

图嵌入方法与应用:研究综述

祁志卫¹,王笳辉¹,岳昆¹,乔少杰²,李劲³

(1. 云南大学信息学院,云南昆明 650500;2. 成都信息工程大学网络空间安全学院,四川成都 610225;
3. 云南大学软件学院,云南昆明 650500)

摘要: 图模型越来越广泛地应用于数据管理、知识发现和信息服务等问题中,图嵌入作为图分析和应用的重要技术手段,成为了人工智能领域研究的热点之一. 本文从图嵌入研究中面临的挑战出发,主要介绍了基于矩阵分解、基于随机游走和基于深度学习的图嵌入方法. 接着,介绍了图嵌入方法常用的测试数据集、评测标准和典型应用. 最后,总结了图嵌入未来研究的趋势和方向.

关键词: 图模型; 图嵌入方法; 图嵌入应用; 测试数据集; 评测标准

中图分类号: TP3-0 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2020)04-0808-11

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2020.04.023

Methods and Applications of Graph Embedding: A Survey

QI Zhi-wei¹, WANG Jia-hui¹, YUE Kun¹, QIAO Shao-jie², LI Jin³

(1. School of Information Science and Engineering, Yunnan University, Kunming, Yunnan 650500, China;
2. School of Cybersecurity, Chengdu University of Information Technology, Chengdu, Sichuan 610225, China;
3. School of Software, Yunnan University, Kunming, Yunnan 650500, China)

Abstract: Graphs are increasingly used in data management, knowledge discovery and information services. As an important strategy of graph analysis and applications, graph embedding has become one of the subjects with great attention in artificial intelligence. Starting from the challenges faced in graph embedding studies, this paper introduces the principal methods based on matrix decomposition, random walk and deep learning. Then, we introduce general test datasets, evaluation criteria as well as typical applications widely used in graph embedding. Finally, we summarize the trend and future research issues of graph embedding.

Key words: graph model; graph embedding method; graph embedding application; test datasets; evaluation metrics

1 引言

真实世界中的复杂系统通常都可以建模为图的结构^[1-3],用图中的节点或节点属性表示真实网络系统中的实体或实体标签,用图中的边表示真实网络中的实体关系,通过图嵌入(Graph Embedding, GE)研究,可更好地分析真实网络系统的结构和性质,如在微信网络中为用户推荐好友或感兴趣的内容和广告等^[4]. 鉴于以上应用的重要价值,近年来图嵌入引起了学界和业界的广泛关注.

大数据背景下,图结构或图数据呈现出了海量、高维、稀疏、异构、复杂和动态等特点,图嵌入也面临以下

五个方面的挑战:节点海量性、节点属性信息的融合、图的异构性^[5,6]、节点动态增量性^[7]和模型的非线性. 在图数据分析的研究中,可采用包括图嵌入、模型构建以及问题求解这三个步骤的支撑技术,图嵌入是最关键的步骤,是一种图表示学习(Graph Representation Learning)方法,需要将高维向量映射到低维空间,而图表示学习未必要求嵌入向量映射到低维空间^[8]. 图嵌入方法根据其对象不同可分为两类,一类是整个图的嵌入,只涉及小规模图,另一类是大规模图中节点或边的嵌入,本文阐述后一类图嵌入方法和应用的支撑技术. 在此,图嵌入方法需实现以下两方面的目标:一是在低维空间中学习得到的嵌入向量可重构原图结构,二是

收稿日期: 2018-12-17; 修回日期: 2019-04-26; 责任编辑: 李勇锋

基金项目: 国家自然科学基金(No. U1802271, No. 61562091, No. 61772091, No. 61802035); 云南省基础研究计划杰出青年项目(No. 2019 杰青-2); 云南省应用基础研究计划(No. 2016FB110); 云南省教育厅科研基金(No. 2018JS013)

学习得到的嵌入向量可支持图的推理分析^[1].

针对图嵌入这一研究热点,已经有一些综述文献^[8-12]对其进行阐述.文献[9,10]对图嵌入的各种主流技术和方法进行了深入探究与分析,仍有必要进一步对比不同图嵌入方法在各类应用上的性能表现;文献[8,11]针对基于矩阵分解、随机游走和深度学习这三种图嵌入方法的基本思想和关键技术进行了阐述分析,仍需要进一步分析对比不同图嵌入方法的优缺点;文献[12]分别从网络结构和外部信息这两个方面讨论网络表示学习的基本思想,以及针对具体应用中的性能测试指标,仍需要从实际应用的角度阐述各种图嵌入方法的具体实现步骤.

因此,针对现有的图嵌入方法及应用,全面阐述各类方法的核心技术、分析对比其优缺点,并概括其测试数据集、评测标准和应用场景,深入研究图嵌入的新方法、探索面向实际应用的图嵌入解决方案和支撑技术,仍具有重要的意义,正是本文对图嵌入方法与应用进行综述的出发点.

2 图嵌入问题及定义

2.1 图嵌入问题

图嵌入是将图的节点或边映射到一个低维的向量空间,即将海量、高维、异构、复杂和动态的数据表示为统一、低维、稠密的向量,用以保存图的结构和性质,旨在实现节点分类与聚类、链接预测、图的重构和可视化等,提供一种具有更低计算复杂度的方法.图1展示了图嵌入研究的技术路线图.

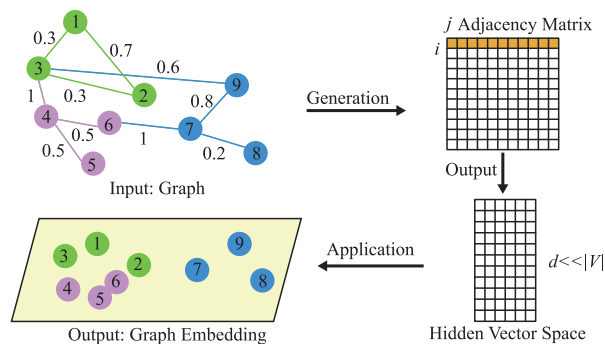


图1 图嵌入技术路线

2.2 相关定义

首先,表1给出相关符号及其含义^[14],作为后续讨论的基础.

定义1^[8] 图表示为 $G = (V, E)$, 其中 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 为 G 中节点的集合, $E = \{e_{i,j} \mid \forall i, j \in [n], i \neq j\}$ 为 G 中边的集合. G 的邻接矩阵 \mathbf{W} 包含了其中所有边的非负数值,即 $\mathbf{W}_{ij} \geq 0$. 若节点 v_i 和节点 v_j 之间没有边直接

相连,则 $\mathbf{W}_{ij} = 0$. 在无向图中, $\mathbf{W}_{ij} = \mathbf{W}_{ji}$. 一般地,用权重 \mathbf{W}_{ij} 表示 v_i 和 v_j 之间的相似性,权重越大、节点之间就越相似.

为了保持图的结构和性质,文献[10]定义了一阶相似性和二阶相似性.

定义2 节点 v_i 和 v_j 的一阶相似性定义为 v_i 和 v_j 之间边上的权重,即 $s_{ij}^{(1)} = \mathbf{W}_{ij}$. 将节点 v_i 与其他节点的一阶相似性记为 $\mathbf{s}_i^{(1)} = [s_{i1}^{(1)}, \dots, s_{i(i-1)}^{(1)}, \dots, s_{i|V|}^{(1)}]$.

定义3 若节点 v_i 和 v_j 拥有相似的邻居结构,则称 v_i 和 v_j 间具有二阶相似性,表示为 $s_{ij}^{(2)}$, $s_{ij}^{(2)}$ 是 $\mathbf{s}_i^{(1)}$ 与 $\mathbf{s}_j^{(1)}$ 相似性计算的结果. 高阶相似性类似于二阶相似性,记作 $s_{ij}^{(k)}$, $k > 2$.

定义4 $G = (V, E)$ 的嵌入是将其映射到一个低维向量空间,其映射函数被定义为 $f: v_i \rightarrow Y_i \in \mathbb{R}^d, \forall i \in [n], d \ll |V|$, f 能充分保存图的 k ($k \geq 1$) 阶相似性.

表1 符号及含义

Notation	Description
$G = (V, E)$	G is the graph; V is the set of the nodes; E is the set of edges
$v_i, e_{i,j}$	Nodes $v_i, v_j \in V$ ($i \neq j$), an edge $e_{i,j} \in E$ connecting v_i and v_j
\mathbf{W}	Adjacent matrix with $ V $ rows and $ V $ columns
\mathbf{D}	Diagonal matrix with $ V $ rows and $ V $ columns
d	Dimensionality of the embedding
\mathbf{Y}	Embedding of the nodes in G
\mathbf{Y}_i	Embedding of node v_i
\mathbf{Y}_s	Source embedding of a directed graph
\mathbf{Y}_t	Target embedding of a directed graph
\mathbf{L}	Graph Laplacian ($\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$)
$\langle \mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j \rangle$	Inner product of \mathbf{Y}_i and \mathbf{Y}_j
\mathbf{S}	Similarity matrix of G
$s_{ij}^{(1)}, s_{ij}^{(2)}$	First-order and second-order proximity between node v_i and v_j

3 图嵌入方法

早期的图嵌入方法只作为一种降维技术,典型的算法是 LE (Laplacian Eigenmap)^[13]、Isomap (Isometric Feature Mapping)^[14] 和 LLE (Locally Linear Embedding)^[15]. 但是,这几种算法的时间复杂度是 $O(|V|^2)$, 尤其是在大规模图的应用中,其扩展性较差.

从2010年起,面对大规模且稀疏的真实网络,学者们开始研究应用更广泛的图嵌入技术^[8],如 DeepWalk^[16]、Text-Associated DeepWalk (TADW)^[17]、Discriminative Matrix Factorization (DMF)^[18], 这些技术除了实现图的降维以外,还可实现节点分类与聚类、链接预测、图的重构和可视化等.

最近,随着图嵌入技术越来越受到关注,人们针对

不同应用场景提出了不同的图嵌入算法和模型,主要包括基于矩阵分解的图嵌入方法^[13-15,19-21]、基于随机游走的图嵌入方法^[16,22,23]、基于深度学习的图嵌入方法^[24-26],目前具有代表性的方法由表 2 概括.下面分别阐述上述几种典型的图嵌入方法.

3.1 基于矩阵分解的图嵌入方法

基于矩阵分解的方法的思想是用矩阵表示图中节点之间的关联信息,通过矩阵分解方法对图的关联矩阵进行降维,为每个节点生成一个低维向量.其中,用矩阵表示图的方法包括拉普拉斯矩阵和邻接矩阵等.具体研究中,根据矩阵性质选择合适的矩阵分解方法,目前可分为两类,一类是基于图拉普拉斯特征映射的分解(Graph Laplacian Eigenmap Factorization),另一类是相似矩阵的分解(Node Proximity Matrix Factorization)^[11].

表 2 图嵌入方法概括

Matrix Factorization	Random Walk	Deep Learning	Others
LE ^[13]	DeepWalk ^[16]	SDNE ^[24]	LINE ^[27]
CGE ^[19]	Node2vec ^[22]	DNGR ^[25]	NEU ^[28]
Isomap ^[14]	Metapath2vec ^[23]	GraphSAGE ^[26]	CDK ^[29]
LLE ^[15]	-	-	DeepCas ^[30]
GraRep ^[20]	-	-	TransE ^[31]
HOPE ^[21]	-	-	DPMQ ^[32]

Note: “-” means that the method is not concerned.

3.1.1 基于图拉普拉斯特征映射的矩阵分解

图拉普拉斯特征映射的基本思想是用节点对的相似性来保持图的性质,在图嵌入过程中,如果相似的节点对被映射到向量空间中的距离更远,该方法就给予这对节点更大的罚值.基于这一思想,该方法使用如下目标函数来实现节点对的低维映射:

$$Y = \sum_{i \neq j} (Y_i - Y_j)^2 W_{ij} = 2Y^T L Y \quad (1)$$

其中, L 是 G 的拉普拉斯矩阵, $L = D - W$, D 是对角矩阵, $D = \sum_j W_{ji}$, D_{ii} 值越大, Y_i 的嵌入越重要.目标函数的最小化问题可描述为:

$$Y = \min_{Y^T D Y = 1} Y^T L Y = \min \frac{Y^T L Y}{Y^T D Y} \quad (2)$$

式(2)中的约束条件是 $Y^T D Y = 1$,可消除嵌入中的平凡解.以下几种流形学习方法都可归结为拉普拉斯特征映射方法,如经典的LE^[13]、CGE(Cauchy Graph Embedding)^[19]和Isomap^[14]等.这些方法的不同之处在于,对邻接矩阵 W_{ij} 采用的计算方法不同,或者是在目标函数中是否引入线性函数 $Y = X^T a$ 等.表3归纳了现有的基于拉普拉斯特征映射的典型嵌入方法,并比较了不同 W_{ij} 的计算方法和不同嵌入方法所使用的目标函数.

3.1.2 基于节点相似性的矩阵分解

基于节点相似性的矩阵分解用矩阵分解方法在低维空间中渐进地模拟图中相似的节点,从而保存节点的相似性,在给定图的原嵌入向量矩阵 Y 情况下,最小化以下损失函数获得最终的 d 维嵌入向量:

$$Y^* = \min \| Y - Y_s Y_t^T \| \quad (3)$$

其中, Y_s 和 $Y_t \in \mathbb{R}^{|V| \times d}$, Y_s 和 Y_t 分别是低维空间中源节点和目标节点的嵌入向量.通常,使用SVD(Singular Value Decomposition)对原嵌入向量矩阵 Y 分解,方法如下:

$$Y = \sum_{i=1}^{|V|} \sigma_i u_i u_i^T \approx \sum_{i=1}^d \sigma_i u_i u_i^T \quad (4)$$

$\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{|V|}\}$ 是以降序排序的奇异值, u_i 和 u_i^{cT} 分别是奇异值 σ_i 对应的奇异向量,嵌入的目的是获得最大的 d 个奇异值和奇异向量,具体表示形式为:

$$Y_s = [\sqrt{\sigma_1} u_1, \dots, \sqrt{\sigma_d} u_d] \quad (5)$$

$$Y_t = [\sqrt{\sigma_1} u_1, \dots, \sqrt{\sigma_d} u_d] \quad (6)$$

节点 i 的嵌入形式为 Y_i 或 $[Y_i, Y_i]$,采用何种形式主要取决于是否保持图的非对称结构.目前,除了用SVD对基于节点相似性矩阵进行分解之外,还可以用其他矩阵分解法对其进行分解.表4总结了LLE^[15]、GraRep(Graph Representation)^[20]和HOPE(High-Order Proximity Preserved Embedding)^[21]这三种基于节点相似性矩阵分解的图嵌入方法.

3.2 基于随机游走的图嵌入方法

基于随机游走的图嵌入方法由自然语言处理中的词-向量(Word2vec)模型^[33,34]演化而来,通常能很好地表示图中节点之间的相互关系.尤其针对大规模图中无法观察到图的整体、而图的局部关系较容易发现的情形,基于随机游走的图嵌入方法表现优异.该方法采用不同的游走策略获取图的局部结构和全局结构,并且生成节点序列,再利用Skip-Gram算法^[33]完成图中节点的降维嵌入.但对于同构和异构图,由于其具有不同结构,可采用不同的基于随机游走的嵌入方法,见表5.

3.2.1 同构网络中的随机游走

深度游走(DeepWalk)^[16]是基于Word2vec提出的一种图嵌入方法,是语言模型和无监督学习从单词序列到图上的一种扩展,首先随机生成网络中节点的邻居节点,形成定长的随机游走序列,再用Skip-Gram模型对生成的定长节点序列映射成低维嵌入向量.该方法能学习到节点对的关系信息,时间复杂度为 $O(\log |V|)$,实现了动态图的增量学习.但是,该方法不适合带权图,只能保持图的二阶相似性;有限的步长会影响上下文信息的完整性;面对大规模的图,调整超参数较复杂,且游走步数超过 2^5 后嵌入效果不够显著.

表 3 基于图拉普拉斯特征映射的图嵌入方法

Method	Adjacent Matrix	Objective Function	Structure and Properties Preserved	Global / Local Optimization
LE	$W_{ij} = \exp - \ x_i - x_j\ ^2 / t$	$\min_Y \sum_{i \neq j} (Y_i - Y_j)^2 W_{ij}$	Local structure, first-order proximity	Local
CGE	$W_{ij} = \exp - \ x_i - x_j\ ^2 / \bar{d}^2,$ $\bar{d} = (\sum_{i \neq j} Y_i - Y_j) / (n(n-1))$	$\max_Y \sum_{i,j} W_{ij} / Y_i - Y_j ^2 + \sigma^2$	Local structure, first-order proximity	Local
Isomap	W_{ij} is the sum of edge weights along the shortest path between node v_i and v_j	$\min Y^T L Y$	Local structure, first-order proximity	Global

表 4 基于节点相似性矩阵分解的图嵌入方法

Method	Similarity Matrix	Matrix Factorization Methods	Objective Function	Structure and Properties Preserved	Global / Local Optimization
LLE	$W^* = \min \sum_i \ X_i - \sum_j W_{ij} X_j\ ^2$	Lagrange Multiplier	$\min \sum_i \ Y_i - \sum_j W_{ij} Y_j\ ^2$	Local structure, first-order proximity	Local
GraRep	$A = D^{-1} W,$ $D_{ij} = \begin{cases} \sum_p W_{ip}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$	SVD	$\min \ Y - Y_t Y_t^T\ $	Global structure, 1 st - k th order proximity	Global
HOPE	$S = M_g^{-1} M_l$	SVD	$\min \ Y - Y_t Y_t^T\ $	Global structure, 1 st - k th order proximity	Global

表 5 基于随机游走的图嵌入方法

Method	Random Walk Method	Embedding Model	Objective Function	Properties Preserved	Global/Local Optimization
DeepWalk	Truncated random walk	Hierarchical Skip-Gram	$\min_{\Phi} -\log p(\{v_{i-w}, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{i+w}\} \Phi(v_i))$	Second order proximity	Local
Node2vec	Depth-first and breadth-first random walk	Skip-Gram with negative sampling	$\max_j \sum_{u \in T_Y} [-\log Z_u + \sum_{n_i \in N_s(u)} f(n_i) \cdot f(u)]$	Second order proximity	Global
Metapath2vec	Meta-path-based random walk	Heterogeneous Skip-Gram	$\max_{\theta} \sum_{u \in V} \sum_{t \in T} \sum_{v \in N_t(v)} \log p(c_t v; \theta)$	Second order proximity	Local

节点-向量模型 (Node2vec)^[22] 也是通过改进 Word2vec 模型而建立的一种随机游走方法,通过分别调整广度优先游走 (Breadth-First Search, BFS) 和深度优先游走 (Depth-First Search, DFS) 策略的参数,来获取图的全局结构和局部结构. 具体步骤包

括:计算转移概率,结合 BFS 和 DFS 生成随机游走序列,用 Skip-Gram 模型对生成的游走序列进行嵌入. 其优点是每一步都能可并行处理,能保持语义信息和结构信息,但对于含有特定属性的节点嵌入效果仍有待提高.

3.2.2 异构网络中的随机游走

元路径-向量模型 (Metapath2vec)^[23] 也是一种由 Word2vec 模型改进并应用到异构网络上的图嵌入方法,采用基于元路径的随机游走策略得到的嵌入效果,明显优于基于同构网络的随机游走方法在异构网络上的嵌入效果.具体步骤包括:对网络中的节点建立元路径,根据节点在元路径中的距离和节点之间的语义关系生成游走序列,对节点序列采用 Skip-Gram 模型实现节点嵌入.但是,该方法在大规模图上的嵌入效果不佳,且不能自动学习有意义的元路径,也不能实现节点嵌入的增量更新.

3.3 基于深度学习的图嵌入方法

随着深度学习研究的快速推进,越来越多的神经网络技术应用于图分析中,旨在改进基于浅层模型实现图嵌入的方法,因为浅层模型无法捕获高度非线性结构,进而导致非最优解的生成.目前,典型的深度学习模型有 SDNE^[24]、DNNGR^[25] 和 GraphSAGE^[26] 等,见表6,都是基于编码器-译码器框架的模型.其中,编码阶段是将图中的节点映射为一个低维嵌入向量,译码阶段是将学习的到的低维嵌入向量重构为原图,具体如下:

$$ENC: V \rightarrow \mathbb{R}^d; DEC: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad (7)$$

$$DEC(ENC(v_i), ENC(v_j)) = DEC(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j) \approx \mathbf{s}(v_i, v_j) \quad (8)$$

$$\mathcal{L} = \sum_{v_i, v_j \in V} \ell(DEC(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j), \mathbf{s}(v_i, v_j)) \quad (9)$$

其中,ENC 是编码函数,主要生成节点嵌入向量;DEC 是译码函数,主要从节点嵌入向量重构原图中节点的相似性; $\mathbf{s}(v_i, v_j)$ 是表示节点间的相似性; ℓ 是损失函数,用以优化训练模型,使预测的节点相似度尽可能接近真实值.

表6 基于深度学习的图嵌入方法

Method	Deep Learning Model	Objective Function	Structure and Properties Preserved	Global/Local Optimization
SDNE	Autoencoder	$\sum_{v_i \in V} \ DEC(\mathbf{Y}_i), \mathbf{s}_i\ _2^2$	Local and global structure, first and second order proximity	Local optimization
DNNGR	Stacked denoising autoencoders	$\sum_{v_i \in V} \ DEC(\mathbf{Y}_i), \mathbf{s}_i\ _2^2$	Global structure, 1 st - k^{th} order proximity	Global optimization
GraphSAGE	Graph convolutional network	$\sum_{v_i, v_j \in V} \ell(DEC(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_j), \mathbf{s}(v_i, v_j))$	Global structure, 1 st - k^{th} order proximity	Global optimization

3.4 其他图嵌入方法

其他图嵌入方法,主要包括前述图嵌入方法扩展、以及基于其他理论或技术的图嵌入方法.

基于矩阵分解、随机游走和深度学习的图嵌入扩展方法,具有代表性的是 LINE (Large-scale Information

结构化深度网络嵌入 (Structural Deep Network Embedding, SDNE)^[24] 是一种深度自动编码器,它保持网络的一阶和二阶相似性,通过高度的非线性函数和优化目标函数来获得最终的嵌入向量,首先求 K 层的隐嵌入向量 $y_i^{(k)}$ 和输出数据 \hat{x}_i ,再求损失函数,最后用随机梯度下降法优化整个深度学习模型.该方法能保持图的一阶和二阶相似性,但面对百万级的节点数量时运行效率较低,且该模型无法实现图的增量更新.

基于深度神经网络的图表示学习 (Deep Neural Networks for Learning Graph Representation, DNNGR)^[25] 是结合随机漫游和深度自动编码器的方法,主要解决传统线性降维方法无法保持图非线性结构的问题,具体步骤包括:用随机漫游算法生成概率共现矩阵 (Probabilistic Co-Occurrence Matrix, PCO Matrix),由概率共现矩阵计算正点互信息矩阵 (PPMI Matrix),用栈式降噪自动编码器生成具有高阶相似性的图嵌入.该方法能获得图的复杂特征和非线性结构,采用 PPMI Matrix,避免对大量无效节点的嵌入.然而,深度学习模型调参较复杂,无法实现图的增量更新.

基于图采样和聚合的图嵌入 (Graph SAmple and aggreGatE, GraphSAGE)^[26] 是利用节点的特征信息,通过改进的图卷积网络生成新增节点或新增子图的嵌入向量,最终能实现节点嵌入的增量更新和保持图的特征信息和结构信息,具体步骤包括:类似广度优先遍历的方式对图中每个节点的 k 深度邻近节点进行采样,用聚类函数对每个节点的邻近节点特征信息进行聚类,用非线性激活函数生成新的嵌入向量.但是,当采样深度 k 大于 2 时,性能明显下降,能否采用非均值采样的方法,且能否在有向图上实现优异的性能,目前仍不明确.

Network Embedding)^[27] 和 NEU (Network Embedding Update)^[28] 等. LINE 通过 KL 散度 (Kullback-Leibler Divergence),最小化由邻接矩阵生成的节点对概率分布和由嵌入内积产生的概率分布之间的距离,最终实现图嵌入的最优化. NEU 概括了构造相似矩阵和降维的网络

嵌入步骤,并得出了以下结论:构造更高阶、更准确的相似矩阵可以提高网络嵌入的质量;准确地计算高阶相似矩阵对于大规模网络并不可行。

基于信息传递的图嵌入方法,主要包括 CDK (Content Diffusion Kernel)^[29] 和 DeepCas (End-to-end Deep Learning Architecture)^[30]. CDK 是运用热传递核理论 (Heat Diffusion Kernel) 将图中不同信息级联 (Information Cascade) 路径中的节点嵌入到欧式空间中,用随机梯度下降法优化目标函数,使得信息级联路径中较近的节点对在嵌入后对应向量的距离也较近. DeepCas 是将一个信息级联图,用深度学习的门控循环单元 GRU (Gated Recurrent Unite) 模型嵌入到一个向量空间,用于预测图中信息级联的增量。

基于知识表示的图嵌入方法,主要以翻译模型 (Relationships as Translations in The Embedding Space,

TransE)^[31] 为代表,受到 Word2vec 中词向量空间平移不变现象的启发,Bordes 等^[31] 提出了 TransE 模型,将知识库中词汇的语义关系看作向量空间中实体向量间的某种平移向量,优点是简单有效. 目前有大量研究工作对 TransE 进行扩展,如对其改进的模型有 TransH^[35]、TransR^[36]、TransD^[37]、TranSparse^[38] 和 KG2E^[39] 等。

基于图数据库的图嵌入方法中,DPMQ (Distance-Based Pattern Match Queries)^[32] 将图数据库生成的图节点用 LLR (Linial, London and Robinovich)^[40,41] 方法转化成空间中的向量,将图中模式匹配查询问题转化成向量空间中基于距离的多向联结 (Multi-way Joint) 问题,提高了查询的效率,降低了图中节点之间最短距离的计算复杂度;但是,基于图嵌入向量之间的距离实现模式匹配的查询相当于近似查询,查询结果未必正确。

表 7 图嵌入测试数据集

Graphic Property	Social Network				Language Network	Collaboration Network			Biology Network
	KARATE	BLOGCATALOG	YOUTUBE	FLICKR	WIKIPEDIA	HEP-TH	ASTRO-PH	Cora	PPI
V	34	88,784	1,157,827	105,938	1,985,098	27,770	18,772	24,911	3,890
E	78	4,186,390	4,945,382	2,316,948	1,000,924,086	352,807	198,110	582,021	38,739
Avg. degree	4.59	94.31	8.54	43.74	1008.44	25.41	21.11	46.73	19.92
No. of labels	4	39	47	-	7	-	-	-	50
Weighted / Unweighted Graph	Unweighted	Unweighted	Unweighted	Unweighted	Weighted	Unweighted	Unweighted	Unweighted	Unweighted
Directed / Undirected Graph	Directed	Undirected	Directed	Undirected	Undirected	Directed	Undirected	Directed	Undirected

表 8 图嵌入应用评测指标

Application	Node Classification	Node Clustering	Link Prediction	Graph Reconstruction	Visualization
Evaluation Metrics	Micro-F1	Homogeneity	AUC	MAP	t-SNE
		Completeness	Precision@ k	Precision@ k	
	Macro-F1	NMI	MAP		
		Silhouette_Score	F1-Score		

4 测试数据集与评测标准

图嵌入的研究中,可根据图嵌入应用的特点和需求选择相应的测试数据集和评测标准. 常用的图嵌入数据集包括社交网络、语言网络、合作网络和生物网络的数据集,测试数据集包含多种属性信息,如有向/无向、有权重/无权重和图中节点的数量、边的数量、平均度数以及节点标签数等. 表 7 给出了 KARATE^①、BLOGCATALOG^②、YOUTUBE^③ 以及 FLICKR^④ 等社交网络数据集,WIKIPEDIA^{⑤⑥} 语言网络数据集,HEP-TH^⑦、

ASTRO-PH^⑧、Cora^⑨ 等合作网络数据集,以及 PPI^⑩ (Pro-

① https://en.wikipedia.org/wiki/Zachary%27s_karate_club

② <http://socialcomputing.asu.edu/datasets/BlogCatalog>

③ <http://socialnetworks.mpi-sws.org/data-ipc2007.html>

④ <http://snap.stanford.edu/data/web-flickr.html>

⑤ http://downloads.dlbpedia.org/3.9/en/long_abstracts_en.nq.bz2

⑥ http://downloads.dlbpedia.org/3.9/en/article_categories_en.nq.bz2

⑦ <http://konect.uni-koblenz.de/networks/cit-HepPh>

⑧ <http://snap.stanford.edu/data/ca-AstroPh.html>

⑨ <http://wwwlovre.appspot.com/support.jsp>

⑩ <http://konect.uni-koblenz.de/networks/maayan-vidal>

tein-Protein Interactions)生物网络数据集.

图嵌入针对于图的不同应用,一般使用不同的评价标准.对于某些应用来说,也会使用多个评测指标共同测量图嵌入方法的性能,表8概括了针对不同应用采用的不同评测指标.节点分类一般使用 Micro-F1 和 Macro-F1^[34,42-44]评价分类结果的好坏;节点聚类一般使用 Homogeneity、Completeness、NMI(Normalized Mutual Information)^[41]、Silhouette Score 等参数来评测^[45];链接预测通常使用 AUC(Area Under the Curve of ROC)^[18,24]、Precision@k 以及 MAP(Mean Average Precision)来评测;图重构一般使用 Precision@k 和 MAP 计算节点与边重构的准确率与精度;图嵌入一般使用 t-SNE(t-distributed Stochastic Neighbor Embedding)^[46]对结果进行展示.

5 图嵌入应用

图嵌入应用主要包括节点分类与聚类、链接预测、图的重构和可视化这五类,见表9.传统的基于矩阵分解的图嵌入方法广泛应用于节点聚类和节点分类,基于随机游走和深度学习的图嵌入方法广泛应用于节点分类和链接预测,而在图的重构和可视化应用上仍需进一步研究.

(1)节点分类,可以通过图中带标签的节点和节点间的关系信息推断其他节点的标签信息^[47],广泛用于社区发现^[44,48]、异常检测^[49]和推荐任务^[50]等. Metapath2vec 和 NEU 分别用 LE(Linear Regression)和 SVM(Support

Vector Machine)分类器对数据集分类,根据评测指标 Micro-F1 和 Macro-F1,NEU 和 Metapath2vec 在节点分类结果上表现较好.

(2)节点聚类,包括基于结构的和基于节点属性信息的聚类^[51],主要用于社区发现^[44,48]、异常检测^[52]和推荐任务^[50].根据评测指标 NMI, Metapath2vec 和 GraRep 生成的嵌入向量用 K-means 算法进行聚类,结果表现优异.

(3)链接预测,能实现图中缺失关系的预测或新增节点的相关关系预测^[52],通过计算节点嵌入向量间相似性来预测边的演化过程^[29,30].根据评测指标 Precision@k,SDNE 在链接预测上性能表现优异.

(4)图重构,不同于链接预测,一方面,前者用于重构已经存在的边,而后者用于预测未知或可能存在的边;另一方面,前者是将整个图的节点作为训练集,然后在测试阶段将图中所有边都移除,进而预测所有节点对的边,后者只是将图中一部分节点的边移除,这部分节点作为测试集,其他部分的节点作为训练集.此外,在评测标准方面,链接预测一般采用 AUC 作为评测标准,图重构一般采用 Precision@k 和 MAP 作为评测标准.文献[24]中的实验结果表明,SDNE 的图重构性能较好.

(5)图嵌入可视化,是将二维空间中的嵌入向量进行展示,使人们能更加形象地理解图的拓扑结构,通常采用 PCA 和 t-SNE^[46]实现.

表9 图嵌入应用分类

Graph Embedding Methods		Application Classification				
		Node Classification	Node Clustering	Link Prediction	Graph Reconstruction	Visualization
Matrix Factorization	LE ^[13]	-	√	-	-	-
	CGE ^[19]	√	√	-	-	√
	Isomap ^[14]	-	√	-	-	-
	LLE ^[15]	-	√	-	-	-
	GraRep ^[20]	√	√	-	-	√
	HOPE ^[21]	√	-	√	√	-
Random Walk	DeepWalk ^[16]	√	-	-	-	-
	Node2vec ^[22]	√	-	√	-	-
	Metapath2vec ^[23]	√	√	-	-	√
Deep Learning	SDNE ^[24]	√	-	√	√	√
	DNGR ^[25]	-	√	-	-	√
	GraphSAGE ^[26]	√	-	-	-	-
Others	LINE ^[27]	√	-	√	-	√
	NEU ^[28]	√	-	√	-	-

Note: "√" means that the graph embedding method could be used for the specific application, and "-" otherwise.

6 总结与展望

本文介绍了图嵌入的主要方法和应用,分析了目前图嵌入方法面临的挑战.从基本思想、实现步骤和优缺点等角度,主要总结分析了基于矩阵分解、基于随机游走和基于深度学习的图嵌入方法.同时,也总结了主要用到的数据集和实施评测的标准.最后,概括了节点分类、节点聚类、链接预测、图重构和可视化等图嵌入典型应用的基本思路.

虽然图嵌入在解决图数据稀疏问题、图相关应用的计算效率低和图信息融合度不高等问题上表现优异,但是针对不断涌现的新型应用和图模型特点,图嵌入方法和应用仍然需进一步拓展和完善.总的来看,图嵌入方法与应用的研究方向,可概括如下:

(1) 图嵌入方法方面

基于矩阵分解的图嵌入方法主要包括 Isomap、LE 和 LLE 等,容易受邻接矩阵边的约束,在保持图的二阶甚至高阶相似性方面仍存在不足.基于随机游走的图嵌入方法主要通过 Skip-Gram 生成嵌入向量,但是 Skip-Gram 属于浅层模型,对图中的复杂语义信息获取不够、且扩展性不强.基于深度学习的图嵌入方法可解释性较差.针对以上研究现状,将来可考虑对现有图嵌入方法进行改进或研究新型的图嵌入方法.

在现有图嵌入方法的改进方面,今后的研究可考虑:① 将现有的深度学习和矩阵分解方法相结合,采用深度学习技术获取更丰富的非线性结构,用矩阵分解对获取的特征向量进行降维,这样既增强了模型的可解释性又提高了算法的计算效率.② 将随机游走和矩阵分解方法相结合,通过随机游走获取节点间的二阶甚至高阶相似性而非基于矩阵的一阶相似性,然后使用矩阵分解方法对获取的特征向量进行低维嵌入,从而弥补基于随机游走和矩阵分解的图嵌入方法的不足.③ 并行图嵌入,图中节点间的耦合性较强,直接将不同节点分割到不同计算单元中实现并行计算,至今还没有高效的并行化计算方案;但是,为了应对图的大规模、复杂性和动态增量性,通过图嵌入技术将节点映射成相互独立的低维嵌入向量,研究基于并行算法的图嵌入方法成为可能,基于 MapReduce 或 Spark 等分布式计算来扩展,是实现图嵌入增量更新的有效解决方案.

在新型图嵌入方法方面,今后的研究可考虑特定图模型的嵌入方法,例如,知识图谱(Knowledge Graph, KG)和贝叶斯网(Bayesian Network, BN)^[53]分别是基于图模型的领域知识和数据中不确定性知识表示及推理的代表性知识框架,这些知识框架的嵌入,是有效克服由于高维、海量和异构等特点而带来

的计算困难性的重要思想.针对知识图谱的嵌入,既要考虑知识库中实体和关系嵌入,还要考虑多元信息融合、实体和关系的异质和不平衡问题,在信息融合方面,现有的 TransE 等模型仅利用知识图谱的三元组信息进行表示学习,大量与知识有关的其他信息没有得到有效利用^[17].针对贝叶斯网的嵌入,不仅需要考虑节点和有向边的嵌入,也要考虑条件概率参数的嵌入,贝叶斯网中节点间的概率依赖性、嵌入向量空间中对有向无环图性质的保持、基于模型嵌入结果实现概率推理、以及在嵌入结果之上进行相关计算的收益和代价权衡,是嵌入方法研究中必须考虑并体现的因素.

(2) 图嵌入应用方面

① 大规模图的重构和可视化,传统的基于矩阵分解的图嵌入方法广泛应用于节点聚类和节点分类,基于随机游走和深度学习的图嵌入方法广泛应用于节点分类和链接预测.但是,目前大多数图嵌入方法在保持图中节点间的高阶相似性还有待改进,尤其是面对大规模的图,在图重构和可视化方面效果还不理想,仍需进一步研究.② 特定应用中的图嵌入,目前图嵌入算法主要研究通用的图嵌入方法,与社区发现、节点推荐和异常检测等具体应用相结合的图嵌入仍有较大的研究空间,如社交网络中的节点不仅包含用户本身,还包含与用户相关的文字描述、评论和图片等,如何将图的异质结构和节点属性的异质性进行有效融合进行有效提取,应用于用户身份识别、个性化推荐和异常检测等实际问题,也是值得关注的方向.

参考文献

- [1] 王啸,崔鹏,朱文武.网络表征学习中的基本问题初探[J].中国计算机学会通讯,2018,14(3):11-15.
WANG Xiao, CUI Peng, ZHU Wen-wu. A preliminary research on the fundamental problems of network representation learning[J]. Communications of the CCF, 2018, 14(3):11-15. (in Chinese)
- [2] QIAO S, HAN N, GAO Y, et al. A fast parallel community discovery model on complex networks through approximate optimization[J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2018, 30(9):1638-1651.
- [3] WHITE H, BOORMAN S, BREIGER R. Social structure from multiple networks-blockmodels of roles and positions[J]. American Journal of Sociology, 1976, 81(4):730-780.
- [4] ADAMIC L, ADAR E. Friends and neighbors on the web[J]. Social Networks, 2003, 25(3):211-230.
- [5] FU T, LEE W, LEI Z. HIN2Vec: explore meta-paths in heterogeneous information networks for representation learning

- [A]. Proceedings of the 2017 ACM on Conference on Information and Knowledge Management [C]. Singapore: ACM, 2017. 1797 – 1806.
- [6] TANG J, QU M, MEI Q. Pte: Predictive text embedding through large-scale heterogeneous text networks [A]. Proceedings of the 21st ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining [C]. Sydney, Australia: ACM, 2015. 1165 – 1174.
- [7] YUE K, FANG Q, WANG X, et al. A parallel and incremental approach for data-intensive learning of Bayesian networks [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 45 (12): 2890 – 2904.
- [8] GOYAL P, FERRARA E. Graph embedding techniques, applications, and performance: A survey [J]. Knowledge-Based Systems, 2018, 151: 78 – 94.
- [9] CAI H, ZHENG V, CHANG C. A comprehensive survey of graph embedding: problems, techniques and applications [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2018, 30 (9): 1616 – 1637.
- [10] CUI P, WANG X, PEI J, et al. A survey on network embedding [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2019, 31 (5): 833 – 852.
- [11] HAMILTON W, YING R, LESKOVEC J. Representation learning on graphs: methods and applications [J]. IEEE Data Engineering Bulletin, 2017, 40 (1): 52 – 74.
- [12] 涂存超, 杨成, 刘知远, 等. 网络表示学习综述 [J]. 中国科学: 信息科学, 2017, 47 (8): 980 – 996.
TU Cunchao, YANG Cheng, LIU Zhiyuan, et al. Network representation learning: an overview [J]. SCIENTIA SINICA Informationis, 2017, 47 (8): 980 – 996. (in Chinese)
- [13] BELKIN M, NIYOGI P. Laplacian eigenmaps and spectral techniques for embedding and clustering [A]. Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems [C]. Vancouver, British Columbia, Canada: MIT Press, 2001. 585 – 591.
- [14] TENENBAUM J, DE SILVA V, LANGFORD J. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction [J]. Science, 2000, 290 (5500): 2319 – 2323.
- [15] ROWEIS S, SAUL L. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding [J]. Science, 2000, 290 (5500): 2323 – 2326.
- [16] PEROZZI B, AI-RFOU R, SKIENA S. Deepwalk: Online learning of social representations [A]. Proceedings of the 20th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining [C]. New York, USA: ACM, 2014. 701 – 710.
- [17] YANG C, LIU Z, ZHAO D, et al. Network representation learning with rich text information [A]. Proceedings of the 24th International Joint Conference on Artificial Intelligence [C]. Buenos Aires, Argentina: Morgan Kaufmann, 2015. 2111 – 2117.
- [18] TU C, LIU H, LIU Z, et al. Cane: Context-aware network embedding for relation modeling [A]. Proceedings of the 55th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics [C]. Vancouver, Canada: ACL, 2017. 1722 – 1731.
- [19] LUO D, DING C, NIE F, et al. Cauchy graph embedding [A]. Proceedings of the 28th International Conference on Machine Learning [C]. Bellevue, Washington, USA: ACM, 2011. 553 – 560.
- [20] CAO S, LU W, XU Q. Grarep: Learning graph representations with global structural information [A]. Proceedings of the 24th ACM International Conference on Information and Knowledge Management [C]. Melbourne, Australia: ACM, 2015. 891 – 900.
- [21] OU M, CUI P, PEI J, et al. Asymmetric transitivity preserving graph embedding [A]. Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining [C]. San Francisco, CA, USA: ACM, 2016. 672 – 681.
- [22] GROVER A, LESKOVEC J. Node2vec: Scalable feature learning for networks [A]. Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining [C]. San Francisco, CA, USA: ACM, 2016. 855 – 864.
- [23] DONG Y, CHAWLA N, SWAMI A. metapath2vec: Scalable representation learning for heterogeneous networks [A]. Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining [C]. Halifax, NS, Canada: ACM, 2017. 135 – 144.
- [24] WANG D, CUI P, ZHU W. Structural deep network embedding [A]. Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining [C]. San Francisco, CA, USA: ACM, 2016. 1225 – 1234.
- [25] CAO S, LU W, XU Q. Deep neural networks for learning graph representations [A]. Proceedings of the 33rd AAAI Conference on Artificial Intelligence [C]. Phoenix, Arizona, USA: AAAI, 2016. 1145 – 1152.
- [26] HAMILTON W, YING R, LESKOVEC J. Inductive representation learning on large graphs [A]. Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems [C]. Long Beach, CA, USA: MIT Press, 2017. 1024 – 1034.
- [27] TANG J, QU M, WANG M, et al. Line: Large scale information network embedding [A]. Proceedings of the 24th International World Wide Web Conference [C]. Florence, Italy: ACM, 2015. 1067 – 1077.
- [28] YANG C, SUN M, LIU Z, et al. Fast network embedding enhancement via high order proximity approximation [A]. Proceedings of the 26th International Joint Confer-

- ence on Artificial Intelligence [C]. Melbourne, Australia: Morgan Kaufmann, 2017. 3894 – 3900.
- [29] BOURIGAULT S, LAGNIER C, LAMPRIER S, et al. Learning social network embeddings for predicting information diffusion [A]. Proceedings of the 7th ACM International Conference on Web Search and Data Mining [C]. New York, NY, USA: ACM, 2014. 393 – 402.
- [30] LI C, MA J, GUO X, et al. DeepCas: An end-to-end predictor of information cascades [A]. Proceedings of the 26th International Conference on World Wide Web [C]. Perth, Australia: ACM, 2017. 577 – 586.
- [31] BORDES A, USUNIER A, et al. Translating embeddings for modeling multi-relational data [A]. Proceedings of the 27th Annual Conference on Neural Information Processing Systems [C]. Lake Tahoe, Nevada, United States: MIT Press, 2013. 2787 – 2795.
- [32] ZOU L, CHEN L, ZHAO D, et al. Answering pattern match queries in large graph databases via graph embedding [J]. VLDB Journal, 2012, 21(1): 97 – 120.
- [33] MIKOLOV T, SUTSKEVER I, CHEN K, et al. Distributed representations of words and phrases and their compositionality [A]. Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems [C]. Lake Tahoe, Nevada, United States: MIT Press, 2013. 3111 – 3119.
- [34] 潘博, 于重重, 张青川, 等. 基于词性与词序的相关因子训练的 word2vec 改进模型 [J]. 电子学报, 2018, 46(8): 1976 – 1982.
- PAN Bo, YU Chong-chong, ZHANG Qing-chuan, et al. The improved model for word2vec based on part of speech and word order [J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(8): 1976 – 1982. (in Chinese)
- [35] WANG Z, ZHANG J, FENG J, et al. Knowledge graph embedding by translating on hyperplanes [A]. Proceedings of the 28th AAAI Conference on Artificial Intelligence [C]. Québec City, Québec, Canada: AAAI, 2014. 1112 – 1119.
- [36] LIN Y, LIU Z, SUN M, et al. Learning entity and relation embeddings for knowledge graph completion [A]. Proceedings of the 29th AAAI Conference on Artificial Intelligence [C]. Austin, Texas, USA: AAAI, 2015. 2181 – 2187.
- [37] JI G, HE S, XU L, et al. Knowledge graph embedding via dynamic mapping matrix [A]. Proceedings of the 53rd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics [C]. Stroudsburg, PA: ACL, 2015. 687 – 696.
- [38] JI G, LIU K, HE S, et al. Knowledge graph completion with adaptive sparse transfer matrix [A]. Proceedings of the 30th AAAI Conference on Artificial Intelligence [C]. Phoenix, Arizona, USA: AAAI, 2016. 985 – 991.
- [39] HE S, LIU K, JI G, et al. Learning to represent knowledge graphs with Gaussian embedding [A]. Proceedings of the 24th ACM International Conference on Information and Knowledge Management [C]. Melbourne, VIC, Australia: CIKM, 2015. 623 – 632.
- [40] RIBA P, LLAD ÓS J, FORNÉS A, et al. Large-scale graph indexing using binary embeddings of node contexts for information spotting in document image databases [J]. Pattern Recognition Letters, 2017, 87: 203 – 211.
- [41] LINIAL N, LONDON E, RABINOVICH Y. The geometry of graphs and some of its algorithmic applications [J]. Combinatorica, 1995, 15(2): 215 – 245.
- [42] LI J, ZHU J, ZHANG B. Discriminative deep random walk for network classification [A]. Proceedings of the 54th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics [C]. Stroudsburg, PA: ACL, 2016. 1004 – 1013.
- [43] PEROZZI B, KULKARNI V, CHEN H, et al. Don't walk, skip! online learning of multi-scale network embeddings [A]. Proceedings of the 2017 IEEE/ACM International Conference on Advances in Social Networks Analysis and Mining [C]. Sydney, Australia: IEEE/ACM, 2017. 258 – 265.
- [44] CAVALLARI S, ZHENG V, CAI H, et al. Learning community embedding with community detection and node embedding on graphs [A]. Proceedings of the 2017 ACM Conference on Information and Knowledge Management [C]. Singapore: ACM, 2017. 377 – 386.
- [45] HALKIDI M, BATISTAKIS Y, VAZIRGIANNIS M. On clustering validation techniques [J]. Journal of Intelligent Information Systems, 2001, 17(2–3): 107 – 145.
- [46] MAATEN L, HINTON G. Visualizing data using t-sne [J]. Journal of Machine Learning Research, 2008: 2579 – 2605.
- [47] BHAGAT S, COMODE G, MUTHUKRISHNAN S. Node Classification in Social Networks. Social Network Data Analytics [M]. Boston, MA: Springer, 2011. 115 – 148.
- [48] TU C, ZENG X, WANG H, et al. A unified framework for community detection and network representation learning [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2018, DOI:10.1109/TKDE.2018.2852958.
- [49] HU R, AGGARWAL C, MA S, et al. An embedding approach to anomaly detection [A]. Proceedings of the 32nd IEEE International Conference on Data Engineering [C]. Helsinki, Finland: IEEE, 2016. 385 – 396.
- [50] SHI C, HU B, ZHAO W, et al. Heterogeneous information network embedding for recommendation [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2019, 31(2): 357 – 370.
- [51] ZHOU Y, CHENG H, YU J. Graph clustering based on structural/attribute similarities [J]. The Proceedings of the VLDB Endowment, 2009, 2(1): 718 – 729.
- [52] CLAUSET A, MOORE C, NEWMAN M. Hierarchical structure and the prediction of missing links in networks [J].

Nature,2008,453(7191):98-101.

[53] LIU W, YUE K, YUE M, et al. A Bayesian network based approach for incremental learning of uncertain knowledge

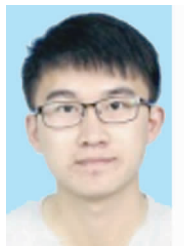
[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness, and Knowledge-based Systems,2018,26(1):87-108.

作者简介



祁志卫 男,1987年11月生,山西神池人. 云南大学信息学院博士研究生,云南大学讲师,主要研究方向为海量数据分析和不确定性人工智能.

E-mail: maryqizhiwei@ynu.edu.cn



王笏辉 男,1996年9月生,安徽潜山人,云南大学信息学院博士研究生,主要研究方向为海量数据分析和不确定性人工智能.