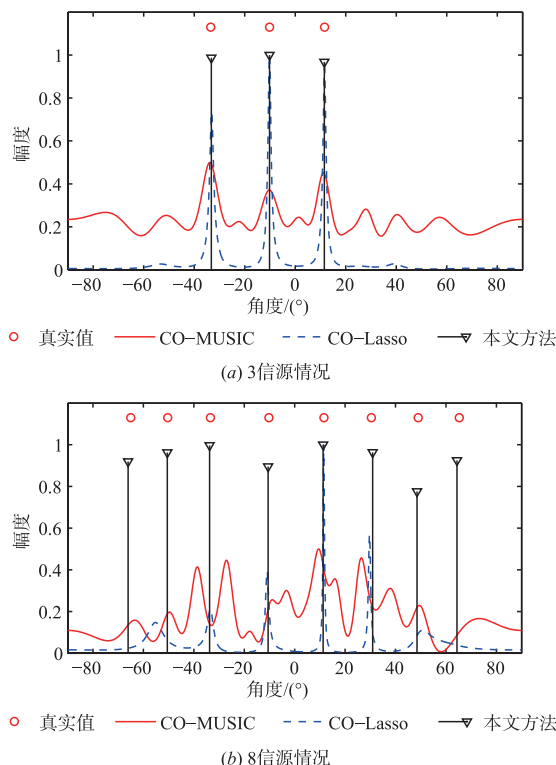


图2 冗余阵元失效情况下3种方法的可行性比较

由图 2 可得:冗余阵元失效,对 3 信源测向,3 种方

法均能得到较好的估计效果. 对 8 信源测向, CO-MUSIC 估计误差过大, CO-Lasso 仅能实现部分信源的 DOA 估计, 而本文方法可以实现对全部信源的测向.

非冗余阵元失效, 以图 1(e) 失效第 3, 4, 5, 8, 9 阵元为例. 实验结果如图 3 所示.

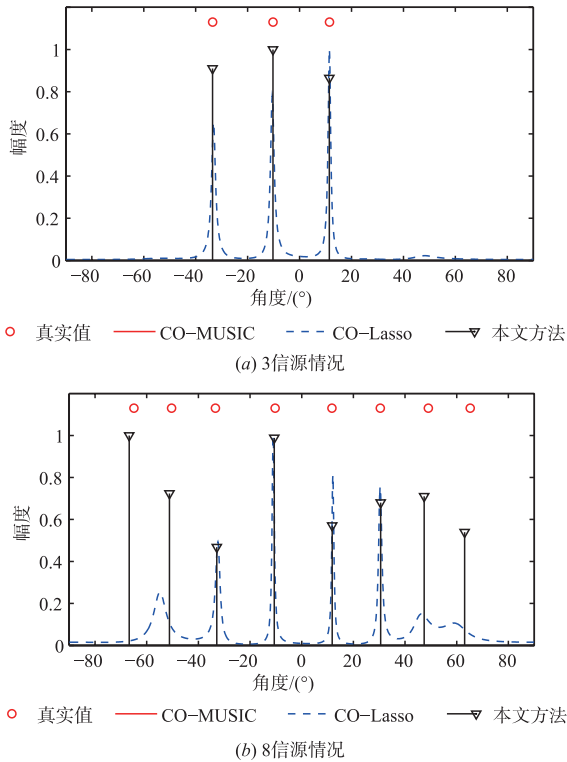


图3 非冗余阵元失效情况下3种方法的可行性比较

由图 3 可得: 非冗余阵元失效, 对 3 信源测向, CO-MUSIC 完全失效, CO-Lasso 及本文方法均能得到较好的估计效果; 对 8 信源测向, CO-MUSIC 完全失效, CO-Lasso 仅能实现部分信源的 DOA 估计, 而本文方法可以对全部信源进行测向.

#### 4.2 估计精度分析

对实验 1 中冗余阵元失效和非冗余阵元失效两种情况进行仿真实验, 比较信噪比变化对角度均方根误差的影响, 快拍数  $L = 1024$ , 对 3 种方法分别进行 300 次蒙特卡洛实验. 图 4 为冗余阵元失效. 图 5 为非冗余阵元失效.

由图 4(a) 可得: 冗余阵元失效, 3 信源时, 3 种方法均能获得较好的估计精度, 且本文方法估计精度最高. 由图 4(b) 可知, 8 信源时, CO-MUSIC 误差过大, CO-Lasso 和本文方法均能获得较高的估计精度, 本文方法在低信噪比情况下优势更加明显.

由图 5(a) 可得: 非冗余阵元失效, 3 信源时, CO-MUSIC 完全失效, CO-Lasso 和本文方法均能获得较好的估计精度, 且本文方法精度更高. 由图 5(b) 可知,

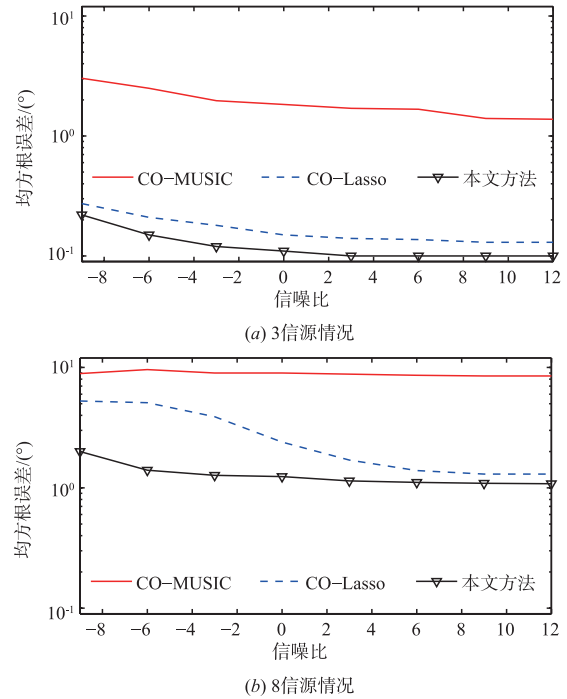


图4 冗余阵元失效情况下3种方法的均方误差

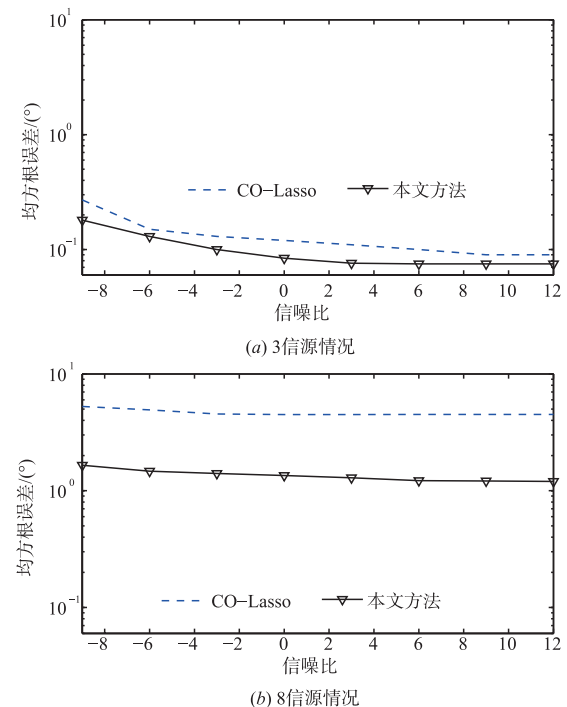


图5 非冗余阵元失效情况下3种方法的均方误差

8 信源时, CO-MUSIC 完全失效, 本文方法较 CO-Lasso 具有明显优势.

#### 4.3 运算时间比较

实验仿真环境为 MATLAB 2014a 平台, Intel Xeon E3 四核处理器, CPU 主频 3.3GHz, 内存容量 16GB. 其他实验条件与实验 1 中非冗余阵元失效情况下相同. 图

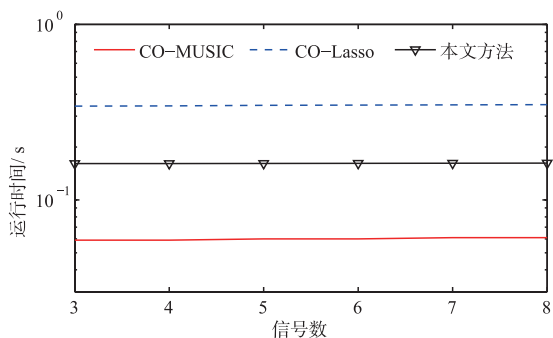


图6 运算时间随信源数变化

6 为不同信源数目条件下 3 种估计方法的运算时间。

由图 6 可以得出结论:本文方法所需的运算时间明显少于 CO-Lasso,而 CO-MUSIC 运算时间最短。

综合估计精度分析可以得出:冗余阵元失效,超定情况下,三种方法均有较好的估计精度,对精度要求不高时可使用运算速度最快的 CO-MUSIC;欠定情况下,CO-MUSIC 误差过大,而本文方法在估计精度和运算时间上均优于 CO-Lasso,因而选用本文方法.非冗余阵元失效,CO-MUSIC 完全失效,而 CO-Lasso 性能明显下降且运算速度较慢,本文方法获得较高估计精度的同时兼有较快的运算速度,此时选用本文方法。

## 5 结论

考虑到目前 DOA 估计算法一般都建立在阵列完好情况下,一旦出现阵元失效,许多算法性能急剧下降甚至测向失效.本文提出一种基于 Toeplitz 协方差矩阵重构的 DOA 估计方法.首先对失效阵元检测,然后将失效阵元分为两类.当冗余阵元失效,利用阵列冗余度对协方差矩阵中缺失的数据进行恢复;当非冗余阵元失效,将阵列协方差矩阵进行扩展得到一个数据缺失的高维矩阵,根据其 Toeplitz 性质构造一个低秩矩阵重构问题,引入投影映射矩阵,用迹范数代替秩范数进行凸松弛,实现对缺失元素的恢复.本文方法有效避免了阵元失效带来的自由度下降的影响,提高了估计精度。

### 参考文献

- [1] Qin S, Zhang Y D, Amin M G. Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63 (6): 1377 - 1390.
- [2] Zheng W, Zhang X F, Gong P, et al. DOA estimation for coprime linear arrays: an ambiguity-free method involving full DOFs [J]. IEEE Communications Letters, 2018, 22 (3): 562 - 565.
- [3] Yao B, Dong Z, Zhang W, et al. Degree of freedom strengthened cascade array for DOD-DOA estimation in MIMO array systems [J]. Sensors, 2018, 18 (5): 1557.
- [4] Liu C L, Vaidyanathan P P. Robustness of difference coarrays of sparse arrays to sensor failures-Part I: A theory motivated by coarray MUSIC [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67 (12): 3213 - 3226.
- [5] Liu C L, Vaidyanathan P P. Robustness of difference coarrays of sparse arrays to sensor failures-Part II: Array geometries [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67 (12): 3227 - 3242.
- [6] Vigneshwaran S, Sundararajan N, Saratchandran P. Direction of arrival (DOA) estimation under array sensor failures using a minimal resource allocation neural network [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2007, 55 (2): 334 - 343.
- [7] Ince T, Ögücü G. Array failure diagnosis using nonconvex compressed sensing [J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2015, 15: 992 - 995.
- [8] Singh N, Rattan M, Patterh M S. A linear antenna array failure correction using improved bat algorithm [J]. International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering, 2017, 27 (7): e21119.
- [9] Zhang W Y, VOROBYOV S A, Guo L H. DOA estimation in MIMO radar with broken sensors by difference co-array processing [A]. IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-sensor Adaptive Processing [C]. US: IEEE, 2015. 321 - 324.
- [10] Zhu C L, Wang W Q, Chen H, et al. Impaired sensor diagnosis, beamforming and DOA estimation with difference Co-Array processing [J]. IEEE Sensors Journal, 2015, 15 (7): 3773 - 3780.
- [11] Wang X M, Wang X. Hole identification and filling in k-times extended co-prime arrays for highly efficient DOA estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2019, 67 (10): 2693 - 2706.
- [12] Yang M L, Haimovich A M, Yuan X, et al. A unified array geometry composed of multiple identical subarrays with hole-free difference coarrays for underdetermined DOA estimation [J]. IEEE Access, 2018, 6: 14238 - 14254.
- [13] Zhang Y D, Qin S, Amin M G. DOA estimation exploiting coprime arrays with sparse sensor spacing [A]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing [C]. US: IEEE, 2014. 2267 - 2271.
- [14] Hosseini S M R, Sebt M A. Array interpolation using covariance matrix completion of minimum-size virtual array [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24 (7): 1063 - 1067.
- [15] 张彦奎, 许海韵, 巴斌, 等. 基于互质阵列重构的高维波达方向估计算法 [J]. 电子学报, 2018, 46 (12): 2923 - 2929.

ZHANG Yan-kui, XU Hai-yun, BA Bin, et al. Direction-of-Arrival destination for multiple sources based on the reconstruction of the coprime array [J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(12):2923-2929. (in Chinese)

- [16] WU X H, ZHU W P, YAN J. A Toeplitz covariance matrix reconstruction approach for direction-of-arrival estimation [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2017, 66(9):8223-8237.

[17] LIU Z M, HUANG Z T, ZHOU Y Y. Sparsity-inducing direction finding for narrowband and wideband signals based on array covariance vectors [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2013, 12(8):1-12.

### 作者简介



**孙 兵** 男, 1991 年 3 月生于安徽合肥. 现为国防科技大学电子对抗学院博士研究生. 主要研究方向为空间信息处理, 阵列信号处理.  
E-mail: 13721052122@163.com



**叶文强** 男, 1994 年 8 月生于安徽合肥. 现为 63768 部队初级工程师, 主要研究方向为雷达理论及技术.  
E-mail: 15555487576@163.com



**吴晨曦** 男, 1988 年 12 月生于安徽枞阳. 现为国防科技大学电子对抗学院讲师. 主要研究方向为阵列信号处理, 稀疏重构技术.  
E-mail: wuchenxi19881201@126.com



**苏宝桐** 男, 1982 年 5 月出生于吉林农安. 现为 65655 部队助理工程师, 主要研究方向为车辆维修与管理.  
E-mail: 1399391384@qq.com



**阮怀林** 男, 1964 年 11 月生于安徽合肥. 现为国防科技大学电子对抗学院教授、博士生导师. 主要研究方向为阵列信号处理, 空间信息处理, 压缩感知理论.  
E-mail: rhl\_641111@163.com