

二维 FIR 滤波器约束最小二乘设计的最大分划松弛 ADMM 算法

马梦瑶¹, 赖晓平¹, 孟海龙²

(1. 杭州电子科技大学自动化学院, 浙江杭州 310018; 2. 齐鲁工业大学(山东省科学院)数学与统计学院, 山东济南 250353)

摘 要: 约束二维有限脉冲响应(Finite Impulse Response, FIR)滤波器, 现有设计算法计算复杂度高. 针对二维 FIR 滤波器的约束最小二乘设计, 本文应用交替方向乘法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM), 研究其并行优化方法. 通过模型的最大分划, 并采用一种松弛技术, 提出一个具有高度并行结构的最大分划松弛 ADMM 算法, 分析了算法的计算复杂度, 讨论了算法的收敛性, 并给出了算法的参数设置方法. 实验表明, 最大分划松弛 ADMM 比非松弛的最大分划 ADMM 收敛快很多; 与现有算法相比, 提高了计算效率. GPU 加速实验中获得的大加速比, 表明了所提算法的高度并行性和可扩展性, 在图像处理、计算机视觉、模式识别及机器学习等领域有广阔的应用前景.

关键词: 滤波器设计; 多维信号处理; 优化方法; 约束最小二乘; 交替方向乘法; 计算复杂度; 收敛性分析

中图分类号: TN79 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2020)03-0510-08
电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2020.03.013

A Maximally Split and Relaxed ADMM for Constrained Least-Squares Design of Two-Dimensional FIR Filters

MA Meng-yao¹, LAI Xiao-ping¹, MENG Hai-long²

(1. School of Automation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou, Zhejiang 310018, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Qilu University of Technology (Shandong Academy of Sciences), Jinan, Shandong 250353, China)

Abstract: For constrained two-dimensional (2-D) finite impulse response (FIR) filters, the computational complexity of the existing design algorithms is very high. Based on the alternating direction method of multipliers (ADMM), the parallel optimization of constrained least-squares (CLS) 2-D FIR filters was studied. By maximally splitting the problem into univariate subproblems and utilizing a relaxation technique, a maximally split and relaxed ADMM with a highly parallel computing architecture was proposed. The computational complexity and convergence of the algorithm were analyzed, and a practical scheme for selection of the algorithm parameters was provided. Experimental results show that the proposed maximally split and relaxed ADMM converges much faster than the maximally split unrelaxed ADMM. Compared with existing algorithms, the computational efficiency of the proposed algorithm is improved. The large acceleration ratios obtained by GPU demonstrate the high parallelism and scalability of the proposed algorithm, which is very valuable for applications of the algorithm in image processing, computer vision, pattern recognition and machine learning.

Key words: filter design; multi-dimensional signal processing; optimization method; constrained least-squares; alternating direction method of multipliers; computational complexity; convergence analysis

1 引言

二维有限脉冲响应(Finite Impulse Response, FIR)滤波器, 由于其内禀稳定性且易于实现精确线性相位,

在图像处理、模式识别等诸多领域得到广泛应用, 其设计问题备受研究者关注^[1-19]. 传统二维 FIR 滤波器设计算法, 将二维滤波器的脉冲响应系数矩阵转换为向量, 然后用一维 FIR 滤波器的设计算法进行求

解^[1,5,9-13]. 该类算法求解的设计问题,可定义在二维频率区域的任意离散点集上,但高阶滤波器设计的计算负担过重. 为此,研究者直接用脉冲响应系数矩阵描述设计问题,并提出求解系数矩阵的高效二维算法^[2,6-8,15-19]. 与转换成系数向量后再求解的传统算法相比,二维算法的计算复杂度小得多,但其求解的逼近问题只能定义在二维频率区域的矩阵格点(由矩阵方格所确定的离散频率点集)上,限制了二维算法的应用.

在某些典型二维滤波器设计中,非矩阵频率格点有助于减小带边附近的逼近误差. 如圆形滤波器及扇形滤波器,由于矩阵格点不能覆盖其圆形和射线型的通带和阻带带边,求解定义在矩阵格点上的逼近问题,所得滤波器在带边附近逼近误差较大. 为此可将带边频率点添加到逼近点集中,得到的频率点集不再是矩阵格点. 这时,基于脉冲响应系数矩阵的高效二维算法无法应用.

二维 FIR 滤波器优化设计中,大量滤波器脉冲响应系数及大量逼近频率点,使设计问题成为大规模优化问题. 处理该类问题的一个基本思想,是将其分解成规模相对较小且更易求解,特别是可并行和/或分布式求解的多个子问题^[20,21]. 交替方向乘子法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)^[22],其与生俱来的并行和分布式结构,使之成为求解大规模凸优化问题的强有力工具^[20,21,23],已在许多信号处理问题中得到成功应用^[23-32].

文献[33,34]将最小二乘拟合问题按优化变量进行最大分划,得到一个最大分划 ADMM,对变量的更新是标量化的(即按标量分量更新),并行性非常高. 文献[33]将 ADMM 应用到滤波器设计问题,得到二维 FIR 滤波器加权最小二乘设计的最大分划 ADMM 算法. 另外,为加速收敛,文献[33,34]还提出一种松弛技术,并与最大分划 ADMM 结合,得到最小二乘问题的最大分划松弛 ADMM 算法.

本文将[33,34]中无约束最小二乘问题的最大分划松弛 ADMM 推广到有约束情形,考虑二维 FIR 滤波器约束最小二乘设计,提出相应的最大分划松弛 ADMM,导出算法表达式,分析算法复杂性和并行性,给出算法参数设置方法,并通过实验展示算法性能.

2 约束最小二乘设计的模型拟合表述

不失一般性,考虑阶数 n 为偶数、脉冲响应系数 $\{h(n_1, n_2) \mid n_1, n_2=0, 1, \dots, n\}$ 矩形对称的二维 FIR 数字滤波器,其相位响应 $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ 是数字频率 ω_1, ω_2 的线性函数,幅值响应

$$G(\mathbf{x}, \omega_1, \omega_2) = \varphi(\omega_1, \omega_2)^T \mathbf{x} \quad (1)$$

是系数向量 \mathbf{x} 的线性函数^[17]. 式(1)中, \mathbf{x} 的 $N=(n/2+1)^2$ 个分量按一定规则与脉冲响应系数 $h(n_1, n_2)$ 相关联; $\varphi(\omega_1, \omega_2) = \varphi_1(\omega_1) \otimes \varphi_2(\omega_2)$, $\varphi_1(\omega_1) = [1/\sqrt{2}, \cos(\omega_1), \cos(2\omega_1), \dots, \cos(n\omega_1/2)]^T$, $\varphi_2(\omega_2) = [1/\sqrt{2}, \cos(\omega_2), \cos(2\omega_2), \dots, \cos(n\omega_2/2)]^T$; 上标 T 表示转置运算.

设 $D(\omega_1, \omega_2)$ 为定义在离散频率点集 $\Omega \subset \Omega_0 = [0, \pi]^2$ 上的期望幅值响应. 考虑滤波器 $h(n_1, n_2)$ 的约束最小二乘设计,即用实际幅值响应 $G(\mathbf{x}, \omega_1, \omega_2)$ 逼近期望响应 $D(\omega_1, \omega_2)$,使逼近误差

$$E(\mathbf{x}, \omega_1, \omega_2) \equiv G(\mathbf{x}, \omega_1, \omega_2) - D(\omega_1, \omega_2) \quad (2)$$

满足上界约束的同时,其能量最小. 设计问题描述为:

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega} \frac{1}{2} [G(\mathbf{x}, \omega_1, \omega_2) - D(\omega_1, \omega_2)]^2 \quad (3a)$$

$$\text{s. t. : } |G(\mathbf{x}, \omega_1, \omega_2) - D(\omega_1, \omega_2)| \leq \delta, \forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \quad (3b)$$

其中 $\delta > 0$ 是幅值误差的一个预设上界.

把式(1)代入式(3),约束最小二乘设计问题可转化为如下约束模型拟合问题:

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{d}\|_2^2 \quad (4a)$$

$$\text{s. t. : } -\delta \mathbf{1} \leq \mathbf{Ax} - \mathbf{d} \leq \delta \mathbf{1} \quad (4b)$$

其中, $\mathbf{A} \in R^{M \times N}$ 为模型的数据矩阵, $\mathbf{d} \in R^M$ 为模型的期望输出向量, M 代表集合 Ω 的元素个数, $\mathbf{1}$ 是一个全 1 向量. \mathbf{A} 的某一行(如第 j 行)是 Ω 中某个二维频率点 (ω_1, ω_2) 上的 $\varphi(\omega_1, \omega_2)^T$, \mathbf{d} 的相应(第 j 个)分量则是该频率点上的 $D(\omega_1, \omega_2)$.

定义

$$f(\mathbf{Ax} - \mathbf{d}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{d}\|_2^2 + I(\mathbf{Ax} - \mathbf{d}) \quad (5a)$$

其中 $I(\bullet)$ 为约束式(4b)的指示函数,

$$I(\mathbf{Ax} - \mathbf{d}) = \begin{cases} 0, & -\delta \mathbf{1} \leq \mathbf{Ax} - \mathbf{d} \leq \delta \mathbf{1} \\ \infty, & \text{其他} \end{cases} \quad (5b)$$

利用式(5),约束模型拟合问题式(4)可重写为如下无约束模型拟合问题:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{Ax} - \mathbf{d}) \quad (6)$$

3 最大分划松弛 ADMM 算法

3.1 算法原理及复杂度和并行性分析

将模型拟合问题式(6)按优化变量进行分划:令 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$, 其中 x_i 为 \mathbf{x} 的第 i 个标量分量;数据矩阵 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N]$, \mathbf{a}_i 为 \mathbf{A} 的第 i 列. 令 $\mathbf{z}_i = \mathbf{a}_i x_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, 则问题式(6)可等价转化为^[22]:

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{z}} f\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i - \mathbf{d}\right) \quad (7a)$$

$$\text{s. t. : } \mathbf{a}_i x_i = \mathbf{z}_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (7b)$$

其中 $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N]$.

如文献[33], 引进

$$\hat{\mathbf{z}}_i(x_i, \mathbf{z}_i) = \alpha \mathbf{z}_i + (1 - \alpha) \mathbf{a}_i x_i \quad (8)$$

其中 $\alpha > 0$ 是一个缩放因子, 其作用是将约束 $\mathbf{a}_i x_i = \mathbf{z}_i$ 松弛为 $\mathbf{a}_i x_i = \hat{\mathbf{z}}_i(x_i, \mathbf{z}_i)$, 以缩放约束误差 $\mathbf{z}_i - \mathbf{a}_i x_i$. 当 $\alpha \geq 1$ 时, 放大约束误差. 利用该松弛技术, 问题式(7)变成

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{Z}} f\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i - \mathbf{d}\right) \quad (9a)$$

$$\text{s. t. : } \mathbf{a}_i x_i = \hat{\mathbf{z}}_i(x_i, \mathbf{z}_i), i = 1, 2, \dots, N \quad (9b)$$

构造问题式(9)的增广拉格朗日函数:

$$L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\Lambda}) = f\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i - \mathbf{d}\right) + \sum_{i=1}^N \hat{L}_\rho(x_i, \hat{\mathbf{z}}_i(x_i, \mathbf{z}_i), \boldsymbol{\lambda}_i) \quad (10a)$$

$$\hat{L}_\rho(x_i, \hat{\mathbf{z}}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) = \boldsymbol{\lambda}_i^T [\mathbf{a}_i x_i - \hat{\mathbf{z}}_i] + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{a}_i x_i - \hat{\mathbf{z}}_i\|_2^2 \quad (10b)$$

其中矩阵 $\boldsymbol{\Lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \dots, \boldsymbol{\lambda}_N]$, $\rho > 0$ 是一个惩罚因子. 应用 Gauss-Seidel 迭代最小化 $L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\Lambda})$, 即在第 k 次迭代, 先关于 \mathbf{x} 最小化 $L_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{Z}^k, \boldsymbol{\Lambda}^k)$ 以更新 \mathbf{x}^k , 再关于 \mathbf{Z} 最小化 $L_\rho(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\Lambda}^k)$ 以更新 \mathbf{Z}^k , 最后再利用 \mathbf{x}^{k+1} 和 \mathbf{Z}^{k+1} 更新乘子 $\boldsymbol{\Lambda}^k$. 具体迭代公式如下:

$$x_i^{k+1} = \arg \min_{x_i} \hat{L}_\rho(x_i, \hat{\mathbf{z}}_i(x_i, \mathbf{z}_i^k), \boldsymbol{\lambda}_i^k), i = 1, 2, \dots, N \quad (11a)$$

$$\mathbf{Z}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{Z}} \left\{ f\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i - \mathbf{d}\right) + \sum_{i=1}^N \hat{L}_\rho(x_i^{k+1}, \hat{\mathbf{z}}_i(x_i^{k+1}, \mathbf{z}_i), \boldsymbol{\lambda}_i^k) \right\} \quad (11b)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_i^k + \rho(\mathbf{a}_i x_i^{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_i(x_i^{k+1}, \mathbf{z}_i^k)), i = 1, 2, \dots, N \quad (11c)$$

注意到式(8)和(10b), 并引进 $\mathbf{u}_i^k = (\alpha \rho)^{-1} \boldsymbol{\lambda}_i^k$, 式(11)变成

$$x_i^{k+1} = \arg \min_{x_i} \|\mathbf{a}_i(x_i - x_i^k) - \alpha(\mathbf{z}_i^k - \mathbf{a}_i x_i^k - \mathbf{u}_i^k)\|_2^2, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (12a)$$

$$\mathbf{Z}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{Z}} \left\{ f\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i - \mathbf{d}\right) + \frac{1}{2} \alpha^2 \rho \sum_{i=1}^N \|\mathbf{z}_i - \mathbf{a}_i x_i^{k+1} - \mathbf{u}_i^k\|_2^2 \right\} \quad (12b)$$

$$\mathbf{u}_i^{k+1} = \mathbf{u}_i^k + \alpha \mathbf{a}_i x_i^{k+1} - \mathbf{z}_i^{k+1}, i = 1, 2, \dots, N \quad (12c)$$

令 $\bar{\mathbf{A}} = N^{-1} \mathbf{A}$, $\bar{\mathbf{d}} = N^{-1} \mathbf{d}$, 并定义均值辅助向量 \mathbf{z} 、均值乘子向量 \mathbf{u} 和均值模型输出 \mathbf{y} :

$$\mathbf{z} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i x_i = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} \quad (13)$$

容易看到, 问题式(12b)的解应满足: 任给 $i = 1, 2, \dots, N$; $\mathbf{z}_i - \mathbf{a}_i x_i^{k+1} - \mathbf{u}_i^k = \mathbf{z} - \mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{u}^k$, 由此及式(12c)可

知 $\mathbf{u}_i^k = \mathbf{u}$ 对任意 i 成立. 进一步注意到式(5), 式(12)简化为:

$$x_i^{k+1} = \arg \min_{x_i} \|\bar{\mathbf{a}}_i(x_i - x_i^k) - \bar{\alpha}(\mathbf{z}^k - \mathbf{y}^k - \mathbf{u}^k)\|_2^2, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (14a)$$

$$\mathbf{y}^{k+1} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}^{k+1} \quad (14b)$$

$$\mathbf{z}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{z}: -\delta \mathbf{1} \leq \mathbf{z} - \bar{\mathbf{d}} \leq \delta \mathbf{1}} \left\{ \|\mathbf{z} - \bar{\mathbf{d}}\|_2^2 + \hat{\rho} \|\mathbf{z} - \mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|_2^2 \right\} \quad (14c)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{z}^{k+1} \quad (14d)$$

其中: $\bar{\alpha} = \alpha/N$, $\hat{\rho} = \alpha^2 \rho/N$, $\delta = \delta/N$, $\bar{\mathbf{a}}_i$ 为 $\bar{\mathbf{A}}$ 的第 i 列.

解析表达出问题式(14a)和问题式(14c)的解, 可得约束最小二乘问题式(4)的最大分划松弛 ADMM 算法:

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \bar{\alpha} \|\bar{\mathbf{a}}_i^T \bar{\mathbf{a}}_i\|_2^{-2} \bar{\mathbf{a}}_i^T (\mathbf{y}^k + \mathbf{u}^k - \mathbf{z}^k), i = 1, 2, \dots, N \quad (15a)$$

$$y_j^{k+1} = \bar{r}_j \mathbf{x}^{k+1}, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (15b)$$

$$z_j^{k+1} = \bar{d}_j + \min\{\delta, (1 + \hat{\rho})^{-1} \hat{\rho} |y_j^{k+1} + u_j^k - \bar{d}_j|\} \times \text{sgn}(y_j^{k+1} + u_j^k - \bar{d}_j), \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (15c)$$

$$u_j^{k+1} = u_j^k + y_j^{k+1} - z_j^{k+1}, \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (15d)$$

其中, \bar{r}_j 是矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 的第 j 行, \bar{d}_j, y_j, z_j, u_j 分别是向量 $\bar{\mathbf{d}}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}$ 的第 j 个标量分量. 当 $\alpha = 1$ (即 $\bar{\alpha} = 1/N$) 时, 式(8)将丧失其松弛作用, 称此时的问题式(15)为(非松弛)最大分划 ADMM.

最大分划松弛 ADMM 式(15)的每个迭代步, 对向量变量的更新已分解成对其标量分量的独立更新. 正是由于这种标量化特性, 算法每个迭代步的变量更新, 容易用多处理器并行计算, 使算法具有非常高的并行性. 由简单分析可知, 若将循环中不发生变化的那些量, 如 $\bar{\alpha} \|\bar{\mathbf{a}}_i^T \bar{\mathbf{a}}_i\|_2^{-2}$ 及 $\hat{\rho}/(1 + \hat{\rho})$ 等事先算出, 且有足够多的处理器来并行实现每个迭代步的所有标量更新, 则算法的一次循环只需 $M + N + 2$ 个浮点乘运算和 $3M + N + 4$ 个浮点加运算, 单次循环计算复杂度是 M 和 N 的一次方. 考虑到 $N = [(n+2)/2]^2$, 且 $M \leq [m(n+2)/2]^2$, 其中 $m > 1$ 为不随 n 变化的常数, 算法的单次循环计算复杂度是滤波器阶数 n 的二次方.

3.2 算法收敛性及参数设置

当幅值误差约束上界 δ 大于某个值时, 约束最小二乘问题式(3)退化为无约束最小二乘问题. 此时的最大分划松弛 ADMM 式(15), 退化为文献[33]中无约束最小二乘问题的最大分划松弛 ADMM 算法.

在无约束情形下(相当于 $\delta = \infty$), 算法式(15)可等价转化为线性动态系统:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^{k+1} \\ \bar{\mathbf{u}}^{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^k \\ \bar{\mathbf{u}}^k \end{bmatrix} \quad (16a)$$

其中:

$$\bar{\mathbf{x}}^k = \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{x}^k - \mathbf{G}^{-1} \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{b}}, \quad \bar{\mathbf{u}}^k = \mathbf{G}^{-1} \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{u}^k \quad (16b)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \bar{\alpha}\mathbf{G} & -(1 - \hat{\rho})\bar{\alpha}\mathbf{G} \\ \frac{1}{1 + \hat{\rho}}(\mathbf{I} - \bar{\alpha}\mathbf{G}) & \frac{1}{1 + \hat{\rho}}\mathbf{I} - \frac{1 - \hat{\rho}}{1 + \hat{\rho}}\bar{\alpha}\mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (16c)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \text{diag} \{ \|\bar{\mathbf{a}}_1\|^{-1}, \|\bar{\mathbf{a}}_2\|^{-1}, \dots, \|\bar{\mathbf{a}}_N\|^{-1} \} \quad (16d)$$

$$\mathbf{G} = \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{D}} \quad (16e)$$

根据线性动态系统理论,系统式(16)渐近稳定(即 $\bar{\mathbf{x}}^k$ 和 $\bar{\mathbf{u}}^k$ 渐近收敛到0)的充要条件为,系统矩阵 \mathbf{Q} 之特征值全部在单位圆内.可以证明^[34]:系统矩阵 \mathbf{Q} 之所有特征值均在单位圆内的充要条件是

$$\bar{\alpha} < 2\nu_m^{-1}(2 + \hat{\rho})/3 \quad (17)$$

其中 ν_m 是矩阵 \mathbf{G} 的最大特征值.式(17)就是无约束情形下算法式(15)收敛的充要条件.进一步可证明^[34]:对任意满足式(17)的 $\bar{\alpha} > 0$ 和 $\hat{\rho} > 0$,系统矩阵 \mathbf{Q} 之谱半径为

$$r(\bar{\alpha}, \hat{\rho}) = \max \left\{ \frac{\left| 2 + \hat{\rho} - 2\bar{\alpha}\nu_s + \sqrt{4\bar{\alpha}^2\nu_s^2 - 4\bar{\alpha}\nu_s + \hat{\rho}^2} \right|}{2(1 + \hat{\rho})}, \frac{\left| 2 + \hat{\rho} - 2\bar{\alpha}\nu_m - \sqrt{4\bar{\alpha}^2\nu_m^2 - 4\bar{\alpha}\nu_m + \hat{\rho}^2} \right|}{2(1 + \hat{\rho})} \right\} \quad (18)$$

其中 ν_m 和 ν_s 是矩阵 \mathbf{G} 的最大和最小特征值.谱半径 $r(\bar{\alpha}, \hat{\rho})$ 决定了无约束情形下算法式(15)的收敛率,最小化 $r(\bar{\alpha}, \hat{\rho})$ 可得到使无约束情形下算法式(15)收敛最快的参数,即:

$$(\bar{\alpha}^*, \hat{\rho}^*) = \arg \min_{(\bar{\alpha}, \hat{\rho}): \bar{\alpha} < 2\nu_m^{-1}(2 + \hat{\rho})/3} r(\bar{\alpha}, \hat{\rho}) \quad (19)$$

约束上界 δ 小于无约束最小二乘解的最大幅值误差时,式(17)不再是最大分划松弛 ADMM 式(15)收敛的充要条件,但应存在满足 $0 < \bar{\alpha}^0 < 2\nu_m^{-1}(2 + \hat{\rho})/3$ 的某个 $\bar{\alpha}^0$,使得当 $\bar{\alpha} \leq \bar{\alpha}^0$ 时,算法式(15)收敛.另外,由式(19)计算的 $\bar{\alpha}^*$ 和 $\hat{\rho}^*$,一般不再是使算法收敛最快的参数,但仍可把它们作为算法参数设置的一个重要参考.大量仿真表明,当约束可行且不是很紧时,在参数 $\bar{\alpha}^*$ 和 $\hat{\rho}^*$ 下算法收敛且收敛较快.事实上,第4节的仿真实验,本文算法都是按式(19)设置参数的,即取 $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^*$ 和 $\hat{\rho} = \hat{\rho}^*$.若出现不收敛情形,适当增大 $\hat{\rho}$ 和/或稍微减小 $\bar{\alpha}$,可使算法收敛.

定理 收敛时,算法式(15)一定收敛到约束模型拟合问题式(4)的最优解.

证明 设算法式(15)收敛到 \mathbf{x}^∞ 、 \mathbf{z}^∞ 和 \mathbf{u}^∞ ,即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{z}^k = \mathbf{z}^\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}^k = \mathbf{u}^\infty \quad (20)$$

由式(15b)和(15d)知, $\forall j = 1, 2, \dots, M, y_j^\infty = \bar{\mathbf{r}}_j \mathbf{x}^\infty = \mathbf{z}_j^\infty$.再由式(15a)可得, $\forall i = 1, 2, \dots, N, \bar{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{u}^\infty = 0$,进而有

$$\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{u}^\infty = \mathbf{0} \quad (21)$$

进一步,由式(15c)经代数运算可得, $\forall j = 1, 2, \dots, M$,

$$\bar{\mathbf{r}}_j \mathbf{x}^\infty - \bar{d}_j = \begin{cases} \hat{\rho} u_j^\infty, & \text{当 } \hat{\rho} |u_j^\infty| \leq \bar{\delta} \text{ 时} \\ \bar{\delta}, & \text{当 } \hat{\rho} |u_j^\infty| > \bar{\delta} \text{ 时} \\ -\bar{\delta}, & \text{当 } \hat{\rho} |u_j^\infty| < -\bar{\delta} \text{ 时} \end{cases} \quad (22)$$

定义

$$\zeta_j = \begin{cases} 0, & \text{当 } \hat{\rho} |u_j^\infty| \leq \bar{\delta} \text{ 时} \\ \hat{\rho} u_j^\infty - \bar{\delta}, & \text{当 } \hat{\rho} |u_j^\infty| > \bar{\delta} \text{ 时} \\ -(\hat{\rho} u_j^\infty + \bar{\delta}), & \text{当 } \hat{\rho} |u_j^\infty| < -\bar{\delta} \text{ 时} \end{cases} \quad (23)$$

由式(22)和(23)易知, $\forall j = 1, 2, \dots, M$,

$$\zeta_j \geq 0, \zeta_j (|\bar{\mathbf{r}}_j \mathbf{x}^\infty - \bar{d}_j| - \bar{\delta}) = 0 \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_j \mathbf{x}^\infty - \bar{d}_j = \hat{\rho} u_j^\infty - \zeta_j \text{sgn}(\bar{\mathbf{r}}_j \mathbf{x}^\infty - \bar{d}_j) \quad (25)$$

式(25)两边同乘 $\bar{\mathbf{r}}_j^T$,再对 $j = 1, 2, \dots, M$ 求和,并注意到式(21),可得:

$$\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}^\infty - \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{d}} + \sum_{j=1}^M \zeta_j \text{sgn}(\bar{\mathbf{r}}_j^T \mathbf{x}^\infty - \bar{d}_j) \bar{\mathbf{r}}_j = \mathbf{0} \quad (26)$$

另外,由式(22)立刻得, $\forall j = 1, 2, \dots, M, |\bar{\mathbf{r}}_j \mathbf{x}^\infty - \bar{d}_j| \leq \bar{\delta}$,即:

$$-\bar{\delta} \mathbf{1} \leq \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}^\infty - \bar{\mathbf{d}} \leq \bar{\delta} \mathbf{1} \quad (27)$$

式(24)、(26)和(27)一起构成问题式(4)的KKT条件.再由问题式(4)的凸性可知, \mathbf{x}^∞ 就是问题式(4)的最优解.

4 仿真实验及性能比较

本节通过圆形和扇形滤波器设计与与现有算法比较,展示最大分划松弛 ADMM 式(15)的性能.设计中,算法参数根据式(19)计算,终止条件取为 $\|\mathbf{u}^{k+1}\| - \|\mathbf{u}^k\| \leq \epsilon = 10^{-4}$.算法用 MATLAB 编程,并在 Intel(R) Core (TM) i7-8700K CPU、主频 3.7GHz、内存 32.0GB 的计算机上实现.记

$$\Omega_R = \left\{ (k_1, k_2) \frac{k\pi}{4(n+1)}, k_1, k_2 = 0, 1, \dots, 4(n+1) \right\} \quad (28)$$

为 $\Omega_0 = [0, \pi]^2$ 的一个矩阵格点, Ω_p 和 Ω_s 分别为通带 Ω_p 和阻带 Ω_s 的带边频率子集.则 $\Omega_{NR} = \Omega_R \cup \Omega_p \cup \Omega_s$ 通常是一个非矩阵格点.如果没有特别说明,设计问题的逼近频率集取为 $\Omega = \Omega_{NR} \cap (\Omega_p \cup \Omega_s)$.

例1 圆形低通滤波器设计

滤波器通带 $\Omega_p = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_0 \mid \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq \omega_p^2\}$,阻带 $\Omega_s = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_0 \mid \omega_1^2 + \omega_2^2 \geq \omega_s^2\}$,其中 ω_p 和 ω_s 分别是通带截止频率和阻带起始频率.带边频率子集为:

$$\Omega_p^e = \left\{ \left(\cos \frac{(k-1)\pi}{2(N_p-1)}, \sin \frac{(k-1)\pi}{2(N_p-1)} \right) \omega_p, k = 1, 2, \dots, N_p \right\} \quad (29a)$$

$$\Omega_s^e = \left\{ \left(\cos \frac{(k-1)\pi}{2(N_s-1)}, \sin \frac{(k-1)\pi}{2(N_s-1)} \right) \omega_s, k = 1, 2, \dots, N_s \right\} \quad (29b)$$

其中 $N_p = \text{int}[2n\omega_p]$, $N_s = \text{int}[2n\omega_s]$.

先考虑 $\omega_p = 0.5\pi$, $\omega_s = 0.6\pi$,阶数 $n = 20, 30, 40$

和 50, 相应约束上界 $\delta = 0.095, 0.042, 0.018$ 和 0.0075 的滤波器 1 ~ 4. 用最大分划松弛 ADMM 算法、MATLAB 优化工具箱中的 `lsqlin()` 函数及凸优化软件包 CVX (SeDuMi 求解器) 进行设计. 三种算法得到几乎相同的最大逼近误差(等于相应的约束上界值 δ), 也得到几乎相同的均方根逼近误差(分别为 $0.0216, 0.00805, 0.00305$ 和 0.00113). 但最大分划松弛 ADMM 的计算机耗时, 比 `lsqlin()` 函数及 CVX 方法都少很多, 见表 1.

表 1 圆形滤波器 ($\omega_p = 0.5\pi, \omega_s = 0.6\pi$) 设计中的算法耗时 (s)

设计算法	滤波器 1	滤波器 2	滤波器 3	滤波器 4
最大分划松弛 ADMM	0.515	1.75	3.19	6.33
<code>lsqlin()</code> 函数	3.27	14.3	73.2	233
CVX (SeDuMi 求解器)	25.2	218	1370	4287

图 1 画出了最大分划松弛 ADMM 以及非松弛的最大分划 ADMM (即在式 (15) 中令 $\bar{\alpha} = 1/N, \hat{\rho}$ 由式 (19) 附加约束 $\bar{\alpha} = 1/N$ 后计算) 得到的, 滤波器 3 的最大误差和均方根误差的收敛曲线. 最大分划松弛 ADMM 比非松弛的最大分划 ADMM 收敛快很多, 表明松弛技术式 (8) 对 ADMM 有很好的加速作用.

为比较, 也在矩阵格点 $\bar{\Omega} = \Omega_R \cap (\Omega_p \cup \Omega_s)$ 上对前述滤波器 1 ~ 4 进行设计, 并在一个比 Ω 和 $\bar{\Omega}$ 都更稠密的

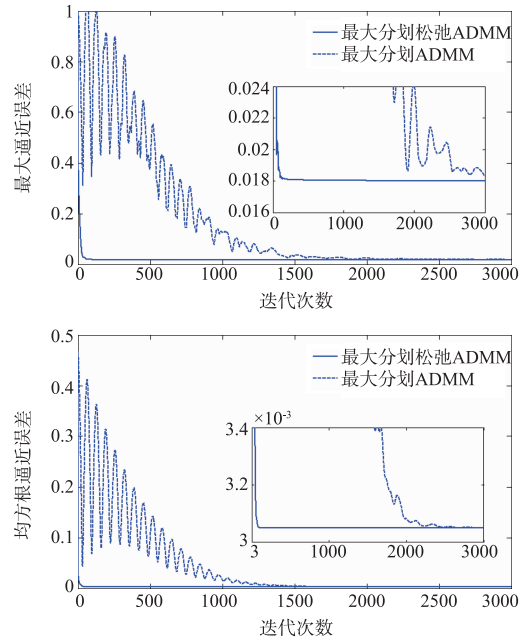


图 1 松弛及非松弛 ADMM 的收敛性比较

格点 $\Omega_i = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 = k_1 \pi / 1000, \omega_2 = k_2 \pi / 1000; k_1, k_2 = 0, 1, \dots, 1000\}$ 上度量滤波器的最大误差和均方根误差. Ω 及 $\bar{\Omega}$ 上的设计结果同时列于表 2. 可以看到, 非矩阵格点 Ω 上的设计, 得到了更小的通带/阻带最大误差, 但稍许增加了均方根误差.

表 2 基于两种不同频率格点之圆形滤波器 ($\omega_p = 0.5\pi, \omega_s = 0.6\pi$) 的性能比较

逼近频率格点	性能	滤波器 1	滤波器 2	滤波器 3	滤波器 4
矩阵格点 $\bar{\Omega} = \Omega_R \cap (\Omega_p \cup \Omega_s)$	通带最大误差	0.1173	0.04984	0.02898	0.01365
	阻带最大误差	0.1085	0.05114	0.02245	0.009625
	均方根误差	0.01633	0.006297	0.002436	0.000907
非矩阵格点 $\Omega = \Omega_{NR} \cap (\Omega_p \cup \Omega_s)$	通带最大误差	0.09504	0.04202	0.01802	0.007526
	阻带最大误差	0.09478	0.04204	0.01805	0.006734
	均方根误差	0.01719	0.006662	0.002588	0.000971

再考虑 $\omega_p = 0.5\pi, \omega_s = 0.56\pi, n = 60, 70, 80$ 和 90 的高阶滤波器 5 ~ 8, 约束上界 δ 分别取 $0.022, 0.012, 0.008$ 和 0.005 , 用最大分划松弛 ADMM 在非矩阵格点

Ω 上进行设计. 所得滤波器的最大误差、均方根误差以及设计所耗费的计算机时间列于表 3, 图 2 画出了滤波器 6 的幅频响应.

表 3 圆形滤波器 ($\omega_p = 0.5\pi, \omega_s = 0.56\pi$) 的逼近误差及最大分划松弛 ADMM 的计算机耗时 (s) 和 GPU 加速比

滤波器	性能要求	最大误差	均方根误差	时间(无 GPU)	时间(有 GPU)	GPU 加速比
滤波器 5	$n = 60, \delta = 0.022$	0.02206	0.003471	12.48	0.111	112.4
滤波器 6	$n = 70, \delta = 0.012$	0.01209	0.001905	22.08	0.117	188.7
滤波器 7	$n = 80, \delta = 0.008$	0.00804	0.001103	41.20	0.132	312.1
滤波器 8	$n = 90, \delta = 0.005$	0.00505	0.000621	97.20	0.188	517.0

同时, 还用 NVIDIA GeForce RTX 2080 Ti 显卡 GPU, 对最大分划松弛 ADMM 进行加速. 加速后, 设计所需的计算机时间大幅度减小, 加速比均在 100 以上,

结果也列于表 3. 随滤波器阶数增大, 计算时间没有明显增加, 加速比却有增大的趋势, 表明了最大分划松弛 ADMM 的高度并行性和可扩展性.

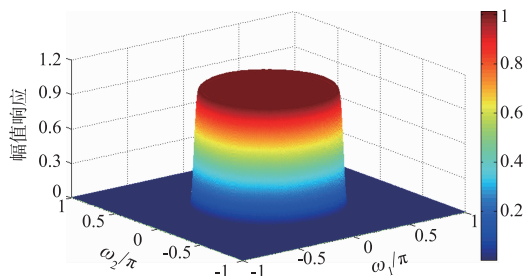


图2 滤波器6(圆形)的幅频响应

表 4 扇形滤波器 (\$\theta = \pi/6, \omega_t = 0.08\pi\$) 的逼近误差及最大分划松弛 ADMM 的计算机耗时 (s) 和 GPU 加速比

滤波器	性能要求	最大误差	均方根误差	时间(无 GPU)	时间(有 GPU)	GPU 加速比
滤波器 9	$n = 60, \delta = 0.026$	0.02583	0.001968	8.746	0.0774	113.0
滤波器 10	$n = 70, \delta = 0.012$	0.01193	0.000955	21.04	0.1058	198.9
滤波器 11	$n = 80, \delta = 0.005$	0.004896	0.0004685	49.04	0.1548	316.8
滤波器 12	$n = 90, \delta = 0.0032$	0.003154	0.0002330	122.4	0.4904	249.6

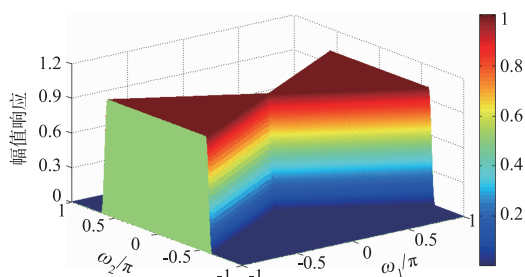


图3 滤波器11(扇形)的幅频响应

在非矩阵格点 Ω 上,用最大分划松弛 ADMM 设计 $n = 60, 70, 80$ 和 90 的滤波器 9 ~ 12, 约束上界 δ 分别为 $0.026, 0.012, 0.005$ 和 0.0032 . 滤波器的最大误差、均方根误差,以及算法耗费的计算机时间列于表 4, 滤波器 11 的幅频响应示于图 3. GPU 加速后,计算机耗时大幅度减少,也获得了超过 100 的加速比.

5 结束语

针对二维线性相位 FIR 滤波器的约束最小二乘设计,本文提出一个最大分划松弛 ADMM 算法. 最大分划使算法每个迭代步所包含的更新都是可并行执行的标量更新,松弛技术使算法获得了比非松弛 ADMM 快得多的收敛速度. 实验表明,所提算法的计算机耗时,比基于 $\text{lsqin}()$ 和基于 CVX 的方法少很多. 算法的 GPU 实现获得的大加速比,以及加速后计算机耗时不显著随滤波器阶数变化等结果,表明所提算法具有高度的并行性和可扩展性.

参考文献

[1] AGGARWAL A, KUMAR M, RAWAT T K. Design of

例 2 扇形滤波器设计

通带 $\Omega_p = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_0 \mid 0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \tan \theta\}$, 阻带 $\Omega_s = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_0 \mid \omega_2 \tan \theta + \omega_1 \leq \omega_1 \leq \pi\}$, 其中 $\theta = \pi/6$ 为扇角, $\omega_t = 0.08\pi$ 为过渡带宽. 带边频率子集取为

$$\Omega_p^c = \left\{ (\tan \theta, 1) \frac{(k-1)\pi}{N_p-1}, k = 1, 2, \dots, N_p \right\} \quad (30a)$$

$$\Omega_s^c = \left\{ (\omega_t, 0) + (\tan \theta, 1) \frac{(k-1)\pi}{N_s-1}, k = 1, 2, \dots, N_s \right\} \quad (30b)$$

其中 $N_p = \text{int}[4n/\cos(\theta)]$, $N_s = \text{int}[4n/\cos(\theta)]$.

two-dimensional FIR filters with quadrantly symmetric properties using the 2D L_1 -method [J]. IET Signal Processing, 2019, 13(3):262 - 272.

- [2] ARAVENA J L, GU G. Weighted least mean square design of 2-D FIR digital filters; the general case [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(10):2568 - 2578.
- [3] CAPIZZI G, SCIUTO G L. A novel 2-D FIR filter design methodology based on a Gaussian-based approximation [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2019, 26(2):362 - 366.
- [4] DHABAL S, VENKATESWARAN P. A novel accelerated artificial bee colony algorithm for optimal design of two dimensional FIR filter [J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2017, 28(2):471 - 493.
- [5] DUMITRESCU B. Trigonometric polynomials positive on frequency domains and applications to 2-D FIR filter design [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11):4282 - 4292.
- [6] HANNA M T. Weighted least squares design of two-dimensional zero-phase FIR filters in the continuous frequency domain [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II, 1996, 43(7):534 - 537.
- [7] HONG X Y, LAI X P, ZHAO R J. Matrix-based algorithms for constrained least-squares and minimax designs of 2-D FIR filters [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 64(14):3620 - 3631.
- [8] HONG X Y, LAI X P, ZHAO R J. A fast design algorithm for elliptic-error and phase-error constrained LS 2-D FIR filters [J]. Multidimensional Systems and Signal Process-

- ing, 2016, 27(2):477–491.
- [9] LAI X P. Optimal design of nonlinear-phase FIR filters with prescribed phase error[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(9):3399–3410.
- [10] LAI X P, CHENG Y. A sequential constrained least-square approach to minimax design of 2-D FIR filters[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II, 2007, 54(11):994–998.
- [11] LANG M C, SELESNICK I W, BURRUS C S. Constrained least squares design of 2-D FIR filters[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(5):1234–1241.
- [12] LU W S. A unified approach for the design of 2-D digital filters via semidefinite programming[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I, 2002, 49(6):814–826.
- [13] LU W S, HINAMOTO T. Two-dimensional digital filters with sparse coefficients[J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2011, 22(1):173–189.
- [14] WANG H, ZENG R, CHENG X M, JIAN Z H. An iterative technique for optimally designing a separable 2D FIR filter[J]. IEEE Transactions on Electrical and Electronic Engineering, 2018, 13(4):622–626.
- [15] ZHAO R J, LAI X P. Efficient 2-D based algorithms for WLS design of 2-D FIR filters with arbitrary weighting functions[J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2013, 24(3):417–434.
- [16] ZHAO R J, LAI X P, HONG X Y, LIN Z P. A matrix-based IRLS algorithm for the least l_p -norm design of 2-D FIR filters[J]. Multidimensional Systems and Signal Processing, 2019, 30(1):1–15.
- [17] ZHAO R J, LAI X P, LIN Z P. Weighted least squares design of 2-D FIR filters using a matrix-based generalized conjugate gradient method[J]. Journal of the Franklin Institute, 2016, 353(8):1759–1780.
- [18] ZHU W P, AHMAD M O, SWAMY M N S. A closed-form solution to the least-square design problem of 2-D linear-phase FIR filters[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II, 1997, 44(12):1032–1039.
- [19] ZHU W P, AHMAD M O, SWAMY M N S. A least-squares design approach for 2-D FIR filters with arbitrary frequency response[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II, 1999, 46(8):1027–1034.
- [20] CEVHER V, BECKER S, SCHMIDT M. Convex optimization for big data: scalable, randomized, and parallel algorithms for big data analytics[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2014, 31(5):32–43.
- [21] SLAVAKIS K, GIANNAKIS G B, MATEOS G. Modeling and optimization for big data analytics: (statistical) learning tools for our era of data deluge[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2014, 31(5):18–31.
- [22] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations and Trends[®] in Machine Learning, 2011, 3(1):1–122.
- [23] ROBINSON D P, TAPPENDEN R. A flexible ADMM algorithm for big data applications[J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 71(1):435–467.
- [24] ALMEIDA M S, FIGUEIREDO M. Deconvolving images with unknown boundaries using the alternating direction method of multipliers[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(8):3074–3086.
- [25] LIAVAS A P, SIDIROPOULOS N D. Parallel algorithms for constrained tensor factorization via alternating direction method of multipliers[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 63(20):5450–5463.
- [26] MAROS M, JALDEN J. ADMM for distributed dynamic beamforming[J]. IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks, 2018, 4(2):220–235.
- [27] MINAEI S, WANG Y. An ADMM approach to masked signal decomposition using subspace representation[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2019, 28(7):3192–3204.
- [28] SOUTO N, DINIS R. MIMO detection and equalization for single-carrier systems using the alternating direction method of multipliers[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2016, 23(12):1751–1755.
- [29] TANG B, LI J, LIANG J L. Alternating direction method of multipliers for radar waveform design in spectrally crowded environments[J]. Signal Processing, 2018, 142:398–402.
- [30] WANG W D, WANG J J, ZHANG Z L. Block-sparse signal recovery via ℓ_2/ℓ_1 -2 minimisation method[J]. IET Signal Processing, 2018, 12(4):422–430.
- [31] YANG J T, LIN J R, SHI Q J, LI Q. An ADMM-based approach to robust array pattern synthesis[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2019, 26(6):898–902.
- [32] ZHU Y P, DENG B W, JIANG A M, LIU X F, TANG Y B, YAO X. ADMM-based TDOA estimation[J]. IEEE Communications Letters, 2018, 22(7):1406–1409.
- [33] LAI X P, CAO J W, ZHAO R J, LIN Z P. A relaxed ADMM algorithm for WLS design of linear-phase 2D FIR filters[A]. Proceedings of the 23rd International Conference on Digital Signal Processing[C]. New York: IEEE, 2018. 1–5.
- [34] LAI X P, CAO J W, HUANG X F, WANG T L, LIN Z P. A maximally split and relaxed ADMM for regularized extreme learning machines[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019, DOI: 10.1109/TNNLS.2019.2927385.

作者简介



马梦瑶 女,1992 年生于河北石家庄,现为杭州电子科技大学自动化学院研究生.研究方向为数字滤波器优化设计.
E-mail: mmynice123@163.com



赖晓平(通信作者) 男,1965 年生于江西赣州,现为杭州电子科技大学教授,博士生导师.主要研究方向为优化方法、数字滤波器设计、机器学习等.
E-mail: laixp@hdu.edu.cn



孟海龙 男,1988 年生于山东济宁,现为齐鲁工业大学(山东省科学院)讲师.主要研究方向为数字滤波器优化设计.
E-mail: hl.meng@foxmail.com