

一种求解最小割的警示传播算法

王 辛^{1,2}, 王晓峰¹, 李卫民²

(1. 北方民族大学计算机科学与工程学院, 宁夏银川 750021; 2. 上海大学计算机工程与科学学院, 上海 200444)

摘 要: 最小割问题(minimum cut problem)是 NP(Non-deterministic Polynomial)难问题, 警示传播算法(warning propagation)是一种基于因子图的消息传递算法, 可用于求解组合优化问题. 首先, 本文借助隐马尔可夫模型将无向图转换为因子图, 将求解最小割映射为求解因子图的相应问题. 进而设计一种求解最小割的警示传播算法. 最后, 选取了几组随机无向图实例进行数值实验, 实验结果表明, 该算法在求解速度上优于同类算法.

关键词: 组合优化; 最小割; 警示传播算法; 隐马尔可夫模型; 概率算法; 马尔科夫化

中图分类号: TP301 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2019)11-2386-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2019.11.021

A Warning Propagation Algorithm for Solving Minimum Cut

WANG Xin^{1,2}, WANG Xiao-feng¹, LI Wei-min²

(1. College of Computer Science and Engineering, North Minzu University, Yinchuan, Ningxia 750021, China;

2. College of Computer Engineering and Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: The minimum cut problem (MCP) is an NP (Non-deterministic Polynomial)-hard problem, warning propagation (WP) is a kind of message passing algorithm based on factor graph, it solve the combinatorial optimization problem. First, HMM (Hidden Markov Model) converted undirected graph to factor graph. Then, we designed a kind of warning propagation algorithm to solving the minimum cut. Finally, we selected skit randomly undirected graphs numerical experiments. The experimental show that the algorithm precedes similar algorithms in speed.

Key words: combinatorial optimization; minimum cut; warning propagation (WP); hidden Markov model (HMM); probability algorithm; Markov off

1 引言

最小割问题 (Minimum Cut Problem, MCP) 是图论中的一个 NP (Non-deterministic Polynomial) 难问题, 其为数字医学图像视差处理、军事邻域互达、最大泄洪量测量、牙床检查等问题的分析提供了重要理论支撑^[1,2]. MCP 定义为, 在任意图 $G = (V, E)$ 上存在一个顶点分割 (V_1, V_2) , 将 G 中的所有顶点被划分为两个彼此互异集合, 若 $V_1 \cap V_2 = \emptyset, V_1 \cup V_2 = V$, 则将连结两个分属不同顶点集合的边记作 E_c , 若 $W(E_c)$ 满足 $W(E_c) \leq \min W(\text{other}(E_c))$, 则边集 $W(E_c)$ 称作图 G 的 MCP. 目前, 学术界主要利用无向加权图讨论 MCP 如: Ishikawa 利用引入了相邻外极线间约束、顺序性约束来解决 MCP 的视觉遮挡^[1]. Alexander 等人利用拉普拉斯矩阵

将 MCP 映射为求解正定二次型问题, 提高了 MCP 的求解精度^[2]. Karger 等人利用收缩算法减小了收缩范围, 加快了 MCP 的求解速度, 但效果不显著^[3]. Mohammed 等人在攻击图上利用进化算法将 MCP 投射为社交网络的目标截获问题^[4]. Edna 等人提出了一种解决 MCP 的新方法, 提高了求解精度^[5]. Connelly 等人提出一种新的碎片化切割算法^[6]. Orphan 等人提出了一种分布式算法, 使用一种自适应的元启发式方法来检测节点, 并确定所有检测到的路径断开的节点为最小割集^[7]. Du-an 等人提出了 MCP 的两种变体, 且给出了求解算法^[8]. 可以看出, 上述方法具有一定的针对性和局限性, 不具有普遍性. 因此, 实际应用不广泛.

约束可满足性问题 (Constraint Satisfaction Problem, CSP)^[8-10] 是人工智能中的一个重要研究领域, 本质是

收稿日期: 2018-11-26; 修回日期: 2019-03-20; 责任编辑: 蓝红杰

基金项目: 国家重点研发计划 (No. 2017YFE0117500); 国家自然科学基金 (No. 61462001, No. 61762019, No. 61762002, No. 61862051); 北方民族大学重点科研项目 (No. 2017KJ24, No. 2017KJ25); 2018 宁夏回族自治区重点研发计划项目 (No. 2018BEE0309); 宁夏高等学校一流学科建设 (电子科学与技术学科) 资助项目 (No. NXYLXK2017A07); 宁夏自然科学基金 (No. 2019AAC03120)

由 m 个约束和 n 个变元构成的可满足性公式, CSP 的求解目标即寻找 n 个变元的一组赋值, 使 m 个约束同时被满足, 或证明其无解^[11]. 可满足性判定问题 (SATisfiability, SAT) 是典型的 CSP 问题^[12], 给定一个合取范式 F , SAT 问题判断是否存在一组赋值使得 F 为真. 对研究较为成熟的 SAT 问题, 约束个数与变元个数的比值 $\alpha = m/n$ 是一个关键参数, 其对 SAT 实例的可满足性和求解的难易程度有着重要的影响, 现有理论和实验表明, α 存在一个阈值 α_d , 若 $\alpha < \alpha_d$, 则实例高概率可满足; 若 $\alpha > \alpha_d$, 则实例高概率不可满足^[12-16]. 目前许多算法能够求解的实例范围都与 α 有着密切关联, 如基于纯文字规则的算法可有效求解 $\alpha < 1.6$ 区域的实例^[17-23]. 基于正负文字出现次数最多的算法可有效求解 $\alpha < 3.52$ 区域的实例^[24].

信息传播算法在求解 SAT 问题, 特别是随机 3-SAT 问题时往往具有惊人的效果, 这主要基于信息传播算法能够在部分随机 3-SAT 问题实例的难解区间上高概率收敛, 进而可以固定部分指派的边缘概率分布, 从而确定部分变元的概率赋值. 警示传播算法 (Warning Propagation, WP) 在以因子图为架构的问题分析和求解中表现出惊人效果.

基于上述研究现状, 提出一种求解最小割的警示传播算法, 利用随机生成的无向图, 首先随机选取一个初始节点, 考察该节点与其 3-hoop 内邻居节点中权重最小的节点关联紧密程度, 同时将其 3-hoop 内的邻居节点一并作为 MCP 中的节点, 确定 MCP 的节点范围.

2 基本知识

因子图 (factor graph) 可视为二部图, 图中的结点可分为两类: 一类是变元结点 (图中用圆环表示, 记作 (i, j, k, \dots)); 另一类是约束结点 (图中用方框表示, 记作 (a, b, c, d, \dots)). 其中:

$\mu_{i \rightarrow a}(s_i)$ 表示在没有约束 a 的情况下, 变元 i 取值为 $s_i \in D$ 的概率;

$\eta_{a \rightarrow i}(s_i)$ 表示约束 a 要求变元 i 取值为 $s_i \in D$ 的概率;

$V(i)$ 表示包含变元 i 的约束结点集合;

$V(a)$ 表示包含约束 a 中的变元结点集合;

统计物理现象表明, 警示信息迭代方程收敛的含义是, 第 t 次得到的警示信息 $\mu_{a \rightarrow i}(t)$ 与 $t-1$ 次得到的警示信息 $\mu_{a \rightarrow i}(t-1)$ 一致或其二者差值小于一个足够小的常数 ε 时, WP 收敛.

3 求解最小割的警示传播算法

3.1 基于无向图的隐马尔可夫模型

马尔可夫链的随机性质表明: 随机事件未来状态

的概率分布只依赖于该事件现在的状态, 而与该事件到达现在状态所经历的若干历史状态无关.

基于最小割分布的熵值和初始节点随机性等特征, 选取一种离散时间的马尔可夫链, 即隐马尔可夫模型 (Hidden Markov Model, HMM) 对 MCP 建模, 提取当前迭代节点及其周围邻居节点的各个目标特征值, 并将其映射为因子图的两类不同节点.

HMM 是一个集合, 即 $M = \{S, P, T, Q\}$, 其中 S 为状态空间, 包括隐含状态 s 和观察状态 o ; P 为概率转移矩阵; T 为观察值分布矩阵; Q 为初始概率状态分布矩阵; 随机图中节点记为 n_i .

规定 p 为经 n 步迭代后, 迭代信息便由节点 n_i 传播至其他节点的概率. 具体建模过程如图 1 所示.

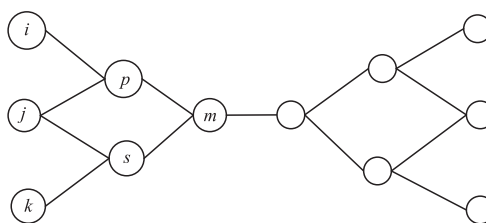


图1 无向图的马尔可夫化

HMM 中, 随机无向图中的节点最初处于隐状态下, 无法直接观测信息转移概率数值, 故设定观测层, 具体可拆解为五步:

(1) 随机选取一个初始状态 q_i ;

(2) 设定初始观测迭代步数 $t = 1$;

(3) 根据 q_i 的输入概率分布, 得到输出概率矩阵 V_k ;

(4) 根据第 t 步转移概率矩阵 A_{ij} 的概率分布情况, 取转移概率矩阵中每一行转移概率最高的元素作为 $t+1$ 步的迭代起点, 迭代计算方程式为: $X(k+1) = X(k) \cdot P_{ij}$, 其中 $X(k)$ 为节点 k 在时刻 t 的状态;

(5) 获得观测层.

3.2 因子图转换技术

随机无向图完成 HMM 建模, 提取特征值后, 需将随机无向图转换为因子图, 因子图转换过程如算法 1 所示.

算法 1 因子图转换算法

输入: 随机无向图

输出: 因子图

1. 构建随机无向图的加权邻接矩阵.
2. 计算生成的无向图中每个节点的邻居节点数.
3. 无向图的节点映射为因子图的子句节点.
4. 将随机生成的权重值, 节点标识位映射为因子图的变元节点.
5. 获取有效邻居节点的数量和标识位及权重信息.

因子图转换流程如图 2 所示.

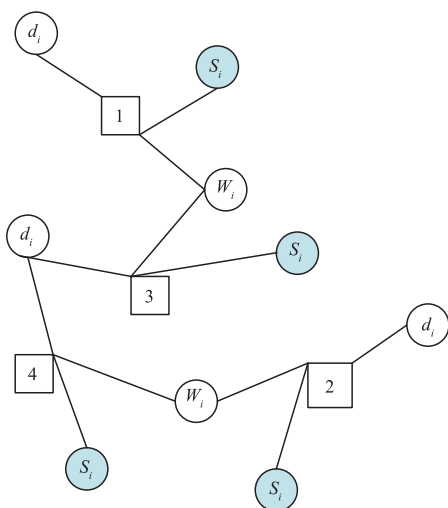


图2 带标识的因子图实例

其中, d_i 代表节点 i 依附的邻居节点个数, w_i 代表节点 i 的权重值. 对每个节点增加一个标识位 S_i , 用于标识该节点是否被纳入最小割, 故需将其作为因子图的变元节点.

3.3 求解最小割的警示传播算法

随机无向图中, 选取初始化节点, 即可执行指定迭代步骤的警示传播算法的迭代方程, 直至算法收敛, 依概率更新随机消息边序列, 取收敛节点 3-hoop 区域内的点, 且沿传播方向的边上的点作为 MCP 的点, 累计收敛节点及其 3-hoop 内节点的权重之和作为算法提取 MCP 的权重. 具体算法流程如算法 2 所示.

算法 2 求解最小割的警示传播算法

输入: 因子图; 最大迭代次数 t_{\max} ; 权重 w_i ;

输出: 最小割的节点数目; 最小割的总权重;

1. 选择任意无向图进行收敛性分析.
2. 对无向图进行马尔可夫变换.
3. 调用算法 1, 将无向图转为因子图.
4. 令 $t \leftarrow 0$ 随机选取起始节点, 随机初始化节点信息 $\eta_{a \rightarrow i}^{(0)}(s_i) \in \{0, 1\}$.
5. 调用信息传播方程, 使算法在相邻节点的权值较小的方向上收敛.
6. 依据信息迭代方程, 按规定的迭代次数进行循环迭代操作, 当跳数达到 3 跳且算法收敛时, 计算与节点相邻的边的权重, 确定标识位的信息值.
7. 统计收敛节点的总权重, 与节点数目.

由统计物理分析知, WP 收敛后得到的部分指派的固定点即为亥姆霍兹自由能函数的稳定点, 算法收敛到自由能函数的稳定点后, 此点对外界做功的能力随马尔可夫过程节点的随机游走步数的累计会达到峰值, 故而 WP 收敛后的固定部分指派点即为最小割.

3.4 最小割节点获取技术分析

求解最小割的警示传播算法执行 t_{\max} 步后, 警示信息的边缘概率被固定到 1 的节点即为最小割节点集. 当算法在迭代 t 次之后得到的 $\mu_{a \rightarrow i}(t)$ 会沿当前警示信息方向传播, 依概率收敛到两个逻辑值 0 或 1, 其逻辑意义分别为:

$\mu_{a \rightarrow i}(t) = 1$: 节点 a 是否被纳入 MCP 高概率完全依赖于特征值 i .

$\mu_{a \rightarrow i}(t) = 0$: 节点 a 是否被纳入 MCP 高概率并非完全依赖于特征值 i ; 由特征值 k 对于节点 a 纳入 MCP 是否做出支持, 可得

$$\begin{aligned} & \max_{i,j \in E} d_{ij} \sum_{b \in V(j) \setminus a} J_j^b \mu_{b \rightarrow j}(t-1) < 0 \\ &= \sum_{b \in V_c(j)} J_j^b \max_{i,j \in E} d_{ij} \mu_{b \rightarrow j}(t-1) + \sum_{b \in V_c(j)} J_j^b \max_{i,j \in E} d_{ij} \mu_{b \rightarrow j}(t-1) \\ &= \sum_{b \in V_c(j)} \max_{i,j \in E} d_{ij} \mu_{b \rightarrow j}(t-1) - \sum_{b \in V_c(j)} \max_{i,j \in E} d_{ij} \mu_{b \rightarrow j}(t-1) \\ & \sum_{b \in V_c(j)} \max_{i,j \in E} d_{ij} \mu_{b \rightarrow j}(t-1) < \sum_{b \in V_c(j)} \max_{i,j \in E} d_{ij} \mu_{b \rightarrow j}(t-1) \end{aligned}$$

依概率正确收敛位置上的节点, 即为 WP 在平均权重最小的区域内迭代控制的高概率收敛区域, 对使警示传播算法收敛的随机无向图节点, 可根据 HMM 依收敛概率得到收敛节点编号, 随之确定其 3-hoop 内节点.

4 数值实验及分析

x 数值实验中, 选取五组不同节点数目的随机无向图实例集, 节点数目 $n = \{10, 20, 50, 100, 500\}$, 各个参数 $\alpha = 3.5, r_c = 3$ 如表 1 所示. 选取启发式算法 S、D、L、K、E 进行对比实验, 对比试验节点数目分别为 $n = \{100, 200, 300, 400, 500, 600\}$.

表 1 不同节点的随机无向图参数

| n | m | p_c | α | r_c |
|-----|------|-------|----------|-------|
| 10 | 25 | 0.063 | 2.5 | 3 |
| 20 | 60 | 0.027 | 3 | 3 |
| 50 | 120 | 0.025 | 2.4 | 3 |
| 100 | 230 | 0.016 | 2.3 | 3 |
| 500 | 1035 | 0.001 | 2.07 | 3 |

图 3 为 $n = \{10, 20, 50\}$ 的随机无向图在改进后的 WP 上的收敛情况, 取使改进后的 WP 收敛的节点为最小割的节点. 图示中, x 轴表示试验次数; y 轴表示算法收敛概率. 经分析, 随着节点规模的增加, WP 收敛的高概率收敛的区间会逐步增加, 且密集度会有所提升. 由此可知, 算法的收敛程度和节点规模有关, 且随着节点规模的增大算法收敛速度提升明显.

因子图中, 基于 α 会影响实例的可满足性. 故而可根据因子图映射规则, 分析本算法收敛节点个数与其 3-hoop 内邻居节点的关系对于最小割节点所在区域的

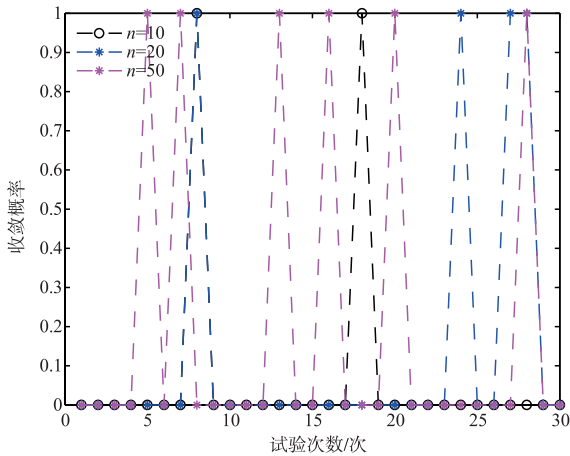


图3 不同节点数目随机图收敛密度

影响,选取3组节点 $\alpha \in (3.5, 4.3)$ 区域内的不同 α 值进行实验. x 轴为试验次数, y 轴为收敛概率.

由图4知, $n = 10$ 的随机图在 $\alpha > 3.75$ 时 WP 收敛程度较好,其最大收敛的概率达到 0.9,相对其他两组节点收敛概率提高 0.6. 同时,对相同节点数目的随机图无向图,在 N 的不同区间收敛效果也会有差异,随之节点规模增大,算法收敛概率逐渐趋于稳定,但数值有明显下降.

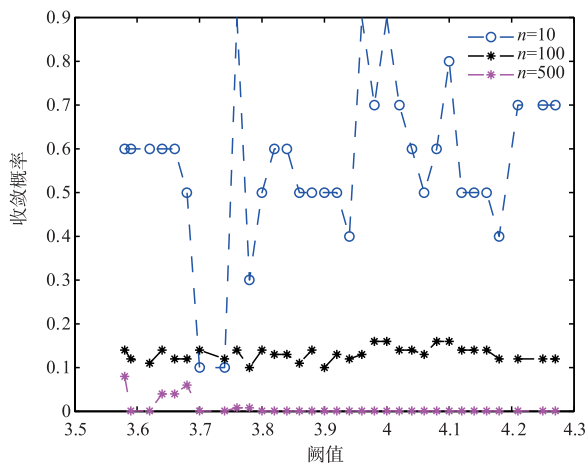


图4 不同规模无向图可满足性分析

本算法执行时间主要分为两个阶段,第一阶段是随机图转换为因子图所耗费时间,实验选取的节点数目.

$n = \{ 10, 20, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 500 \}$ 的十一组随机无向图进行转换时间测试,由实验数据可知,算法随着问题规模的增加,与其对应的因子图转换时间基本呈正比例增加.

第二阶段为 WP 收敛耗时,利用警示传播算法求解图论中的 MCP,较为显著的一个优势便是求解速度和实例产生速度较 GA 算法以及基于 LS 的 GA 算法平均

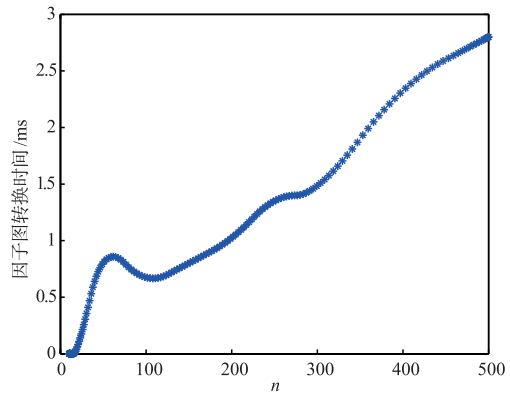


图5 不同规模因子图转换耗时

降低了 400ms. 为说明改进后的警示传播算法求解的优越性,比较本文 WP 算法与 GA 算法相比基于 LS 的 GA 算法,在有相同节点数目的攻击图上的运行时间,并给出对比数据. 实验表明,WP 在相同规模的随机攻击图实例上运行时间,以及因子图实例产生速度上明显优于 GA 算法,具体数据如图 6 所示.

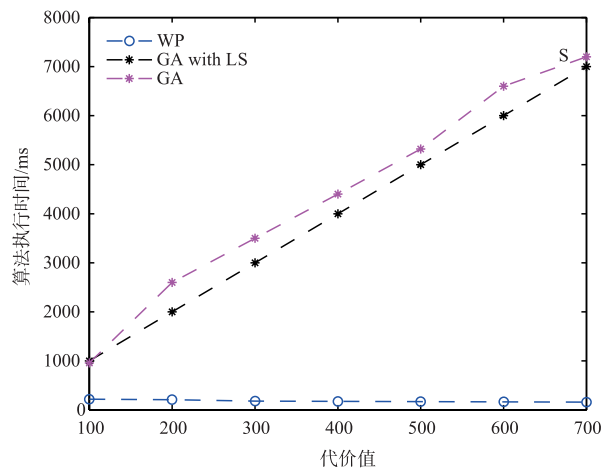


图6 相同规模攻击图运行时间对比分析

由图 6 可知,在相同代价的随机攻击图中,GA 算法与基于 LS 的 GA 算法随攻击图的执行时间随代价呈指数级上升,而 WP 算法的执行时间则几乎不受代价影响.

对比文献[5],本文提出的算法在任意规模的无向图实例上的求解速度虽劣于启发式算法 S 与 D,但求解速度相对稳定,几乎不受随机图规模的影响,在 600 个节点范围内的随机图上求解时间分布在 0.3 ms 左右. 具体求解耗时如表 2 所示.

选取若干小实例集,即节点数目较少的随机无向带权图作为测试实例. 将本文算法与文献[5]中若干启发式算法的求解时间对比. 结果表明:对若干小实例问题求解最小割的表现,WP 算法的平均求解时间为 0.29,低于诸如 K 算法,L 算法等启发式算法,具体对比

数据如表 3 所示.

表 2 对比文献[5]启发式算法 S, D 与 WP 算法的求解时间

| n | S | D | WP |
|-----|------|------|------|
| 100 | 0.01 | 0.01 | 0.39 |
| 200 | 0.02 | 0.07 | 0.41 |
| 300 | 0.04 | 0.14 | 0.35 |
| 400 | 0.08 | 0.27 | 0.3 |
| 500 | 0.1 | 0.33 | 0.29 |
| 600 | 0.15 | 0.35 | 0.29 |

表 3 对比文献[5]小实例求解时间

| N | L | K | E | S | WP |
|------|------|------|------|------|------|
| 0.39 | 0.46 | 0.36 | 0.27 | 0.13 | 0.29 |

5 结语

针对加快 MCP 求解速度的问题,提出一种求解最小割的警示传播算法,在随机无向图及其衍生出的随机攻击图通过隐马尔可夫建模,将随机图按照映射规则映射为因子图,利用因子图结构特性及 WP 收敛特性,选取权重最小的邻居节点方向进行收敛性分析,当迭代步数达到指定阈值时,依收敛概率获取收敛节点,并将其 3-hoop 内的节点作为 MCP 中的节点.实验证明,本文提出的方法在提升求解速度方面有很好的效果.

参考文献

- [1] HIROSHI, ISHIKAWA. Global optimization using the DIRECT algorithm in Matlab[J]. *Matlab Advanced Modeling Optimization*, 1999, 1(2): 1-8.
- [2] GRIFFING A R, LYNCH B R, STONE E A. Structural properties of the minimum cut of partially-supplied graphs[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2014, 177(4): 152-157.
- [3] DAVID R, KARGER, CLIFFORD S. A new approach to the minimum cut problem[J]. *Journal of the ACM*, 1996, 43(4): 601-640.
- [4] BHUSHAN G. Sajith. I/O efficient algorithms for the minimum cut problem on unweighted undirected graphs[J]. *Theoretical Computer Science*, 2014, 43(5): 13-15.
- [5] EDNAA, HOSHINO. The minimum cut cover problem[J]. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2011, 37(9): 255-260.
- [6] CONNELLY B, FANG-LUE Z. A survey of the state of the art in patch-based synthesis[J]. *Computational Visual Media*, 2017, 3(1): 3-20.
- [7] ORHAN D, VAHID K A, ALI F. A distributed evolutionary algorithm for detecting minimum vertex cuts for wireless ad hoc and sensor networks[J]. *Journal of Network and Computer Applications*, 2019, 41(1): 23-28.
- [8] DUAN Q, JINHUI X. On the connectivity preserving minimum cut problem[J]. *Journal of Computer and System Sciences*, 2014, 80(4): 837-848.
- [9] MARTIN D, ALAN F, MICHAEL M. A probabilistic analysis of randomly generated binary constraint satisfy-action[J]. *Theory Computer Science*, 2003, 290(3): 1815-1828.
- [10] CREIGNOU N, EAUDE H. The SAT-UNSAT transition for random constraint satisfaction problems[J]. *Discrete Mathematics*, 2009, 309(8): 2085-2099.
- [11] MARTIN OC, MONASSON R, ZECCHINA R. Statistical mechanics methods and phase transitions in optimization[J]. *Theory Computer Science*, 2001, 265(12): 3-67.
- [12] 王晓峰, 许道云. 警示传播算法收敛的充分条件[J]. *软件学报*, 2016, 27(12): 3003-3013.
Wang Xiao-feng, Xu Dao-yun. Sufficient conditions convergence of warning propagation algorithm[J]. *Journal of Software*, 2016, 27(12): 3003-3013. (in Chinese)
- [13] XU K, Li W. The SAT phase transition[J]. *Science in China*, 1999, 42(5): 494-501.
- [14] SHEN Y J. On the phase transitions of random k -constraint satisfaction problems[J]. *Artificial Intelligence*, 2011, 17-5(3-4): 914-927.
- [15] ACHLIOPTAS D, NARO A, Peres Y. Rigorous location of phase transitions in hard optimization problems[J]. *Nature*, 2005, 435(7043): 759-764.
- [16] MERTENS S, MEZARD M, ZECCHINA R. Threshold values of random k -SAT from the cavity method[J]. *Random Structure Algorithms*, 2006, 28(3): 340-373.
- [17] MEZARD M, PARISI G. The cavity method at zero temperature[J]. *Journal of Statistical Physics*, 2003, 111(1-2): 1-34.
- [18] MEZARD M, ZECCHINA R. Random k -satisfiability problem from an analytic solution to an efficient algorithm[J]. *Physical Review*, 2002, 66(5): 056-126.
- [19] MANEVA E, MOSSEL E, WAINWRIGHT M. A new look at survey propagation and its generalizations[J]. *Journal of the ACM*, 2007, 54(4): 1089-1098.
- [20] BRAUNSTEIN A, MEZARD M, MEZARD R. Survey propagation: an algorithm for satisfiability[J]. *Random Structures and Algorithms*, 2005, 27(2): 201-226.
- [21] BRAUNSTEIN A, ZECCHINA R. Survey and belief propagation on random k -SAT[J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2004, 2919(1): 519-528.
- [22] YEDIDIA JS, FREEMAN WT, WEISS Y. Understanding belief propagation and its generalizations[J]. *Artificial In-*

telligence,2003,8(1):239-269.

- [23] MEZARD M, PARISI G, ZECCHINA R. Analytic and algorithmic solution of random satisfiability problems [J]. Science,2002,297(5582):812-815.
- [24] BOUSSEMART K, HEMERY F F, et al. Random constraint satisfaction [J]. Easy Generation of Hard Instance Artificial Intelligence,2007,171(1):514-534.

作者简介



王 辛 男,1995 年生于宁夏吴忠. 现为北方民族大学计算机科学与工程学院硕士研究生. 主要研究方向为算法设计与分析.
E-mail: wx_nun@163.com



王晓峰 男,1980 年生于甘肃会宁. 现为北方民族大学副教授、硕士生导师. 主要研究方向人工智能.
E-mail: wxf_gzu@163.com



李卫民(通信作者) 男,1972 年生于江西南昌. 现为上海大学计算机工程与科学学院副教授. 主要研究方向为社交网络分析.
E-mail: wmli@shu.edu.cn