

基于切换原理的非均匀采样系统输出反馈控制

王宏伟^{1,2}, 连捷¹

(1. 大连理工大学控制科学与工程学院, 辽宁大连 116024; 2. 新疆大学电气工程学院, 新疆乌鲁木齐 830047)

摘要: 在非均匀采样系统中,存在着刷新时间间隔不确定和时变的情况,这给系统控制器的设计造成了很大困难. 针对此问题,本文将刷新时间间隔看作时延变量,将不同时延的系统动态变化过程转化为不同子系统的动态变化过程,从而将时延的变化转化为不同子模型之间的切换,最终将非均匀采样系统描述为一类具有有限个子系统的离散时间切换系统. 利用输出反馈控制方法,基于平均驻留时间条件,使输出反馈闭环非均匀采样系统指数稳定. 最后,通过一个非均匀采样系统仿真实例证明了提出方法的有效性.

关键词: 切换系统; 非均匀采样; 指数稳定; 多采样率系统

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2020)01-0028-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2020.01.004

Output Feedback Control of Non-Uniformly Sampled Systems Based on Switching Principle

WANG Hong-wei^{1,2}, LIAN Jie¹

(1. School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China;

2. School of Electrical Engineering, Xinjiang University, Urumqi, Xinjiang 830047, China)

Abstract: In the non-uniformly sampled systems, there are uncertainties and time-varying of the refresh time interval, which have caused great difficulties to design the system controller. To aim at these problems, the refresh time interval is regarded as the time delay variable, and the system dynamic changing processes in different time delays are characterized by the changing processes of different subsystems. The variety of different time delays is transformed into the switching between different sub-models. The non-uniformly sampled system is described as a class of discrete-time switched systems with finite subsystems. Under the condition of satisfying the average dwell time, the output feedback control method is used to guarantee the exponential stability of the closed loop non-uniformly sampled system. Finally, the effectiveness of the proposed method is demonstrated by the example of the non-uniformly sampled system.

Key words: switched systems; non-uniform sampling; exponential stability; multi-sampling rates systems

1 引言

随着现代工业的发展,采用了先进的计算机技术、控制技术、通信技术,在3C融合时代,使得越来越多的系统采用了多种操作频率,称为多率采样数据系统,简称多率系统^[1,2]. 随着当代工业生产的发展,还存在一类更为普遍的多采样率系统,即输入信号刷新和(或)输出信号采样呈现不等时间间隔的非均匀采样数据系统^[3,4]. 例如在石油、电力、冶金、化工、食品、轻纺等过程工业中,由于设备价格昂贵或者缺乏在线检测,可靠性差,维护困难等原因,某些反映产品质量水平的关键变量和参数(如产品成分、浓度^[5,6]、熔融指数^[7-9]、Kappa值^[10,11]等),这些关键变量参

数只能通过人工采样,实验室化验分析来获取数据,因此采样周期较长且采样时间间隔不规则. 在网络控制系统中,为了克服冗余数据对系统性能的负面影响,传感器一般采用时间驱动的工作方式,采样时间间隔是均匀变化的,而执行器一般采用事件驱动的工作方式,其采样时间间隔是随机的,不确定的. 同时,受到传输距离、网络承载能力和通讯带宽的限制,数据在传输过程中不可避免存在时延、丢包、乱序等现象,使得实际采样频率呈现非均匀性^[12-18].

上述非均匀周期采样数据系统一般具有以下特点:

- (1) 测量数据在不同采样时刻、不同采样频率得到的;
- (2) 控制输入信号和输出信号在时序上呈现非均

匀、非同步,刷新时间和采样间隔不确定的特征;

(3) 由于某种资源受限(可以是通信网络带宽限制,智能仪器仪表测量限制,人工检测时间限制,计算能力限制等等原因引起的),使得输入信号是时延的.

本文研究的问题是,在非均匀采样系统中,在一个框架周期内输入信号非均匀刷新,输出信号是均匀采样,这其中输入信号刷新时间间隔往往是时变的、不确定的.为此,提出一种切换系统方法来处理刷新时间不确定性问题.采用非均匀保持器读取数据的频率高于传感器采样频率的策略,将刷新时间间隔看作时延变量,不同时延大小情况下的系统动态变化用不同子系统模型刻画,从而将指数时变项分解为多个定常项,将时延的变化转化为不同子系统之间的切换,最终将非均匀采样系统转化为一类含有若干有限个子系统的离散时间切换系统.在此基础上,利用切换原理保证输出反馈控制器能够使非均匀采样系统指数稳定.

2 问题描述

图 1 给出了非均匀采样系统动态过程,其中 S_c 是一个被控对象,其在 $kT + t_{ik}$ 时刻收到计算机产生的离散输入信号 $u(kT + t_{ik})$, $i = 1, 2, \dots, p$, 经过零阶保持器 H_r 生成一个连续信号 $u(t)$ 作为被控对象 S_c 的输入, S_r 为采样开关,对输出量 $y(t)$ 以周期 T 均匀采样,即在 $[kT, kT + T)$ 内, $y(t) = y(kT)$.

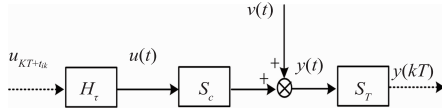


图1 非均匀多率采样系统过程图

零阶保持器 H_r 具有保持非均匀输入信号的功能,即:

$$u(t) := \begin{cases} u(kT), & kT \leq t \leq kT + t_{1k} \\ u(kT + t_{1k}), & kT + t_{1k} \leq t \leq kT + t_{2k} \\ \vdots & \vdots \\ u(kT + t_{(p-1)k}), & kT + t_{(p-1)k} \leq t \leq (k+1)T \end{cases} \quad (1)$$

其中,刷新时间间隔为 τ_{ik} ($\tau_{ik} = t_{ik} - t_{(i-1)k}$), $t_{ik} = \tau_{1k} + \tau_{2k} + \dots + \tau_{ik}$ (设 $t_{0k} = 0, t_{pk} = T$), $T = \tau_{1k} + \tau_{2k} + \dots + \tau_{pk} = t_{pk}$ 为框架周期.在研究中,刷新时间间隔是时变的、不确定的.

根据实际情况,对上述非均匀采样过程做了一些简化处理.

(1) 在实际的非均匀采样系统中,输入信号一般具有时延性,即当前输入信号和过去历史信号是相关的,即

$$u(kT + t_{ik}) = u(kT - dT); i = 1, 2, d = 0, 1, 2, \dots$$

(2) 为了讨论方便,取 $d = 0, 1$, 即

$$u(t) = \begin{cases} u(kT - T), & kT \leq t \leq kT + \tau_k \\ u(kT), & kT + \tau_k \leq t \leq kT + T \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\tau_k = t_{1k}$. τ_k 是刷新时间,也表示时间的延滞(简称时延).

(3) 框架周期 T 可以由最小周期 T_0 组成的,即 $T_0 = T/N$. 零阶保持器固有的刷新周期,刷新周期为 T_0 .

(4) 在框架周期内,输入信号非均匀刷新两次,即 $p = 2$,刷新时间间隔是时变的、不确定的.

上述四点是在实际非均匀采样系统中,经常遇到的情况,例如网络控制系统存在着网络延时,工业过程的软测量存在着测量时延,工业生产中产品质量水平的关键变量和参数测量时延等.

图 1 中的被控对象用以下模型描述,

$$S_c : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量; $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入; \mathbf{A}_c 和 \mathbf{B}_c 为两个适当维数的矩阵.根据上述假设,得知 $0 \leq \tau_k \leq T$, 在任意框架周期内最多只有两次控制量,即 $u(kT)$ 和 $u(kT - T)$, 简记为 $u(k)$ 、 $u(k-1)$ (以下各变量简记与此相同), 即 $u(k)$ 、 $u(k-1)$ 作用于被控对象, 其时序图 2 所示.

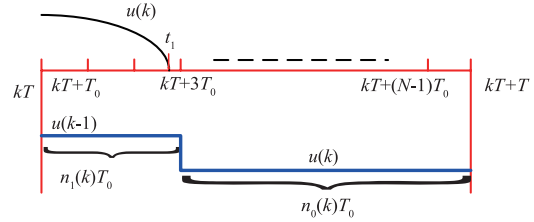


图2 控制信号时序

在图 2 中,当前控制信号是 $u(k)$ 在经过 $\tau_k = t_1 - kT$ 时延后到达零阶保持器端,零阶保持器在 $kT + 3T_0$ 时刻读取 $u(k)$ 并将输入 $u(k-1)$ 更新为 $u(k)$. 对任意 $k > 0$, 记 $u(k)$ 和 $u(k-1)$ 作用于被控对象上的时间分别为 $n_0(k)T_0$ 和 $n_1(k)T_0$, 则有

$$\begin{cases} n_0(k), n_1(k) \in F_0 = \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ n_0(k) + n_1(k) = N \\ n_0(k)T_0 + n_1(k)T_0 = NT_0 = T \end{cases}$$

$n_1(k)$ 的取值反映了时延的大小.

将式(3)以采样周期 T 离散化,并考虑时延情况,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \int_{n_0(k)T_0}^T e^{A\tau} \mathbf{B}_c d\tau \cdot u(k-1) \\ &\quad + \int_0^{n_1(k)T_0} e^{A\tau} \mathbf{B}_c d\tau \cdot u(k) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \sum_{i=0}^{n_1(k)-1} \mathbf{A}_0^{i+n_0(k)} \mathbf{B}_0 u(k-1) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=0}^{n_0(k)-1} \mathbf{A}_0^i \mathbf{B}_0 u(k) \quad (4)$$

其中, $\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}T}$, $\mathbf{A}_0 = e^{\mathbf{A}T_0}$, $\mathbf{B}_0 = \int_0^{T_0} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}_c d\tau$.

离散模型式(4)的两个输入矩阵取决于 $n_1(k)$ 和 $n_0(k)$ 的大小. 当 $n_1(k)$ 和 $n_0(k)$ 取不同值时, 系统(4)将取不同的形式. 而 $n_1(k)$ 和 $n_0(k)$ 均在有限集合内取值, 因此, 可将式(4)视为一个含有限个子系统的切换系统, 引入一个 $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 的映射: $[n_1(k) \ n_0(k)] = \sigma(k)$, 其中, $\sigma(k)$ 是非负整数. 可以表示为

$$\begin{aligned} [n_1(k) \ n_0(k)] &= [0 \ N] \rightarrow 0 \\ [n_1(k) \ n_0(k)] &= [1 \ N-1] \rightarrow 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$[n_1(k) \ n_0(k)] = [N \ 0] \rightarrow N$$

则系统(4)可重写为如下的切换系统模型,

$$S_{\sigma(k)}: \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{0\sigma(k)}u(k) + \mathbf{B}_{1\sigma(k)}u(k-1) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_c\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{其中, } \mathbf{B}_{0\sigma(k)} = \sum_{i=0}^{n_0(k)-1} \mathbf{A}_0^i \mathbf{B}_0,$$

$$\mathbf{B}_{1\sigma(k)} = \sum_{i=0}^{n_1(k)-1} \mathbf{A}_0^{i+n_0(k)} \mathbf{B}_0.$$

$\sigma(k) \in F_0$ 是切换信号. 式(5)是具有 $N+1$ 个子系统的切换系统. 用 S_j 表示(5)的第 j 个子系统, $j \in F_0$, 则 $\sigma(k) = j$ 表示系统(4)驻留在子系统 S_j 上. 其切换过程可以用图3表示.

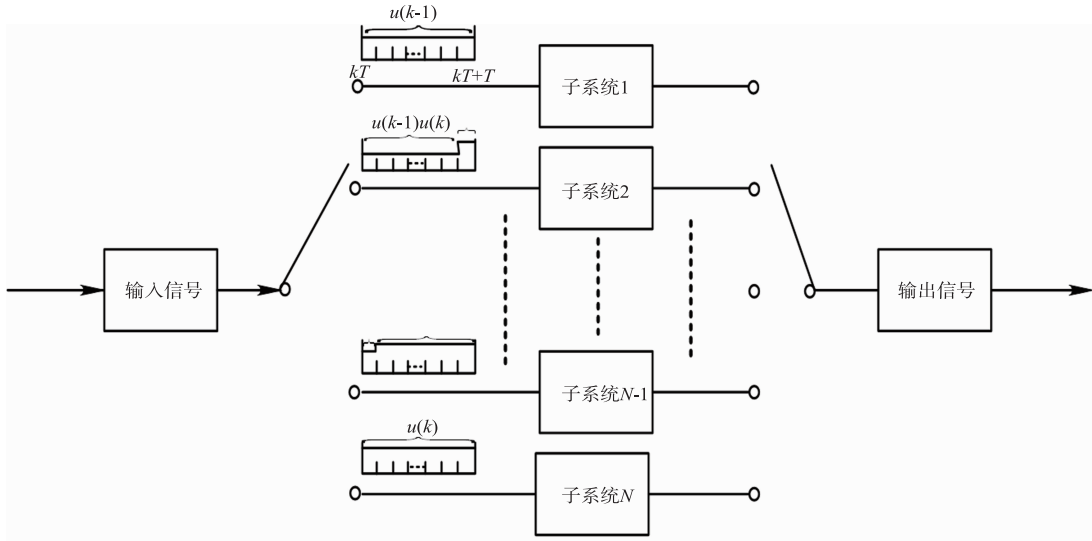


图3 非均匀采样系统切换过程示意图

考虑控制器为输出反馈控制器, 即

$$\begin{cases} \mathbf{x}_f(k+1) = \mathbf{A}_f \mathbf{x}_f(k) + \mathbf{B}_f y(k) \\ u(k) = \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f(k) \end{cases} \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)中, 可得以下闭环系统模型,

$$S_{\sigma(k)}: \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{0\sigma(k)} \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f(k) \\ \quad + \mathbf{B}_{1\sigma(k)} \mathbf{C}_f \mathbf{x}_f(k-1) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{A}_f \mathbf{x}_f(k) + \mathbf{B}_f \mathbf{C}_c \mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (7)$$

在前面的描述中, 当时延 τ_k 变化时, 系统(7)相当于从一个子系统切换到另一个子系统, 实现系统子模型之间的切换, 因此可以借助于切换系统控制原理完

成非均匀采样系统控制设计.

3 非均匀采样系统稳定性分析

引理 1^[19] (Schur 补性质) 给定对称矩阵 $\mathbf{A} > 0$, 对称矩阵 $\mathbf{C} > 0$, 矩阵 \mathbf{B} , 则 $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} < 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & -\mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{A} \end{bmatrix} < 0$$

定理 1 考虑闭环非均匀采样系统(7), 若存在正标量 $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, $\mu \geq 1$ 和适当维数的对称矩阵 $\bar{\mathbf{P}}_j > 0$, $\bar{\mathbf{Q}}_j > 0$ 和 $\bar{\mathbf{S}}_j > 0$, 使得如下不等式和等式成立,

$$\bar{\Omega}_j = \begin{bmatrix} -\lambda^2 \bar{\mathbf{P}}_j & 0 & 0 & \bar{\mathbf{P}}_j \mathbf{A}^T & \bar{\mathbf{P}}_j (\mathbf{B}_f \mathbf{C}_c)^T \\ * & \bar{\mathbf{S}}_j - \lambda^2 \bar{\mathbf{Q}}_j & 0 & \bar{\mathbf{Q}}_j (\mathbf{B}_0 \mathbf{C}_f)^T & \bar{\mathbf{Q}}_j \mathbf{A}_f^T \\ * & * & -\lambda^2 \bar{\mathbf{S}}_j & \bar{\mathbf{Q}}_j (\mathbf{B}_1 \mathbf{C}_f)^T & 0 \\ * & * & * & -\bar{\mathbf{P}}_j & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\mathbf{Q}}_j \end{bmatrix} < 0; j \in F_0 \quad (8)$$

$$P_a \leq \mu P_b, Q_a \leq \mu Q_b, S_a \leq \mu S_b, \forall a, b \in F_0 \quad (9)$$

$$\bar{P}_j = (P_j)^{-1}, \bar{Q}_j = (Q_j)^{-1}, \bar{S}_j = (Q_j)^{-1} S_j (Q_j)^{-1} \quad (10)$$

$$t_a > t_a^* = \frac{\ln \mu}{2 \ln(1/\lambda)} \quad (11)$$

则系统(7)指数稳定并具有指数衰减率 $\rho(\lambda, t_a) = \lambda \mu^{\frac{1}{2t_a}}$. 其中, 矩阵(8)中第 i 行第 j 列的“*”表示的块矩阵或块向量, 为矩阵中第 j 行第 i 列对应块矩阵或块向量的转置矩阵或向量, 以下与此相同.

证明 假设 k_1, k_2, \dots, k_i , 表示 $\sigma(k)$ 在间隔 $[0, k)$ 内的切换点, 满足 $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_i < k$. 系统(7)中子系统模型为

$$S_{\sigma(k)} : \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{0j}\mathbf{C}_j\mathbf{x}_f(k) \\ \quad + \mathbf{B}_{1j}\mathbf{C}_j\mathbf{x}_f(k-1) \\ y(k) = \mathbf{A}_j\mathbf{x}_f(k) + \mathbf{B}_j\mathbf{C}_c\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad j \in F_0 \quad (12)$$

选取 Lyapunov 函数如下,

$$V_{\sigma(k)}(k) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P}_{\sigma(k)} \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}_f^T(k) \mathbf{Q}_{\sigma(k)} \mathbf{x}_f(k) + \mathbf{x}_f^T(k-1) \mathbf{S}_{\sigma(k)} \mathbf{x}_f(k-1) \quad (13)$$

其中 $\mathbf{P}_j > 0, \mathbf{Q}_j > 0$ 和 $\mathbf{S}_j > 0, j \in F_0$, 是待定对称正定矩阵. 考虑 $V_j(k)$ 沿子系统 S_j 动态轨迹变化. 由式(13)可得,

$$\begin{aligned} & V_j(k+1) - \lambda^2 V_j(k) \\ &= \mathbf{x}^T(k+1) \mathbf{P}_j \mathbf{x}(k+1) \\ &+ \mathbf{x}_f^T(k+1) \mathbf{Q}_j \mathbf{x}_f(k+1) + \mathbf{x}_f^T(k) \mathbf{S}_j \mathbf{x}_f(k) \\ &- \lambda^2 \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P}_j \mathbf{x}(k) - \lambda^2 \mathbf{x}_f^T(k) \mathbf{Q}_j \mathbf{x}_f(k) \\ &- \lambda^2 \mathbf{x}_f^T(k-1) \mathbf{S}_j \mathbf{x}_f(k-1) \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_{0j}\mathbf{C}_j\mathbf{x}_f(k) \\ &+ \mathbf{B}_{1j}\mathbf{C}_j\mathbf{x}_f(k-1))^T \mathbf{P}_j (\mathbf{A}\mathbf{x}(k) \\ &+ \mathbf{B}_{0j}\mathbf{C}_j\mathbf{x}_f(k) + \mathbf{B}_{1j}\mathbf{C}_j\mathbf{x}_f(k-1)) \\ &+ (\mathbf{A}_j\mathbf{x}_f(k) + \mathbf{B}_j\mathbf{C}_c\mathbf{x}(k))^T \mathbf{Q}_j (\mathbf{A}_j\mathbf{x}_f(k) \\ &+ \mathbf{B}_j\mathbf{C}_c\mathbf{x}(k)) + \mathbf{x}_f^T(k) \mathbf{S}_j \mathbf{x}_f(k) \\ &- \lambda^2 \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P}_j \mathbf{x}(k) \\ &- \lambda^2 \mathbf{x}_f^T(k) \mathbf{Q}_j \mathbf{x}_f(k) \\ &- \lambda^2 \mathbf{x}_f^T(k-1) \mathbf{S}_j \mathbf{x}_f(k-1) \end{aligned}$$

上式可整理成

$$V_j(k+1) - \lambda^2 V_j(k) = \bar{\mathbf{z}}(k)^T \Phi_j \bar{\mathbf{z}}(k) \quad (14)$$

其中, $\bar{\mathbf{z}}(k) = [\mathbf{x}^T(k) \quad \mathbf{x}_f^T(k) \quad \mathbf{x}_f^T(k-1)]^T$,

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} \varphi_{j11} & \varphi_{j12} & \varphi_{j13} \\ * & \varphi_{j22} & \varphi_{j23} \\ * & * & \varphi_{j33} \end{bmatrix}$$

其中,

$$\varphi_{j11} = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_j \mathbf{A} + (\mathbf{B}_j \mathbf{C}_c)^T \mathbf{Q}_j (\mathbf{B}_j \mathbf{C}_c) - \lambda^2 \mathbf{P}_j,$$

$$\varphi_{j12} = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_j \mathbf{B}_{0j} \mathbf{C}_j + (\mathbf{B}_j \mathbf{C}_c)^T \mathbf{Q}_j \mathbf{A}_j,$$

$$\varphi_{j13} = \mathbf{A}^T \mathbf{P}_j \mathbf{B}_{1j} \mathbf{C}_j,$$

$$\varphi_{j22} = (\mathbf{B}_{0j} \mathbf{C}_j)^T \mathbf{P}_j (\mathbf{B}_{0j} \mathbf{C}_j) + \mathbf{A}_j^T \mathbf{Q}_j \mathbf{A}_j + \mathbf{S}_j - \lambda^2 \mathbf{Q}_j,$$

$$\varphi_{j23} = (\mathbf{B}_{0j} \mathbf{C}_j)^T \mathbf{P}_j (\mathbf{B}_{1j} \mathbf{C}_j),$$

$$\varphi_{j33} = (\mathbf{B}_{1j} \mathbf{C}_j)^T \mathbf{P}_j (\mathbf{B}_{1j} \mathbf{C}_j) - \lambda^2 \mathbf{S}_j.$$

当 $\Phi_j < 0$ 时, 则由式(14)可得

$$V_j(k+1) - \lambda^2 V_j(k) \leq 0 \quad (15)$$

由于 $\Phi_j < 0$, 即

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} \varphi_{j11} & \varphi_{j12} & \varphi_{j13} \\ * & \varphi_{j22} & \varphi_{j23} \\ * & * & \varphi_{j33} \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

成立.

令

$$\sum_j = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_j \mathbf{C}_c)^T \mathbf{Q}_j (\mathbf{B}_j \mathbf{C}_c) - \lambda^2 \mathbf{P}_j & (\mathbf{B}_j \mathbf{C}_c)^T \mathbf{Q}_j \mathbf{A}_j & 0 \\ \mathbf{A}_j^T \mathbf{Q}_j (\mathbf{B}_j \mathbf{C}_c) & \mathbf{A}_j^T \mathbf{Q}_j \mathbf{A}_j + \mathbf{S}_j - \lambda^2 \mathbf{Q}_j & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \mathbf{S}_j \end{bmatrix}$$

则式(16)可以写为

$$\Phi_j = \sum_j + \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ (\mathbf{B}_{0j} \mathbf{C}_j)^T \\ (\mathbf{B}_{1j} \mathbf{C}_j)^T \end{bmatrix} \mathbf{P}_j [\mathbf{A} \quad \mathbf{B}_{0j} \mathbf{C}_j \quad \mathbf{B}_{1j} \mathbf{C}_j] < 0 \quad (17)$$

由引理1, 上式又可以变换为下式

$$\begin{bmatrix} -\lambda^2 \mathbf{P}_j & 0 & 0 & \mathbf{A}^T & (\mathbf{B}_j \mathbf{C}_c)^T \\ 0 & \mathbf{S}_j - \lambda^2 \mathbf{Q}_j & 0 & (\mathbf{B}_{0j} \mathbf{C}_j)^T & \mathbf{A}_j^T \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \mathbf{S}_j & (\mathbf{B}_{1j} \mathbf{C}_j)^T & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{B}_{0j} \mathbf{C}_j & \mathbf{B}_{1j} \mathbf{C}_j & -\mathbf{P}_j^{-1} & 0 \\ \mathbf{B}_j \mathbf{C}_c & \mathbf{A}_j & 0 & 0 & -\mathbf{Q}_j^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

式(18)左乘、右乘 $\text{diag}(\mathbf{P}_j^{-1}, \mathbf{Q}_j^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$, 并令 $\bar{\mathbf{P}}_j = (\mathbf{P}_j)^{-1}, \bar{\mathbf{Q}}_j = (\mathbf{Q}_j)^{-1}, \bar{\mathbf{S}}_j = (\mathbf{Q}_j)^{-1} \mathbf{S}_j (\mathbf{Q}_j)^{-1}$, 则式(18)等价于式(8).

另外, 利用式(15)可得

$$V_j(k+1) \leq \lambda^2 V_j(k) \quad (19)$$

式(19)意味着 $V_j(k), j=0, 1, \dots, N$, 沿着各自子系统的轨迹指数衰减, 即

$$\begin{cases} V_{\sigma(k_i)}(k) \leq \lambda^{2(k-k_i)} V_{\sigma(k_i)}(k_i) \\ V_{\sigma(k_{j-1})}(k_j) \leq \lambda^{2(k_j-k_{j-1})} V_{\sigma(k_{j-1})}(k_{j-1}) \end{cases}, \quad j=0, 1, \dots, i \quad (20)$$

另一方面, 由于

$$V_{\sigma(k)}(k) = V_{\sigma(k_i)}(k),$$

$$V_{\sigma(k_{j-1})}(k_j) = V_{\sigma(k_{j-1})}(k_j),$$

$$j=0, 1, \dots, i \quad (21)$$

由式(20)和(21)可得

$$\begin{cases} V_{\sigma(k)}(k) = V_{\sigma(k)}(k) \leq \lambda^{2(k-k_i)} V_{\sigma(k)}(k_i) \\ V_{\sigma(k_{j-1})}(k_j) \leq \lambda^{2(k_j-k_{j-1})} V_{\sigma(k_{j-1})}(k_{j-1}) \end{cases}, \\ j=0,1,\dots,i \quad (22)$$

由于系统(7)的状态在切换点不跳变,由式(9)可得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(k)}(k_j) &= \mathbf{x}^T(k_j) \mathbf{P}_{\sigma(k_j)} \mathbf{x}(k_j) + \mathbf{x}_f^T(k_j) \mathbf{Q}_{\sigma(k_j)} \mathbf{x}_f(k_j) \\ &\quad + \mathbf{x}_f^T(k_j-1) \mathbf{S}_{\sigma(k_j)} \mathbf{x}_f(k_j-1) \\ &\leq \mu \mathbf{x}^T(k_j) \mathbf{P}_{\sigma(k_{j-1})} \mathbf{x}(k_j) \\ &\quad + \mu \mathbf{x}_f^T(k_j) \mathbf{Q}_{\sigma(k_{j-1})} \mathbf{x}_f(k_j) \\ &\quad + \mu \mathbf{x}_f^T(k_j-1) \mathbf{S}_{\sigma(k_{j-1})} \mathbf{x}_f(k_j-1) \\ &= \mu V_{\sigma(k_{j-1})}(k_j) \end{aligned} \quad (23)$$

取抖动界 $N_0 = 0$, 根据平均驻留时间的定义^[20]以及式(22)和式(23)可递推求得式(24)

$$\begin{aligned} V_{\sigma(k)}(k) &\leq \lambda^{2(k-k_i)} V_{\sigma(k)}(k_i) \\ &\leq \mu^{N_{\sigma}[0,k]} \lambda^{2(k-k_i)} \lambda^{2(k_i-k_{i-1})} \dots \lambda^{2k_i} V_{\sigma(0)}(0) \\ &= \mu^{N_{\sigma}[0,k]} \lambda^{2k} V_{\sigma(0)}(0) \\ &\leq \mu^{t_a} \lambda^{2k} V_{\sigma(0)}(0) \\ &= \rho(\lambda, t_a)^{2k} V_{\sigma(0)}(0) \end{aligned} \quad (24)$$

由式(24)可得

$$\begin{aligned} \beta_1 \|\mathbf{x}(k)\|^2 &\leq V_{\sigma(k)}(k) \leq \rho(\lambda, t_a)^{2k} V_{\sigma(0)}(0) \\ &\leq \rho(\lambda, t_a)^{2k} \beta_2 \|\mathbf{x}_0\|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

其中, $\beta_1 = \min_{j \in F_0} \lambda_{\min}(\mathbf{P}_j)$, $\beta_2 = \max_{j \in F_0} (\lambda_{\max}(\mathbf{P}_j) + \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_j))$. 由式(25)进一步可得

$$\|\mathbf{x}(k)\| \leq \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \rho(\lambda, t_a)^k \|\mathbf{x}_0\| \quad (26)$$

其中, $\|\mathbf{x}_0\|$ 为初始值. 不等式(11)和 $\lambda < 1$ 保证了 $\rho(\lambda, t_a) < 1$. 从而, 闭环非均匀采样系统指数稳定并具有指数衰减率 $\rho(\lambda, t_a)$. 证毕

注 1 在实际应用中, 如果不能确定时延, 就难以确定 t_a , 从而难以应用条件(11). 由于 $t_a \geq 1$, 故若 $1 > \frac{\ln \mu}{2 \ln(1/\lambda)}$, 则无论时延如何变化和不确定, 条件(11)总是成立的. 因此, 当实际时延未知时, 可用 $\lambda < \mu^{-\frac{1}{2}}$ 代替条件(11). 此时, 闭环非均匀采样系统(7)的指数衰减率 $\rho = \lambda \mu^{0.5}$.

4 仿真实例

考虑如下被控对象:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (27)$$

取采样周期为 $T = 10\text{ms}$, 将采样间隔十等分, 即令 $N = 10$, 取零阶保持器读取数据的周期 $T_0 = 1\text{ms}$. 控制器

取为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_c(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c(k) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} y(k) \\ u(k) = [-4 \ -3] \mathbf{x}_c(k) \end{cases} \quad (28)$$

假定最大时延上界 $\tau = 4T_0 = 4\text{ms}$, 因此, 输入信号时延只有五种取值可能, 即 $\tau(k) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ms, 此时系统(27)最多含有五个子系统. 将这五个子系统用 $S_{c_i}, i=0, 1, 2, 3, 4$ 表示. S_{c_i} 的系统输入矩阵是由 $n_1(k)$ 和 $n_0(k)$ 决定, 且 $[n_1(k) \ n_0(k)]$ 的五种可能取值分别是 $[0 \ 10], [1 \ 9], [2 \ 8], [3 \ 7], [4 \ 6]$.

定义映射 $[n_1(k) \ n_0(k)] \rightarrow \sigma(k): [0 \ 10] \rightarrow 0, [1 \ 9] \rightarrow 1, [2 \ 8] \rightarrow 2, [3 \ 7] \rightarrow 3, [4 \ 6] \rightarrow 4$.

当时延 $\tau(k) = 0$, 相应的闭环非均匀采样系统模型可由 S_{c_0} 描述; 当时延 $\tau(k) \in (0 \ T_0]$ 内变化时, 相应的闭环非均匀采样系统模型可由 S_{c_i} 描述; 其他子系统以此类推. 以步长 0.03 为步长, 通过一维搜索算法可得使线性矩阵不等式(8)和(9)可行的最小 μ 和 λ 分别是 $\mu = 1.05$ 和 $\lambda = 0.96$. 采用 LMI 的可行解问题求解器 feasp, 应用定理 1, 得到可行解如下:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_1 &= \begin{bmatrix} 20.79 & -1.142 \\ -1.142 & 16.09 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{P}}_2 = \begin{bmatrix} 11.80 & -0.605 \\ -0.605 & 9.149 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{P}}_3 &= \begin{bmatrix} 14.75 & -0.852 \\ -0.852 & 7.943 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{P}}_4 = \begin{bmatrix} 13.11 & -0.557 \\ -0.557 & 6.984 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{P}}_5 &= \begin{bmatrix} 19.43 & -1.277 \\ -1.277 & 10.41 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{Q}}_1 = \begin{bmatrix} 39.66 & -32.63 \\ -32.63 & 35.45 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{Q}}_2 &= \begin{bmatrix} 32.84 & -27.56 \\ -27.56 & 29.19 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{Q}}_3 = \begin{bmatrix} 27.19 & -25.68 \\ -25.68 & 24.49 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{Q}}_4 &= \begin{bmatrix} 24.48 & -22.52 \\ -22.52 & 26.56 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{Q}}_5 = \begin{bmatrix} 30.44 & -12.98 \\ -12.98 & 20.77 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由于 $\lambda < \mu^{-0.5} = 0.9759$, 满足注 1 条件, 即 $\lambda < \mu^{-\frac{1}{2}}$ 成立. 因此, 在输出反馈控制器能使相应的闭环非均匀采样系统稳定, 且其指数衰减率满足 $\rho = \lambda \mu^{0.5} = 0.9738$.

仿真结果如图 4、图 5 所示, 显然系统是收敛到零, 是渐进稳定的. 通过图 4、图 5 的仿真结果, 表明所设计的输出反馈控制器, 在满足切换条件下, 非均匀采样系统能够指数稳定.

另外, 为了证明本文提出方法的有效性, 我们还对最大时延上界 $\tau = 6T_0 = 6\text{ms}$ 的非均匀采样系统进行了研究, 此时输入信号时延有七种取值可能, 即 $\tau(k) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ms, 此时系统(27)最多含有七个子系统. 由于论文篇幅的限制, 没有给出更多的讨论, 这里给出了 $x_1(k+1), x_2(k+1)$ 响应曲线, 见图 6.

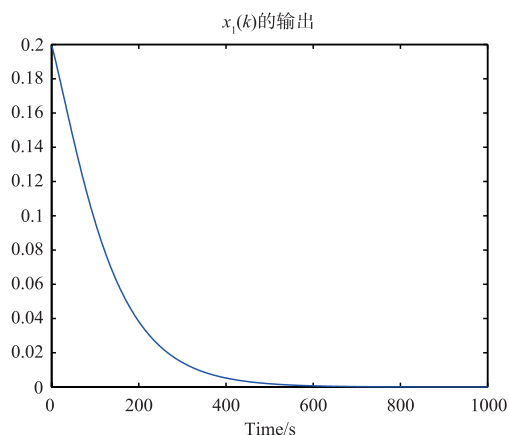
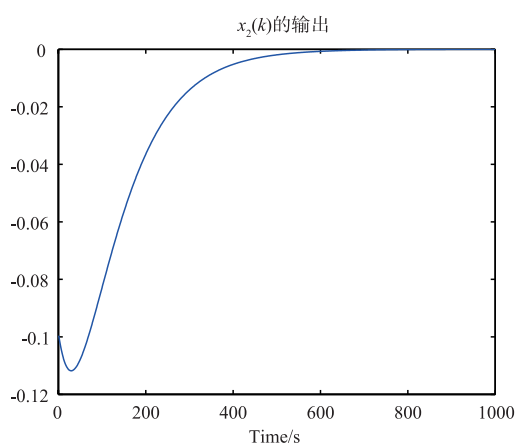
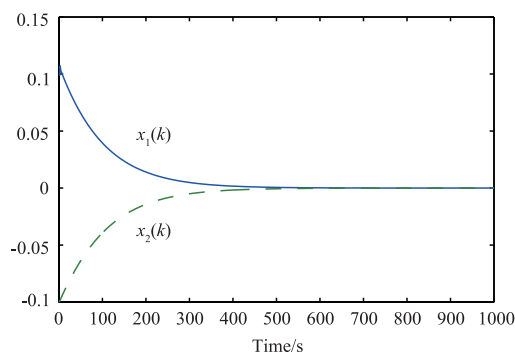
图4 系统 $x_1(k+1)$ 输出图5 系统 $x_2(k+1)$ 输出

图6 最大时延上界为6ms的控制情况

5 结论

提出一种切换系统方法来处理刷新时间不确定性问题. 主要创新点表现在:(1)将采用非均匀采样系统的刷新时间间隔看作时延变量,不同时延大小情况下的系统动态变化用不同子系统模型刻画;(2)将指数时变项分解为多个定常项,将时延的变化转化为不同子系统模型之间的切换;(3)将非均匀采样系统最终描述为一类具有有限个子系统的离散时间切换系统;(4)在此基

础上,设计输出反馈控制器,在满足平均驻留时间切换下保证非均匀采样系统指数稳定. 对于大时延的、多输入非均匀采样系统在控制上仍然比较难于控制,在未来的研究中,我们将对此类系统展开研究.

参考文献

- [1] 丁锋. 系统辨识新论[M]. 北京:科学出版社,2013. 225 - 236.
DING Feng. New Theories of System Identification[M]. Beijing:Science Press,2013. 225 - 236. (in Chinese)
- [2] DING F, CHEN T. Modeling and identification for multi-rate systems[J]. Acta Automatica Sinica,2005,31(1):105 - 122.
- [3] ALBERTOS P, CRESPO A. Real-time control of non-uniformly sampled systems[J]. Control Engineering Practice, 1999,7(4):445 - 458.
- [4] CUENCA A, SALT J. RST controller design for a non-uniform multi-rate control system[J]. Journal of Process Control,2014,22(10):1865 - 1877.
- [5] FORTUNA L, GRAZIANI S, XIBILIA M. Soft sensors for product quality monitoring in debutanizer distillation columns[J]. Control Engineering Practice,2005,13(4):499 - 508.
- [6] GJERKES H, MALENSEK J, SITAR A, GOLOBIC I. Product identification in industrial batch fermentation using a variable forgetting factor[J]. Control Engineering Practice,2011,19(10):1208 - 1215.
- [7] OGAWA M, OHSHIMA M, MORINAGA K, WATANABE F. Quality inferential control of an industrial high density polyethylene process[J]. Journal of Process Control,1999,9(1):51 - 59.
- [8] SHARMIN R, SUNDARARAJ U, SHAH S, et al. Inferential sensors for estimation of polymer quality parameters: Industrial application of a PLS-based soft sensor for a LDPE plant[J]. Chemical Engineering Science,2006,61(19):6372 - 6384.
- [9] ABEDINI H, SHAHROKHI M. Inferential closed-loop control of particle size distribution for styrene emulsion polymerization[J]. Chemical Engineering Science,2008,63(9):2378 - 2390.
- [10] CALICIA H J, HE Q P, WANG J. A reduced order soft sensor approach and its application to a continuous digester[J]. Journal of Process Control,2011,21(4):489 - 500.
- [11] GALICIA H J, HE Q P, WANG J. Comparison of the performance of a reduced-order dynamic PLS soft sensor with different updating schemes for digester control[J]. Control Engineering Practice,2012,20(8):747 - 760.
- [12] 黎善斌,王智,张卫东,孙忧贤. 网络控制系统的研究现

- 状和展望[J]. 信息与控制, 2003, 32(3): 239 - 244.
- LI Shan-bin, WANG Zhi, ZHANG Wei-dong, SUN You-xian. Status and prospect of networked control system [J]. Information and Control, 2003, 32(3): 239 - 244. (in Chinese)
- [13] PEDRO A, JULIAN S. Non-uniform sampled-data control of MIMO systems[J]. Annual Reviews in Control, 2001, 35(1): 65 - 76.
- [14] DING F, LIU G, LIU X P. Partially coupled stochastic gradient identification methods for non-uniformly sampled systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(8): 1976 - 1981.
- [15] 王宏伟, 夏浩. 非均匀多采样率非线性系统的模糊辨识[J]. 控制与决策, 2015, 30(9): 1646 - 1652.
- WANG Hong-wei, XIA Hao. Fuzzy identification for non-uniformly multi-rate sampled nonlinear systems [J]. Control and Decision, 2015, 30(9): 1646 - 1652. (in Chinese)
- [16] 张俊, 罗大庸, 孙妙平. 一种基于时滞区间不均分方法的变时延网络控制系统的新稳定性条件[J]. 电子学报, 2016, 44(1): 54 - 59.
- ZHANG Jun, LUO Da-yong, SUN Miao-ping. A new stability condition for networked control system with time-varying delay based on time delay uneven-partitioning approach[J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(1): 54 - 59. (in Chinese)
- [17] 田中大, 高宪文, 李琨. 基于 EMD 与 LS-SVM 的网络控制系统时延预测方法[J]. 电子学报, 2014, 42(5): 868 - 874.
- TIAN Zhong-da, GAO Xian-wen, LI Kun. Time-delay prediction method of networked control system based on EMD and LS-SVM[J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(5): 868 - 874. (in Chinese)
- [18] 刘金良. 一类网络环境下的离散线性系统的可靠性滤波器设计研究[J]. 电子学报, 2012, 40(12): 2557 - 2561.
- LIU Jin-liang. Network-based reliable filter design for a class of discrete linear systems[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(12): 2557 - 2561. (in Chinese)
- [19] 俞立, 张文安. 网络化控制系统分析与设计—切换系统处理方法[M]. 北京: 科学出版社, 2012. 59 - 64.
- YU Li, ZHANG Wen-an. Analysis and Design of Networked Control System-Switching System Processing Method[M]. Beijing: Science Press, 2012. 59 - 64. (in Chinese)
- [20] XIA Biao, LIAN jie. Stability of switched positive descriptor systems with average dwell time switching[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2015, 20(1): 177 - 184.

作者简介



王宏伟 男. 1969 年 3 月出生, 吉林长春人. 工学博士, 教授. 1999 年毕业于哈尔滨工业大学自动控制系. 现在大连理工大学控制科学与工程学院工作. 已发表 SCI、EI 等检索论文 110 篇, 发明专利 2 项. 主持和参与国家和地方项目 5 项. 研究方向为网络控制系统、多采样率系统控制、切换系统控制.

E-mail: wanghw@dlut.edu.cn



连捷 女. 1980 年 9 月出生, 吉林白城人. 工学博士, 教授. 2009 年毕业于东北大学控制科学与工程系. 现在大连理工大学控制科学与工程学院工作. 已发表 SCI、EI 等检索论文 30 篇. 主持和参与国家和地方项目 5 项. 研究方向为网络控制系统、时滞系统控制、切换系统控制.

E-mail: jielian@dlut.edu.cn