

# 多频连续波雷达与角度-距离联合估计方法

陈宝欣<sup>1</sup>, 关 键<sup>2</sup>, 董云龙<sup>2</sup>, 黄 勇<sup>3</sup>, 陈小龙<sup>3</sup>

(1. 海军航空大学, 山东烟台 264001; 2. 海军航空大学信息融合研究所, 山东烟台 264001;  
3. 海军航空大学 209 教研室, 山东烟台 264001)

**摘 要:** 频控阵 (frequency diverse array) 雷达存在角度和距离定位模糊的问题, 基于频控阵与早期的多频连续波 (multi-frequency continuous wave) 雷达相同的测距原理, 提出了改进的多频连续波雷达模型, 通过采用相控阵接收的方式, 克服了传统频控阵角度和距离定位模糊的问题. 根据收发阵元数的不同, 推导了四种配置下的信号模型, 分析了多频连续波雷达相比传统频控阵可解耦角度与距离定位模糊的原因. 新的多频连续波雷达实现定位的本质为三维多频估计问题, 为此提出了一种基于迭代插值傅里叶系数 (iterative interpolation Fourier coefficients) 的角度-距离联合估计方法, 理论分析了算法的性能. 仿真结果验证了所提方案与算法的有效性.

**关键词:** 多频连续波雷达; 频控阵; 频率估计; 多输入多输出雷达; 角度估计; 距离估计

**中图分类号:** TN958.94 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2020)02-0375-09

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2020.02.021

## Multiple-Frequency CW Radar and Joint Angle-Range Estimation Method

CHEN Bao-xin<sup>1</sup>, GUAN Jian<sup>2</sup>, DONG Yun-long<sup>2</sup>, HUANG Yong<sup>3</sup>, CHEN Xiao-long<sup>3</sup>

(1. Naval Aviation University, Yantai, Shandong 264001, China;

2. Institute of Information Fusion, Naval Aviation University, Yantai, Shandong 264001, China;

3. Section 209, Naval Aviation University, Yantai, Shandong 264001, China)

**Abstract:** Frequency diverse array radar has the problem of ambiguity in angle and range localization. Based on the same ranging principle as early multi-frequency continuous wave radar, a model for the multi-frequency continuous wave (MFCW) radar is proposed, which overcomes the ambiguity of the angle-range beampattern of the traditional frequency diverse array (FDA). The signal models of the MFCW radar under four operating modes are deduced according to the number of transmitting and receiving elements, and the reason for the decoupled angle-range localization is analyzed compared with the traditional FDA. A joint angle-range localization method based on iterative interpolation Fourier coefficients (IIFC) is proposed for the single-input multiple-output (SIMO) mode. The performance of the algorithm is analyzed theoretically. Simulation results show the effectiveness of the proposed scheme and the algorithm.

**Key words:** multi-frequency continuous wave; frequency diverse array; frequency estimation; multiple-input multiple-output radar; angle estimation; range estimation

## 1 引言

雷达是无线电探测与测距的缩写, 其中的测距方法主要包括两种: 基于脉冲体制的回波时延测距和基于连续波体制的相位差 (频率差) 测距. 前者通过测量接收信号相对于发射时的延时来实现测距, 后者则是

通过比较回波与发射信号的相位 (频率差) 来测距的, 如基于频率差测距的调频连续波雷达和基于相位差测距的多频连续波雷达. 2006 年, 一种称为频控阵 (Frequency Diverse Array, FDA) 的新体制雷达被首次提出<sup>[1]</sup>, 并且得到了广泛关注<sup>[1-3]</sup>, 其测距原理的本质同多频连续波雷达相同. 频控阵通过在每个阵元施加微

收稿日期: 2018-09-5; 修回日期: 2019-05-17; 责任编辑: 覃怀银

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 61871391, No. 61871392, No. U1633122, No. 61531020); 中国博士后科学基金 (No. 2017M620862); 中国青年人才托举工程资助 (No. YESS20160115)

小频偏从而得到一个与角度、距离同时相关的波束图,而这与相控阵只与角度有关的波束图有显著不同.因此,理论上讲,频控阵可实现角度-距离二维联合定位,然而,频控阵的波束图在角度-距离坐标上呈“S”形,直接通过回波延时测距会存在模糊问题.为了充分利用频控阵的特点,同时实现角度与距离的解耦合,很多学者对这一问题做了探索.王文钦等在这方面做了深入的研究,极大的推动了频控阵的发展<sup>[3-8]</sup>.在文献[3]中,提出双脉冲解耦的方法,即首先以相控阵模式发射一个脉冲测量目标角度,然后再以频控阵模式发射脉冲实现测距.文献[7]提出将整个阵列划分为两个子阵,每个子阵使用不同的频偏,从而实现角度、距离的解耦.近年来,FDA与MIMO(Multiple-Input Multiple-Output)相结合的方式(FDA-MIMO)被用来解耦角度-距离波束图<sup>[8-13]</sup>,其基本原理是在阵元或子阵间发射正交波形,然后在接收端通过匹配滤波实现对不同发射波形的分离,从而实现了角度与距离的解耦.许京伟等<sup>[10,14-17]</sup>也对FDA-MIMO做了深入研究,主要将其应用于高脉冲重频下的解距离模糊和距离模糊杂波等问题.然而,直接对接收信号匹配滤波并不能得到解耦的波束图,并且在实际应用时,由于目标多普勒的影响,发射波形的正交性很难满足.文献[18]提出了一种随机频控阵的概念,即在每个阵元施加随机的频偏,打破了角度与距离的依赖关系,从而实现解耦.文献[19]提出的互质频控阵同样可得到解耦的角度-距离定位,但是其信号模型的导出并不严格,且忽略了发射导向矢量.

基于频控阵与多频连续波雷达相同的测距原理,本文在前人研究基础上提出了一种新的多频连续波雷达,根据收发阵元数可分为四种配置模式,其中的多发单收模式可看作为传统的频控阵模式.其余模式通过在接收端采用相控阵接收,可克服频控阵波束图中角度、距离定位模糊的问题.同时,由于采用连续波体制,发射波形的正交性可以得到满足,因此在接收端可通过滤波器实现波形分离.推导了四种工作模式下的信号模型,提出了一种基于迭代插值傅里叶系数(Iterative Interpolation Fourier Coefficients, IIFC)的角度-距离联合估计方法.

## 2 多频连续波雷达的信号模型与角度-距离波束图解耦

### 2.1 信号模型的导出

#### (1) 单发单收模式

首先考虑单发单收模式,即只包含一个发射天线,一个接收天线的情况.设 $t$ 时刻雷达与目标的距离 $r(t) = r_0 - vt$ , $v$ 为朝向雷达的目标径向速度.假设发射天线同时发射 $M$ 个单频连续波,在 $t$ 时刻发射的第 $m$ 个载

频的连续波可写为

$$s_m(t) = \cos(2\pi f_m t) \quad (1)$$

其中 $f_m = f_0 + \Delta f_m = f_0 + m\Delta f$ , $m = 1, 2, \dots, M$ .

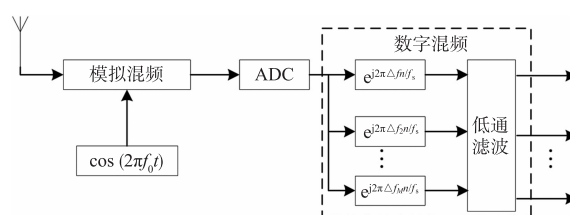


图1 接收天线与接收机原理框图

假设 $M\Delta f \ll f_0$ ,则接收天线接收到的位于距离 $r(t)$ 处的目标回波,经过图1所示接收机处理后的数字信号可表示为

$$\tilde{x}_n \approx \sum_{m=1}^M \tilde{\alpha} \cos[2\pi\Delta f_m(n/f_s - 2r_0/c) + 2\pi f_0 n/f_s - 4\pi f_0 r_0/c] \quad (2)$$

其中 $f_0 = 2vf_0/c \approx 2vf_M/c$ ,采样频率 $f_s = 2M\Delta f$ .经过数字混频后,发射的 $M$ 个连续波信号在接收端被分离为 $M$ 路多普勒信号.对应第 $m$ 个混频后的信号可表示为

$$x_{m,n} = \alpha e^{j2\pi(-2\Delta f_m r_0/c + f_0 n/f_s)} \quad (3)$$

其中 $e^{-j4\pi f_0 r_0/c}$ 作为常数相位因子可看作目标散射系数的一部分而不影响分析.将 $M$ 组接收阵元和 $N$ 个采样信号表示成矢量形式可得

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a}_R \otimes \mathbf{a}_D \quad (4)$$

其中 $\mathbf{a}_R(r) = [e^{-j4\pi\Delta f_0 r/c} \quad e^{-j4\pi\Delta f_1 r/c} \quad \dots \quad e^{-j4\pi\Delta f_{M-1} r/c}]^T$ 为距离维导向矢量, $\mathbf{a}_D(f_d) = [1 \quad e^{j2\pi f_d/f_s} \quad \dots \quad e^{j2\pi f_d(N-1)/f_s}]^T$ 为多普勒维导向矢量.

#### (2) 单发多收模式

若接收端为一均匀线阵,即包含 $L$ 个图1所示的天线与接收机,阵元间距 $d = \lambda_0/2 = c/(2f_0)$ ,则第 $l$ 个天线接收的位于距离 $r(t)$ 、角度 $\theta$ 处的目标回波,经模拟混频,采样和数字混频后的第 $m$ 个信号可表示为

$$x_{l,m,n} = \alpha e^{j2\pi[-2\Delta f_m r_0/c + f_0 n/f_s + f_0(l-1)d\sin\theta/c]} \quad (5)$$

其中利用了窄带信号的假设条件.将 $LMN$ 维数据排列成矢量形式可表示为

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a}_R \otimes \mathbf{a}_r \otimes \mathbf{a}_D \quad (6)$$

其中 $\mathbf{a}_r(\theta) = [1 \quad e^{j2\pi d\sin\theta/c} \quad \dots \quad e^{j2\pi(L-1)d\sin\theta/c}]^T$ 为接收导向矢量.

#### (3) 多发单收模式

若考虑发射阵列为 $M$ 个天线,阵元间距设置同上,每个天线发射一个单频连续波,接收端为一个图1所示的天线与接收机,此即为传统的FDA模式<sup>[2]</sup>.则第 $m$ 个发射天线的信号经模拟混频、采样、数字混频后可表示为

$$x_{m,n} \approx \alpha e^{j2\pi(-2\Delta f_m r_0/c + f_0 n/f_s + f_0 m d \sin\theta/c)} \quad (7)$$

表示成矢量形式为

$$\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{a}_R \odot \mathbf{a}_T) \otimes \mathbf{a}_D \quad (8)$$

其中  $\mathbf{a}_T(\theta) = [1 \ e^{j2\pi d \sin\theta/c} \ \dots \ e^{j2\pi(M-1)d \sin\theta/c}]^T$  为发射导向矢量.

#### (4) 多发多收模式

若考虑  $M$  个发射天线,  $L$  个接收天线, 阵元间距设置同上. 这种模式可看作是频控阵发射, 相控阵接收. 假设每个天线发射一个单载频连续波, 则第  $l$  个天线接收的第  $m$  个发射信号经模拟混频、采样、数字混频后可表示为,

$$x_{l,m,n} \approx \alpha e^{j2\pi[-2\Delta f_m r_0/c + f_D n/f_s + f_0(m-1)d \sin\theta/c + f_0(l-1)d \sin\theta/c]} \quad (9)$$

表示成矢量形式为

$$\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{a}_R \odot \mathbf{a}_T) \otimes \mathbf{a}_r \otimes \mathbf{a}_D \quad (10)$$

若观测空间中存在多个目标, 则上述四种模式可表示为多个目标回波叠加的形式, 即

$$\mathbf{y} = \sum_T \mathbf{x}_i + \mathbf{n} \quad (11)$$

其中  $\mathbf{n}$  为接收机噪声, 一般假设为服从圆周对称的复高斯随机分布.

## 2.2 角度-距离波束图解耦分析

暂不考虑多普勒的影响, 四种模式下的波束图可写为

$$\begin{aligned} |B_{\text{SISO}}(r)| &= \left| \sum_{m=1}^M e^{j2\pi[-2\Delta f_m(r-r_0)/c]} \right| \\ &= \left| \frac{\sin\{\pi M[-2\Delta f(r-r_0)/c]\}}{\sin\{\pi[-2\Delta f(r-r_0)/c]\}} \right| \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} |B_{\text{MISO}}(r, \theta)| &= \left| \sum_{m=1}^M e^{j2\pi[-2\Delta f_m(r-r_0)/c + f_0 m d(\sin\theta - \sin\theta_0)/c]} \right| \\ &= \left| \frac{\sin\{\pi M[\varphi_R(r, r_0) + \varphi_S(\theta, \theta_0)]\}}{\sin\{\pi[\varphi_R(r, r_0) + \varphi_S(\theta, \theta_0)]\}} \right| \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} |B_{\text{SIMO}}(r, \theta)| &= \left| \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=1}^M e^{j2\pi[-2\Delta f_m(r-r_0)/c + f_0 l d(\sin\theta - \sin\theta_0)/c]} \right| \\ &= \left| \frac{\sin\{\pi M \varphi_R(r, r_0)\}}{\sin\{\pi \varphi_R(r, r_0)\}} \right| \cdot \left| \frac{\sin\{\pi M \varphi_S(\theta, \theta_0)\}}{\sin\{\pi \varphi_S(\theta, \theta_0)\}} \right| \\ &= |B_{\text{SISO}}(r)| \cdot |B_{\text{PA}}(\theta)| \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} |B_{\text{MIMO}}(r, \theta)| &= \left| \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=1}^M e^{j2\pi[m \varphi_R(r, r_0) + m \varphi_S(\theta, \theta_0) + l \varphi_S(\theta, \theta_0)]} \right| \\ &= |B_{\text{MISO}}(r, \theta)| \cdot |B_{\text{PA}}(\theta)| \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $|\cdot|$  表示取模运算,  $(r_0, \theta_0)$  为期望的波束形成位置,  $\varphi_R(r, r_0) = -2\Delta f(r-r_0)/c$ ,  $\varphi_S(\theta, \theta_0) = f_0 d(\sin\theta - \sin\theta_0)/c$ . 由式(13)可知, 只有当  $-2\Delta f(r-r_0)/c + f_0 d(\sin\theta - \sin\theta_0)/c = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  时, 式(13)取得最大值, 因此最大值处的角度与距离是相互依赖的. 由于角度与距离的耦合, 直接测量回波峰值的时延会存在定位模糊的问题, 即不同距离、不同角度的目标回波峰值可能相同<sup>[2]</sup>. 由式(14)可知, 单发多收模式的波束图是

距离维(SISO模式)与角度维(相控阵)波束图的乘积. 若只考虑最大无模糊探测距离范围, 即  $R_{\max} < c/(2\Delta f)$ , 则最大值仅位于  $(r_0, \theta_0)$  处. 因此, 采用多个接收阵元, 并在每个接收端将发射信号分离可得到解耦的波束方向图, 解耦的关键即是要破坏距离维与角度维的依赖关系.

需要注意的是, 本文与文献[18~20]中的频控阵都是基于连续波体制而言的, 对于脉冲体制的FDA-MIMO, 直接对其匹配滤波并不能正确解耦. 一个理论上可行的方案<sup>[15,21]</sup>是先对式(2)进行数字混频, 再通过匹配滤波实现发射波形的分离. 这种方案也可得到类似于式(10)的导向矢量, 其正交波形的作用类似于本文中的低通滤波器. 然而在实际中式描述的波形绝对正交条件很难满足, 因为波形的自相关旁瓣和互相关水平一般不能被忽略, 且在高多普勒频移的情况下正交性更是难以保证. 而本文由于采用连续波信号, 不同信号之间的正交性可以得到很好的保证. 文献[15,21]中由此得到的信号模型与本文中的多发多收模式类似, 但是其并不能得到式(11)所示的形式, 因为对于脉冲体制而言, 匹配滤波后的目标信息仅处于快时间对应的某一点处, 而不是整个快时间范围内, 因此不同距离单元的目标不能写成和的形式. 这种方案可用于解决高脉冲重频下解距离模糊和抑制距离模糊杂波等问题.

## 3 角度-距离联合估计方法

### 3.1 基于迭代插值傅里叶系数的三维联合频率估计

文献[22]提出了一种傅里叶系数插值的频率估计方法, 对单频复信号的频率估计精度很高. 这种方法是渐进无偏的且估计方差可达到渐进克拉美罗下限的1.0147倍. 本文方法是对文献[22]中频率估计方法在三维和多频情况下的扩展, 由于未知参数变多, 因此需要交替迭代估计未知参数. 在对多维多频信号的傅里叶系数插值时, 会受到来自其余信号频率泄露的影响, 导致频率估计精度变差. 常见的消除这种影响的方法主要有基于投影(子空间)的方法<sup>[23]</sup>、滤波法<sup>[24]</sup>和信号消减法<sup>[25]</sup>等. 其中, 投影法涉及到协方差矩阵分解和求逆等运算, 运算量较大; 滤波法与信号消减法在本质上是相同的, 而信号相减的思想简单且易于实现. 因此, 本文采用信号相减的思想消除别的频率对当前待估计频率的影响.

若已知目标个数为  $I$ , 将式(5)改写为,

$$\begin{aligned} x_{l,m,n} &= \sum_{i=1}^I \alpha_i e^{j2\pi(lf_{i,1} + mf_{i,2} + nf_{i,3})}, \\ l &= 0, \dots, L-1; M = 0, \dots, M-1; n = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $f_{i,1} = (\bar{l}_i + \delta_{i,1})/L, f_{i,2} = (\bar{m}_i + \delta_{i,2})/M, f_{i,3} = (\bar{n}_i + \delta_{i,3})/N$  为第  $i$  个目标的三维归一化频率, 分别对应空间频率、距离频率与多普勒频率,  $\bar{l}_i, \bar{m}_i, \bar{n}_i$  分别为对回波数据  $y$  做三维 FFT 后对应第  $i$  个目标的极大值索引,  $\delta_i$  为相对于真实值对应的频率剩余. 一般来说, 超过某一信噪比阈值后  $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$  可准确得到. 本算法的核心思想是通过迭代插值估计频率剩余  $\delta_i$ . 以估计第  $i$  个目标的第 1 个频率  $f_{i,1}$  为例, 假设经过  $q-1$  次迭代后, 在第  $q$  次迭代时,  $y$  在  $\bar{l}_i$  两侧  $p = \pm 0.5$  处的插值傅里叶系数可写为,

$$\bar{X}_{i,1}(p) = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{l,m,n} e^{-j2\pi(l \frac{\bar{l}_i + \delta_{i,1}^{(q-1)} + p}{L} + m \frac{\bar{m}_i + \delta_{i,2}^{(q-1)}}{M} + n \frac{\bar{n}_i + \delta_{i,3}^{(q-1)}}{N})} + W_p, p = \pm 0.5 \quad (17)$$

其中  $W_p$  为噪声的傅里叶系数. 忽略噪声项, 将式(16)带入式(17)可得,

$$\bar{X}_{i,1}(p) = X_{i,1}(p) + \sum_{j=1, j \neq i}^I X_{j,1}(p) \quad (18)$$

$$X_{i,1}(p) = \alpha_i \frac{1 + e^{j2\pi(\delta_{i,1} - \delta_{i,1}^{(q-1)})}}{1 - e^{j2\pi(\delta_{i,1} - \delta_{i,1}^{(q-1)}) - p}/L}} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(\delta_{i,2} - \delta_{i,2}^{(q-1)})}}{1 - e^{j2\pi(\delta_{i,2} - \delta_{i,2}^{(q-1)})/M}} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(\delta_{i,3} - \delta_{i,3}^{(q-1)})}}{1 - e^{j2\pi(\delta_{i,3} - \delta_{i,3}^{(q-1)})/N}} \quad (19)$$

$$X_{j,1}(p) = \alpha_j \frac{1 + e^{j2\pi(\delta_{j,1}^{(q-1)} - \delta_{i,1}^{(q-1)})}}{1 - e^{j2\pi(\frac{\bar{l}_j - \bar{l}_i + \delta_{j,1}^{(q-1)} - \delta_{i,1}^{(q-1)}}{L} - p)}} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(\delta_{j,2}^{(q-1)} - \delta_{i,2}^{(q-1)})}}{1 - e^{j2\pi(\frac{\bar{m}_j - \bar{m}_i + \delta_{j,2}^{(q-1)} - \delta_{i,2}^{(q-1)}}{M}})} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(\delta_{j,3}^{(q-1)} - \delta_{i,3}^{(q-1)})}}{1 - e^{j2\pi(\frac{\bar{n}_j - \bar{n}_i + \delta_{j,3}^{(q-1)} - \delta_{i,3}^{(q-1)}}{N}})} \quad (20)$$

其中  $A_i^{(q-1)}$  包含另外两个维度的主瓣在当前待估频率处的叠加,  $X_{j,1}(p)$  表示其余  $I-1$  个三维频率旁瓣造成的影响. 进一步推导可得第  $q$  次迭代后的频率剩余,

$$\delta_{i,1}^{(q)} = \delta_{i,1}^{(q-1)} + \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{X_{i,1}(0.5) + X_{i,1}(-0.5)}{X_{i,1}(0.5) - X_{i,1}(-0.5)} \right\} \quad (21)$$

同理, 可估计得到  $\delta_{i,2}^{(q)}$  与  $\delta_{i,3}^{(q)}$ . 此时,  $\hat{\alpha}_i^{(q)}$  可通过式(22)得到,

$$\hat{\alpha}_i^{(q)} = \frac{1}{LMN} \left[ \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{l,m,n} e^{-j2\pi(l \frac{\bar{l}_i + \delta_{i,1}^{(q)}}{L} + m \frac{\bar{m}_i + \delta_{i,2}^{(q)}}{M} + n \frac{\bar{n}_i + \delta_{i,3}^{(q)}}{N})} - \sum_{j=1, j \neq i}^I \hat{\alpha}_j^{(q-1)} \frac{1 - e^{j2\pi L(\frac{\bar{l}_j - \bar{l}_i - \delta_{j,1}^{(q-1)}}{L} - \frac{\bar{l}_i - \bar{l}_i - \delta_{i,1}^{(q-1)}}{L})}}{1 - e^{j2\pi(\frac{\bar{l}_j - \bar{l}_i - \delta_{j,1}^{(q-1)}}{L} - \frac{\bar{l}_i - \bar{l}_i - \delta_{i,1}^{(q-1)}}{L})}} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi M(\frac{\bar{m}_j - \bar{m}_i - \delta_{j,2}^{(q-1)}}{M} - \frac{\bar{m}_i - \bar{m}_i - \delta_{i,2}^{(q-1)}}{M})}}{1 - e^{j2\pi(\frac{\bar{m}_j - \bar{m}_i - \delta_{j,2}^{(q-1)}}{M} - \frac{\bar{m}_i - \bar{m}_i - \delta_{i,2}^{(q-1)}}{M})}} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi N(\frac{\bar{n}_j - \bar{n}_i - \delta_{j,3}^{(q-1)}}{N} - \frac{\bar{n}_i - \bar{n}_i - \delta_{i,3}^{(q-1)}}{N})}}{1 - e^{j2\pi(\frac{\bar{n}_j - \bar{n}_i - \delta_{j,3}^{(q-1)}}{N} - \frac{\bar{n}_i - \bar{n}_i - \delta_{i,3}^{(q-1)}}{N})}} \right] \quad (22)$$

然后, 依次可得到剩余  $I-i$  个目标的三维频率. 算法迭代停止条件可设为固定值  $Q$  或相邻两次迭代的频率剩余小于某一设定值, 即  $\|\delta\| \leq \varepsilon$ , 其中  $\delta =$

$[\delta_{1,1} \ \delta_{1,2} \ \delta_{1,3} \ \dots]^T$ . 最后将  $\hat{f}_{i,1}^{(q)}, \hat{f}_{i,2}^{(q)}$  分别转换为对应的角度和距离估计, 即  $\hat{\theta}_i = \arcsin(\hat{f}_{i,1} \lambda_0/d), \hat{r}_i = (1 - \hat{f}_{i,2})c/(2\Delta f)$ . 基于迭代插值傅里叶系数的三维联合频率估计算法的步骤如下.

### 基于迭代插值傅里叶系数的三维联合频率估计算法

步骤 1 算法初始化  $\delta_{i,1}^0, \delta_{i,2}^0, \delta_{i,3}^0$  为  $[-0.5, 0.5]$  均匀分布的随机数;

步骤 2 对  $y$  做三维 FFT 运算, 得到前  $I$  个模的极大值对应的坐标  $\bar{l}_i, \bar{m}_i, \bar{n}_i$ , 以及幅度  $A_i^{(0)}$ ;

步骤 3  $q=1, \dots, Q$

$i=1, \dots, I$

根据式(17)分别计算得到  $\bar{X}_{i,1}(p), \bar{X}_{i,2}(p), \bar{X}_{i,3}(p), p = \pm 0.5$ ;

根据式(18)、(20)分别计算得到  $X_{i,1}(p), X_{i,2}(p), X_{i,3}(p), p = \pm 0.5$ ;

根据式(21)分别计算得到  $\delta_{i,1}^{(q)}, \delta_{i,2}^{(q)}, \delta_{i,3}^{(q)}$ , 进而得到三维频率估计值  $\hat{f}_{i,1}^{(q)}, \hat{f}_{i,2}^{(q)}, \hat{f}_{i,3}^{(q)}$ ;

根据式(22)计算得  $\hat{\alpha}_i^{(q)}$ ;

判断迭代停止条件  $\|\delta\| \leq \varepsilon$  是否满足? 若满足则退出循环; 否则, 继续循环.

步骤 4 将  $\hat{f}_{i,1}^{(q)}, \hat{f}_{i,2}^{(q)}, \hat{f}_{i,3}^{(q)}$  分别转换为对应的距离、角度和速度估计.

## 3.2 算法理论分析

首先证明只有一个目标不迭代时算法的渐进无偏性. 令

$$b = LMN \frac{\alpha(1 + e^{j2\pi\delta_1})(1 - e^{j2\pi\delta_2})(1 - e^{j2\pi\delta_3})}{j(2\pi)^3 \delta_2 \delta_3} \quad (23)$$

则  $X_1(p) \approx \frac{b}{\delta_1 - p} + W_p$ . 估计第一个频率剩余  $\delta_1$  时, 式(21)可近似为

$$\hat{\delta}_1 \approx \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{2\delta_1 + \frac{\delta_1^2 - 0.25}{b} (W_{0.5} + W_{-0.5})}{1 + \frac{\delta_1^2 - 0.25}{b} (W_{0.5} - W_{-0.5})} \right\} \quad (24)$$

由于  $W_p = O_p(\sqrt{LMN \ln LMN}), b^{-1} = O[(LMN)^{-1}]$ , 则  $\frac{W_p}{b} = O_p(\sqrt{\ln LMN}/\sqrt{LMN})$ . 根据  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$ , 忽略高次项后, 式(24)可进一步近似为

$$\hat{\delta}_1 \approx \delta_1 + \frac{\delta_1^2 - 0.25}{2} \text{Re} \left[ (1 - 2\delta_1) \frac{W_{0.5}}{b} + (1 + 2\delta_1) \frac{W_{-0.5}}{b} \right] + O(\ln LMN/LMN) \quad (25)$$

从式(25)可以看出,  $\delta_1$  的估计量是渐进无偏的, 其方差可写为

$$\text{var}(\hat{\delta}_1) = \frac{\pi^2 (\delta_1^2 - 0.25)^2 (1 + 4\delta_1^2)}{4LMN \cdot \text{SNR} \cos^2(\pi\delta_1) \text{sinc}^2(\delta_2) \text{sinc}^2(\delta_3)} \quad (26)$$

进一步考虑迭代时算法的收敛性. 令

$$h(\delta_1^{(q-1)}) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{X_{i,1}(0.5) + X_{i,1}(-0.5)}{X_{i,1}(0.5) - X_{i,1}(-0.5)} \right\} \quad (27)$$

将式(27)在  $\delta_1$  附近泰勒展开可得,

$$\begin{aligned} h(\delta_1^{(q-1)}) &= -\frac{\pi}{L \sin(\pi/L)} \\ &= (\delta_1^{(q-1)} - \delta_1) h'(\delta_1) [1 + O(\lambda)] \end{aligned} \quad (28)$$

其中  $\lambda = \sqrt{\ln LMN} / \sqrt{LMN}$ . 又由于  $h'(\delta_1^{(q-1)}) =$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{N \sin(\pi/N)} + O(\lambda) &= -1 + O(\lambda), \text{ 则} \\ \delta_1^{(q)} &= \delta_1^{(q-1)} + h(\delta_1^{(q-1)}) \\ &= \delta_1 + (\delta_1^{(q-1)} - \delta_1) O(\lambda) \end{aligned} \quad (29)$$

易证明等式(29)的右边是压缩映像的,则根据不动点定理可知,存在一个固定点使得  $\lim_{q \rightarrow \infty} \delta_1^{(q)} = \delta_1$ . 同理可证明  $\delta_2, \delta_3$  的渐进无偏性和迭代时的收敛性. 针对多目标的情况,由于三维联合处理的增益大大提高,且基于 DFT 的目标参数粗估计本质上是使输出信噪比最大的匹配滤波,所以三维频率的初始估计性能可以得到保证. 这使得在后续的每次迭代估计中,可以很好地减掉来自别的频率成分的干扰,从而保证算法收敛.

## 4 算法仿真分析

本节的对比算法采用经典的西-ESPRIT 算法和基于平行因子(PARAllel FACtor, PARAFAC)分析的三线交替最小二乘法算法,其中前者在假设已知信源个数的条件下对一对相干源有辨识能力,后者频率估计的精度很高,但是不具备解相干源的能力. 仿真参数设置如下:载频  $f_0 = 10$  GHz, 频偏  $\Delta f = 10$  kHz, 接收阵元与发射波形数为  $L = M = 32$ , 接收机采样频率  $f_s = 660$  kHz, 阵元间距  $d = 0.014$  m.

### 4.1 单目标时本文算法的渐进性与收敛性验证

首先考虑只有一个目标时估计量的渐进方差. 根据式(31)计算估计量的渐进方差与克拉美罗下界的比值,结果如图3所示. 可以看出,当  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  时,算法的渐进估计方差仅为克拉美罗下界的 1.014 倍,这说明算法在  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  附近有很高的估计精度. 下面考虑  $\delta_1, \delta_2$  在 0.5 附近时算法的收敛性. 假设目标位于角度  $2^\circ$ , 距离 5861 m 处, 对应  $\delta_1 = -0.4416, \delta_2 = 0.4965$ , 则取迭代停止条件  $\varepsilon = 10^{-14}$ , SNR = 10 dB 时, 频率估计剩余随着迭代次数收敛情况如图3所示. 可以看出,经过 2 次迭代后,频率剩余便迅速收敛.

### 4.2 两目标速度不同时的情况

本小节考虑两个目标在速度不同时算法的定位能力. 假设两个目标的角度分别为  $2^\circ, 32^\circ$ , 距离分别为 5861 m, 8861 m, 归一化多普勒频率分别为 0.1, 0.3. 仿真时信噪比从  $-40$  dB 至  $40$  dB 变化, 每个信噪比下仿真 100 次计算均方根误差, 迭代停止条件取  $\varepsilon = 10^{-8}$ . 实验结果如图4所示. 根据 RMB 准则, U-ESPRIT 算法至少需要  $2LM = 2048$  个快拍来估计协方差矩阵, 在此相同

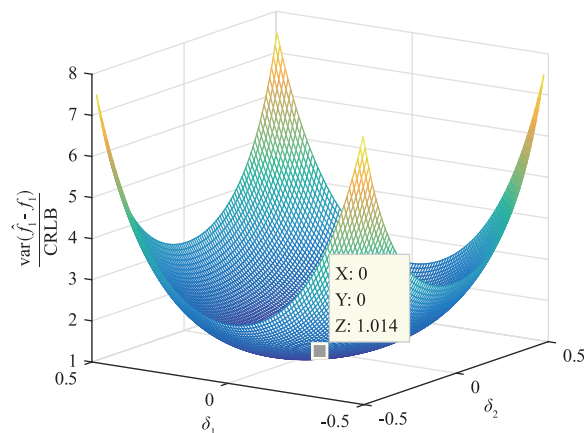


图2 估计量的渐进方差与克拉美罗限之比

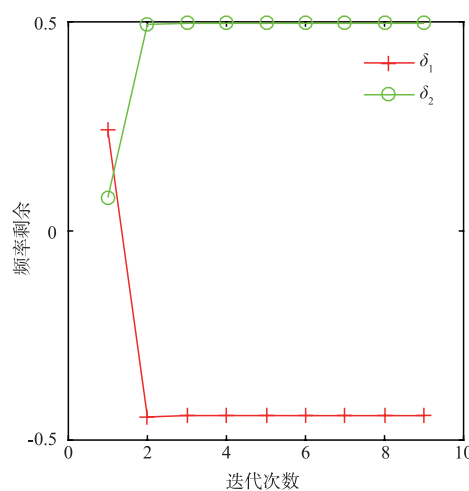


图3 频率估计剩余的收敛情况

快拍数下本文算法明显优于 U-ESPRIT, 仅略大于克拉美罗下限. 由于采用三维联合处理, 相干积累的增益远高于二维处理, 因此在很低信噪比时仍能很好的定位目标, 而 U-ESPRIT 在较低信噪比时估计误差开始变大. 而对同是三维联合处理的 PARAFAC 算法, 本文算法仍有优势. PARAFAC 算法仅在较高信噪比时表现良好, 且存在较大的估计偏差. 同时, 本文算法在较低信噪比, 采用 256 个快拍数仍可很好的定位目标, 且定位性能优于 ESPRIT 算法.

### 4.3 两目标速度相同时的情况

当两目标多普勒频率相同时, 其可看作为一对相干源, 此时常规基于二阶矩的方法的性能将大大折扣. 假设目标的归一化多普勒频率都为 0.1, 其余参数设置同上, 仿真结果如图5所示. 由于 PARAFAC 算法受相干源产生的秩亏损影响较大, 此时将完全失效, 因此在本节的对比算法中不予考虑. 从图5中可以看出, 存在相干源时, 几种算法的性能都有下降, 本文算法在信噪比较低时, 与克拉美罗下限基本吻合, 较 U-ESPRIT 算

法有明显优势,且需要更少的快拍数. 信噪比较高时,在某些频率处算法会偏离克拉美罗下限,但此时的克拉美罗下限已相对很小. 同时可以看出,在较高信噪比时目标2的估计效果要好于目标1,这一方面是因为目标2的二维频率剩余相对于目标1更靠近0附近,分别为0.0965和0.4787. 从图2可以看出,频率剩余越靠近0,

所提算法的估计精度越高. 另一方面,又因为两目标的多普勒信号相干,因此影响了对目标1的估计精度. 当相干源更多时,U-ESPRIT算法将完全失效,一般空间平滑算法需要牺牲更多的自由度,而本文算法结果与图5类似,故不再列出.

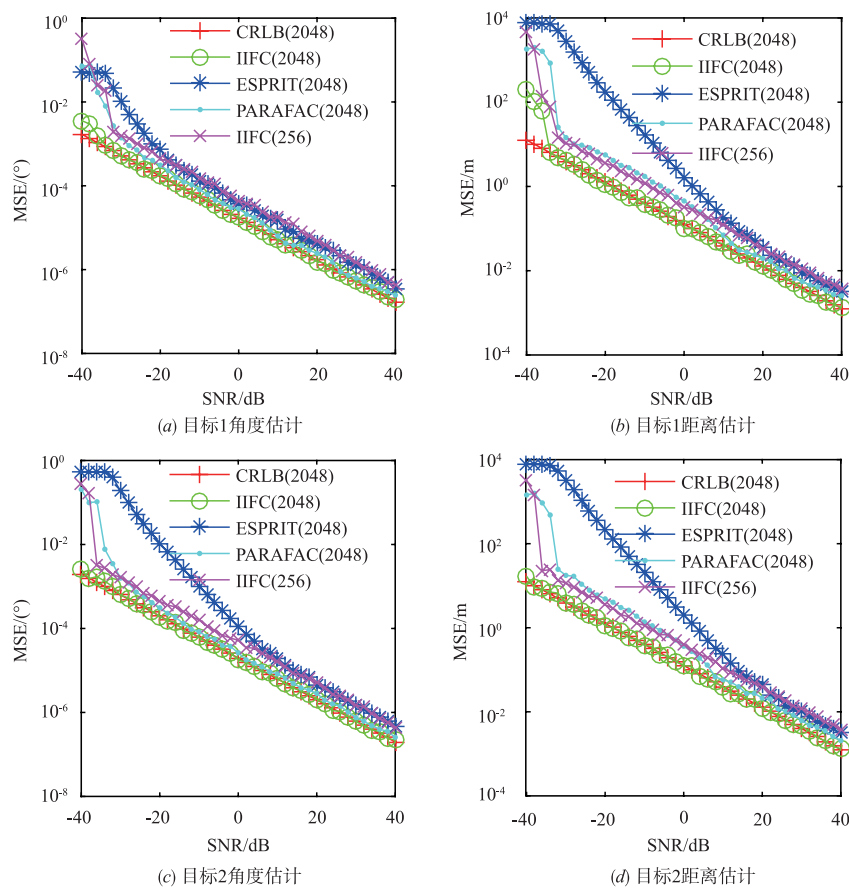


图4 两目标参数不同时的仿真结果

#### 4.4 随机多个目标时的情况

考虑观测场景有多个目标时,随机分配目标位置与多普勒,如表1所示. 设定信噪比为0dB,其余参数设置同上,仿真100次以考察算法在多目标时的定位分布性能. 其中坐标分别为 $[-5.588^\circ, 13251.519\text{m}]$ 、 $[4.988^\circ, 13548.595\text{m}]$ 的两个目标之间的距离小于一个常规的距离分辨单元,其定位结果如图6所示,目标真实位置用红色虚线标注. 两目标相距越近,对定位精度的影响也越大. 从图6可以看出本文算法在较多快拍数数据时定位性能非常好,两目标位置估计值围绕真实值附近波动,且波动幅度很小. 虽然在较少快拍数时定位波动的幅度变大,但此时仍与使用2048快拍数的ESPRIT算法效果相当. 这同时表明多维联合处理的

另一个优点是可以充分利用连续波体制对目标多普勒的超高分辨能力增强对目标角度和距离的分辨能力. 2018点的PARAFAC算法虽然波动范围也很小,但是其定位位置有偏差.

表1 目标位置及归一化多普勒

角度/ $^\circ$	距离/m	归一化多普勒
-5.588	13251.519	0.646
4.988	13548.595	0.523
43.034	10736.635	0.324
-43.073	3221.629	0.280
-2.292	8498.682	0.001

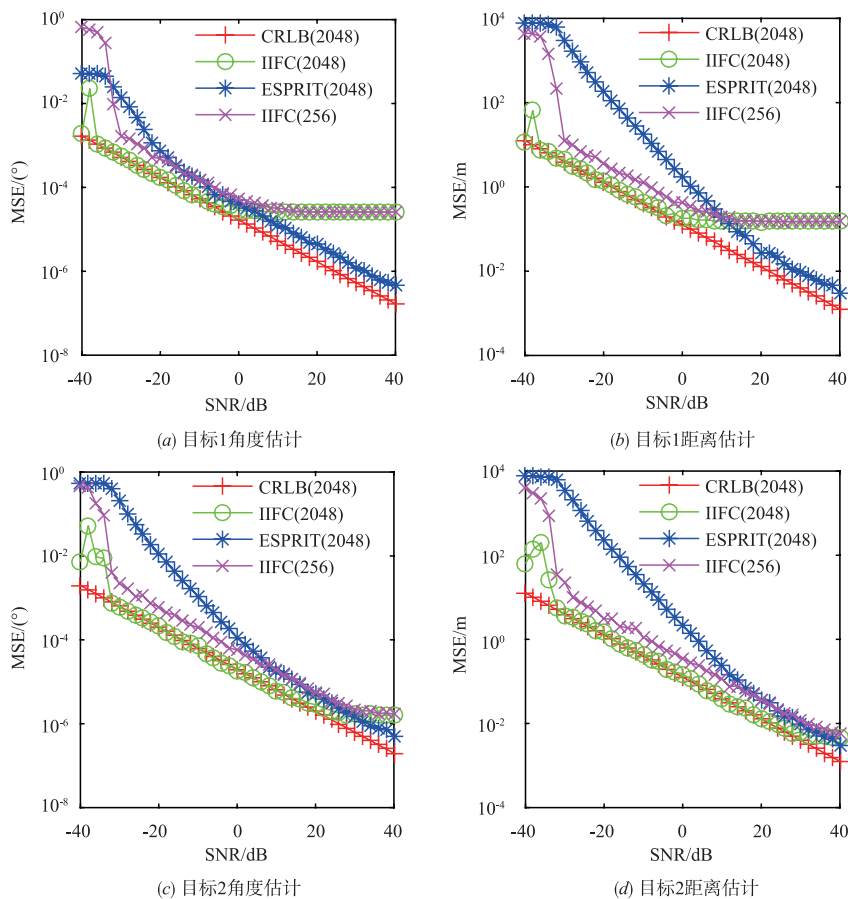


图5 两目标参数不同时的仿真结果

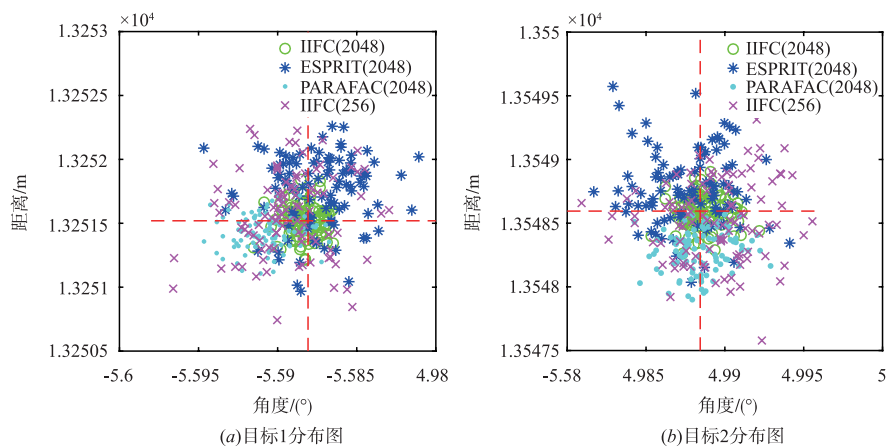


图6 目标定位结果分布图

### 5 结论

类似于阵列在空域采样可得到角度测量,时域采样可得到速度(多普勒)测量,多频连续波雷达通过发射不同频率实现对距离维的采样,从而实现距离测量,这为雷达测距提供了一个新思路.同时,相比传统的频控阵,多频连续波雷达可得到一个解耦的角度-距离波

束图,因此可以实现角度-距离联合定位.多频连续波雷达还体现了 MIMO 的思想,即在发射端发射正交波形,在接收端将波形分离.这种雷达适用于高精度测向和测距场合,如汽车辅助驾驶、靶场定位等,还可以通过发射调制波形实现雷达通信一体化.

综上,本文给出了多频连续波雷达的测距原理,推导了四种工作模式的信号模型,并分析了多频连续波

雷达可解耦的原因,给出了解耦的波束形成结果.重点针对其中的单发多收模式,提出了一种基于迭代插值傅里叶系数的角度-距离联合定位方法,理论分析了算法的性能,给出了单发多收模式下角度、距离估计的克拉美罗下限,仿真结果显示了算法的有效性.本文主要从理论的角度考虑噪声背景下多频连续波雷达及角度-距离联合定位方法的表现,下一步工作重点是实现多频连续波雷达的工程验证机和研究杂波背景下多频连续波雷达的应用问题.

#### 参考文献

- [1] Antonik P, Wicks M C, Griffiths H D, et al. Frequency diverse array radars [A]. 2006 IEEE Conference on Radar [C]. Verona, New York, USA: IEEE, 2006.
- [2] Secmen M, Demir S, Hizal A, et al. Frequency diverse array antenna with periodic time modulated pattern in range and angle [A]. 2007 IEEE Radar Conference [C]. Boston, Massachusetts, USA: IEEE, 2007. 427 – 430.
- [3] Wang W Q, Shao H. Range-angle localization of targets by a double-pulse frequency diverse array radar [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2014, 8 (1): 106 – 114.
- [4] Wang W Q. Phased-MIMO radar with frequency diversity for range-dependent beamforming [J]. IEEE Sensors Journal, 2013, 13(4): 1320 – 1328.
- [5] Wang W Q. Range-angle dependent transmit beam pattern synthesis for linear frequency diverse arrays [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2013, 61(8): 4073 – 4081.
- [6] Wang W Q, So H C, Farina A. An overview on time/frequency modulated array processing [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2017, 11(2): 228 – 246.
- [7] Wang W Q. Subarray-based frequency diverse array radar for target range-angle estimation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2014, 50(4): 3057 – 3067.
- [8] Wang W Q, So H C. Transmit subaperturing for range and angle estimation in frequency diverse array radar [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(8): 2000 – 2011.
- [9] Gao K, Shao H, Chen H, et al. Impact of frequency increment errors on frequency diverse array MIMO in adaptive beamforming and target localization [J]. Digital Signal Processing, 2015, 44: 58 – 67.
- [10] Xu J, Zhu S, Liao G. Space-time-range adaptive processing for airborne radar systems [J]. IEEE Sensors Journal, 2015, 15(3): 1602 – 1610.
- [11] Xiong J, Wang W Q, Gao K. FDA-MIMO radar range-angle estimation: CRLB, MSE, and resolution analysis [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, 54(1): 284 – 294.
- [12] Wen C, Peng J, Zhou Y, et al. Enhanced three-dimensional joint domain localized STAP for airborne FDA-MIMO radar under dense false-target jamming scenario [J]. IEEE Sensors Journal, 2018, 18(10): 4154 – 4166.
- [13] Li X, Wang D, Ma X, et al. FDS-MIMO radar low-altitude beam coverage performance analysis and optimization [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(9): 2494 – 2506.
- [14] Xu J, Liao G, Zhu S, et al. Joint range and angle estimation using MIMO radar with frequency diverse array [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(13): 3396 – 3410.
- [15] Xu J, Zhu S, Liao G. Range ambiguous clutter suppression for airborne FDA-STAP radar [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2015, 9(8): 1620 – 1631.
- [16] Xu J, Liao G, Zhang Y, et al. An adaptive range-angle-Doppler processing approach for FDA-MIMO radar using three-dimensional localization [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2017, 11(2): 309 – 320.
- [17] Xu J, Liao G, Huang L, et al. Robust adaptive beamforming for fast-moving target detection with FDA-STAP radar [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(4): 973 – 984.
- [18] Liu Y, Ruan H, Wang L, et al. The random frequency diverse array: a new antenna structure for uncoupled direction-range indication in active sensing [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2017, 11(2): 295 – 308.
- [19] Qin S, Zhang Y D, Amin M G, et al. Frequency diverse coprime arrays with coprime frequency offsets for multitarget localization [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2017, 11(2): 321 – 335.
- [20] Li J, Li H, Ouyang S. Identifying unambiguous frequency pattern for target localisation using frequency diverse array [J]. Electronics Letters, 2017, 53(19): 1331 – 1333.
- [21] Xu J, Liao G, Zhu S, et al. Joint range and angle estimation using MIMO radar with frequency diverse array [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(13): 3396 – 3410.
- [22] Aboutanios E, Mulgrew B. Iterative frequency estimation by interpolation on fourier coefficients [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(4): 1237 – 1242.
- [23] Hwang J, Chen Y. Superresolution frequency estimation by alternating notch periodogram [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(2): 727 – 741.

- [24] Djukanovic S. An accurate method for frequency estimation of a real sinusoid[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2016, 23(7):915-918.
- [25] Li J, Stoica P. Efficient mixed-spectrum estimation with applications to target feature extraction[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(2):281-295.

#### 作者简介



**陈宝欣** 男,1990年生,山东栖霞人.海军航空大学,博士生,主要研究方向为 MIMO 雷达信号处理.  
E-mail:593691780@qq.com



**关 键** 男,1968年生,辽宁锦州人,教授,博士生导师,主要研究方向为雷达目标检测、跟踪与识别,海上目标信息感知与融合.获全国优秀博士学位论文奖,新世纪百千万人才工程国家级人选.

E-mail:guanjian96@tsinghua.org.cn

**董云龙** 男,1974年生,天津宝坻人,副研究员,主要研究方向为雷达组网、多传感器信息融合.

E-mail:china\_dyl@sina.com

**黄 勇** 男,1979年生,湖南汨罗人.副教授,主要研究方向为雷达目标检测与跟踪、阵列信号处理.

E-mail:huangyong\_2003@163.com

**陈小龙** 男,1985年生,山东烟台人.副教授,主要研究方向为海杂波中微弱目标检测.

E-mail:cxlxl1209@163.com