

基于 FDTD 的约瑟夫森结与 超导传输线协同分析方法

裴子激, 李晓春, 李 炎, 毛军发

(上海交通大学, 上海 200240)

摘 要: 为实现高性能处理器, 超导 RSFQ (快速单磁通量子) 电路被提出. 该电路主要由超导约瑟夫森结和超导无源传输线组成, 对其建模分析是超导 RSFQ 电路设计的基础. 本文提出了基于 FDTD (时域有限差分) 的约瑟夫森结与超导传输线的协同分析方法. 该方法采用 FDTD 数值方法求解超导传输线的电报方程. 在超导传输线与约瑟夫森结交界处的非线性边界条件上, 采用了 Newton-Raphson 迭代算法. 数值结果表明, 本文提出的约瑟夫森结和超导传输线的协同分析方法与 WRspice 仿真软件相比具有相同精度, 且运算效率显著提高.

关键词: 约瑟夫森结; 超导传输线; 时域有限差分

中图分类号: TM134; TM26

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2019)10-2187-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2019.10.021

Co-analysis of Josephson Junction and Superconducting Transmission Line Based on FDTD

PEI Zi-wei, LI Xiao-chun, LI Yan, MAO Jun-fa

(Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: Superconducting RSFQ (rapid single-flux-quantum) circuit was proposed for high performance processors, which is mainly composed of Josephson junctions and superconducting passive transmission lines. Its modeling and analysis are the basis of design of superconducting RSFQ circuits. In this paper, a method based on FDTD (finite-difference time-domain) to co-analyze superconducting transmission line combined with Josephson junctions is proposed. The FDTD numerical method is used to solve the telegraph equations of superconducting transmission line and the Newton-Raphson iterative algorithm is used to solve the nonlinear boundary conditions at the interfaces between the superconducting transmission line and Josephson junctions. The numerical results show that the proposed method has the same accuracy and higher efficiency compared with WRspice simulation software.

Key words: Josephson junction; superconducting transmission line; finite-difference time-domain

1 引言

传统 CMOS 集成电路尺寸和性能已接近极限, 为进一步缩小电路尺寸并提高性能, 一种基于约瑟夫森结 (Josephson junction) 的超导 RSFQ (rapid single-flux-quantum, 快速单磁通量子) 电路被提出^[1]. 目前国际上已有关于 RSFQ 处理器的文献报道^[2,3], 如名古屋大学设计并加工的 CORE e4^[2]. 测试结果表明, RSFQ 电路具有高速度、低功耗的特点, 有望成为新一代高性能处理器. 而 RSFQ 电路需采用 Josephson 结和超导传输线来

实现互连^[4,5], 其建模和分析对 RSFQ 电路的设计具有重要意义.

对于 Josephson 结, 目前已有描述其伏安特性的方程和等效电路模型. 通常采用的是 RCSJ (resistive-capacitive shunted junction, 电阻-电容分路结) 模型^[6,7]. 基于 RCSJ 模型, 国内外已有对 Josephson 结的分析和仿真研究^[8,9]. 其中, 文献[8]利用该模型导出的微分方程, 从势能角度分析 Josephson 结的脉冲响应; 文献[9]则根据该模型导出的电压电流关系在仿真软件中引入 Josephson 结元件, 从而实现了对含 Josephson 结电路的

仿真.

对超导传输线的研究主要在于传输线分布参数的提取^[10-12]. 超导传输线仍可以采用传输线分布参数模型,但与常规传输线不同的是,超导传输线通常采用二流体模型,超导传输线中存在常规电流和超导电流,超导电流满足伦敦方程,且远大于常规电流. 因此分析超导传输线时,要先联立麦克斯韦方程组与伦敦方程,解出超导传输线的电磁场分布. 基于电磁场分布求得 RLGC (电阻、电感、电导和电容)分布参数^[10,11],从而建立超导传输线的等效电路模型. 此外,文献[12]分析了超导电流对分布参数的影响,表明超导电流会产生额外的分布电感.

进一步,由于 SFQ 信号频率很高,在传输过程中会产生时延、畸变、反射等信号完整性问题,因此需对超导传输线进行精确的时域响应分析. 此外,Josephson 结作为超导传输线的驱动、接收电路,需要对 Josephson 结与超导传输线进行协同分析. 目前已有的协同分析主要依赖于 WRspice 仿真软件^[4,5],但仿真速度较慢,不能有效指导大规模 RSFQ 电路的设计. Josephson 结与超导传输线协同分析的难点在于:超导传输线为线性分布参数系统,而 Josephson 结为非线性器件. 文献[13]将超导传输线简化为集总参数电路,但分析精度不高. 因此目前尚未有精确的协同分析方法.

本文针对 Josephson 结和超导传输线组成的系统,提出了一种基于 FDTD 和 Newton-Raphson 迭代法的协同分析方法,精确计算了该系统的时域响应. 首先建立 Josephson 结与超导传输线组成系统的等效模型,其中 Josephson 结采用 RCSJ 模型,超导传输线采用精确的分布参数模型. 然后基于 FDTD 方法求解超导传输线方程. 并采用 Newton-Raphson 迭代法求解非线性器件 Josephson 结导出的非线性边界条件. 此外,论文还给出了算法的收敛条件与稳定性条件. 最后,本文方法的计算结果与 WRspice 的仿真结果进行了对比. 结果表明,本文提出的协同分析方法具有高精度、高效率的优点.

2 约瑟夫森结和无源传输线系统模型

含超导传输线和 Josephson 结系统的电路模型如图 1 所示. 该系统由超导传输线和两个带偏置的 Josephson 结组成,传输线的长度为 h . 其中,结 JJ_1 为驱动器, JJ_2 为接收器. Josephson 结均采用 RCSJ 模型^[6,7],其等效电路如图 2 所示. 实际的 Josephson 结 JJ 可等效为结电阻 R_J ,结电容 C_J 与理想 Josephson 结 J 的并联. 设 φ 为 Josephson 结的相位, I_c 为结的临界电流,则结两端的电压和通过结的电流可表示为^[8]:

$$I = KC_J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{K d\varphi}{R_J dt} + I_c \sin \varphi \quad (1)$$

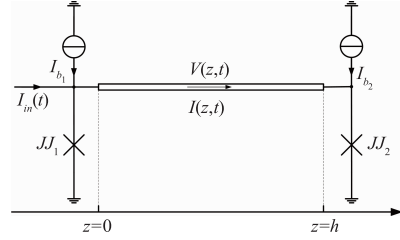


图1 Josephson结和超导传输线组成的系统电路模型

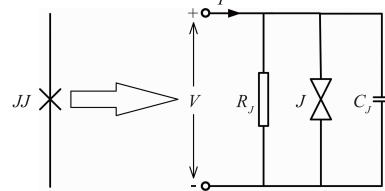


图2 Josephson结元件符号和RCSJ模型的等效电路^[6,7]

$$V = K \frac{d\varphi}{dt} \quad (2)$$

其中 $K = \Phi_0/2\pi$, Φ_0 为单磁通量子,且 $\Phi_0 = 2.0679 \times 10^{-15} \text{ T} \cdot \text{m}^2$.

超导传输线采用 RLGC 分布参数模型,其中 R 、 L 、 G 和 C 分别为传输线单位长度的电阻、电感、电导和电容. 由传输线理论,超导传输线上的电压 $V(z,t)$ 和电流 $I(z,t)$ 满足电报方程:

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} + L \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} + RI(z,t) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} + C \frac{\partial V(z,t)}{\partial t} + GV(z,t) = 0 \quad (4)$$

其中时间 $t \geq 0$ 、位置 $0 \leq z \leq h$. 设零时刻超导传输线上的电压、电流为零,即 $V(z,t)$ 、 $I(z,t)$ 的初始条件为:

$$V(z,0) = I(z,0) = 0 \quad (5)$$

设 φ_1 、 φ_2 分别为结 JJ_1 和 JJ_2 的相位, C_{J_1} 、 R_{J_1} 、 I_{c_1} 和 I_{b_1} 分别为 JJ_1 的结电容、结电阻、临界电流和偏置电流, C_{J_2} 、 R_{J_2} 、 I_{c_2} 和 I_{b_2} 分别为 JJ_2 的结电容、结电阻、临界电流和偏置电流,则由式(1)(2)得驱动端和接收端边界条件:

$$KC_{J_1} \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \frac{K d\varphi_1}{R_{J_1} dt} + I_{c_1} \sin \varphi_1 = I_{in}(t) + I_{b_1} - I(0,t) \quad (6)$$

$$V(0,t) = K \frac{d\varphi_1}{dt} \quad (7)$$

$$KC_{J_2} \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \frac{K d\varphi_2}{R_{J_2} dt} + I_{c_2} \sin \varphi_2 = I_{b_2} + I(h,t) \quad (8)$$

$$V(h,t) = K \frac{d\varphi_2}{dt} \quad (9)$$

设系统在零时刻的 Josephson 结相位为零,即 φ_1 、 φ_2 及其一阶导数的初始值为:

$$\varphi_1 \Big|_{t=0} = \frac{d\varphi_1}{dt} \Big|_{t=0} = \varphi_2 \Big|_{t=0} = \frac{d\varphi_2}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (10)$$

以上列出的微分方程式(3)(4)、初始条件式(5)(10)以及边界条件式(6)(7)(8)(9)组成了描述整个系统的方程组. 由于方程式(3)(4)为线性, 而边界条件为非线性, 所以无法在频域上求解, 因此本文将采用 FDTD 数值方法对上述方程组进行求解.

3 基于 FDTD 的数值求解

将传输线分成 N 段, 每段长度为 Δz , 并将求解时间区间按时间步长 Δt 分成 T 段, 由 FDTD, 传输线上电压、电流递推公式为:

$$V_k^{n+1} = \frac{B}{A} V_k^n + \frac{1}{A\Delta z} (I_{k-1}^{n+\frac{1}{2}} - I_k^{n+\frac{1}{2}}), k=2, 3, \dots, N \quad (11)$$

$$I_k^{n+\frac{1}{2}} = \frac{F}{E} I_k^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{E\Delta z} (V_k^{n+1} - V_{k+1}^{n+1}), k=1, 2, \dots, N \quad (12)$$

其中 V_i^j, I_i^j 和参数 A, B, E, F 表示为:

$$\begin{cases} V_i^j = V((i-1)\Delta z, j\Delta t) \\ I_i^j = I\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\Delta z, j\Delta t\right) \\ A = \frac{C}{\Delta t} + \frac{G}{2}, B = \frac{C}{\Delta t} - \frac{G}{2} \\ E = \frac{L}{\Delta t} + \frac{R}{2}, F = \frac{L}{\Delta t} - \frac{R}{2} \end{cases} \quad (13)$$

对于驱动端边界, 通过变量替换 $x_1 = \varphi_1$ 和 $x_2 = d\varphi_1/dt$, 可将式(6)(7)分别改写为:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{R_j C_{j_1}} x_2 - \frac{I_{c_1}}{K C_{j_1}} \sin x_1 + \frac{I_{in}(t) + I_{b_1} - I(0, t)}{K C_{j_1}} \end{cases} \quad (14)$$

$$V(0, t) = K x_2 \quad (15)$$

设 $I_0^n = I(0, n\Delta t)$, $x_i^n = x_i(n\Delta t)$, ($i=1, 2$), 则式(14)(15)可写成离散差分的形式:

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = x_1^n + \Delta t \cdot x_2^{n+1} \\ x_2^{n+1} = x_2^n + \Delta t \left(-\frac{1}{R_j C_{j_1}} x_2^{n+1} - \frac{I_{c_1}}{K C_{j_1}} \sin x_1^{n+1} + \frac{I_{in}((n+1)\Delta t) + I_{b_1} - I_0^{n+1}}{K C_{j_1}} \right) \end{cases} \quad (16)$$

$$V_1^{n+1} = K x_2^{n+1} \quad (17)$$

方程式(3)在驱动端边界处的离散形式为:

$$\frac{I_1^{n+\frac{1}{2}} - I_0^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z/2} + C \frac{V_1^{n+1} - V_1^n}{\Delta t} + G \frac{V_1^{n+1} + V_1^n}{2} = 0 \quad (18)$$

其中

$$I_0^{n+\frac{1}{2}} = (I_0^n + I_0^{n+1})/2 \quad (19)$$

联立式(16)(17)(18)(19)可得关于驱动端的边界条件方程:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{R_j C_{j_1}} + \frac{\Delta z}{C_{j_1}} A \right) x_2^{n+1} - \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\Delta z}{C_{j_1}} B \right) x_2^n \\ & - \frac{I_{in}((n+1)\Delta t) + I_{b_1} - 2I_1^{n+\frac{1}{2}} + I_0^n}{K C_{j_1}} \\ & + \frac{I_{c_1}}{K C_{j_1}} \sin(x_1^n + \Delta t x_2^{n+1}) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

对于接收端边界, 设 $y_1 = \varphi_2$, $y_2 = d\varphi_2/dt$, $I_{N+1}^n = I(h, n\Delta t)$, $y_i^n = y_i(n\Delta t)$, ($i=1, 2$), 通过与驱动端类似的推导可得接收端的边界条件方程:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{R_j C_{j_2}} + \frac{\Delta z}{C_{j_2}} A \right) y_2^{n+1} - \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\Delta z}{C_{j_2}} B \right) y_2^n \\ & - \frac{I_{b_2} + 2I_N^{n+\frac{1}{2}} - I_{N+1}^n + \frac{I_{c_2}}{K C_{j_2}} \sin(y_1^n + \Delta t y_2^{n+1})}{K C_{j_2}} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

由于方程式(20)中的 x_1^n, x_2^n, I_0^n 和式(21)中的 y_1^n, y_2^n, I_{N+1}^n 均为 $(n+1)\Delta t$ 时刻前的已知量, 而 $I_1^{n+\frac{1}{2}}, I_N^{n+\frac{1}{2}}$ 可以由递推式(12)得到, 所以可分别从方程式(20)和(21)中解出 x_2^{n+1} 和 y_2^{n+1} . 方程式(20)(21)都是超越方程, 无法求得解析解, 因此采用数值方法求解, 常用的非线性方程数值解法是 Newton-Raphson 迭代法. 以方程式(20)为例, 令其左边为函数 $f(x)$, 即

$$\begin{aligned} f(x) = & \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{R_j C_{j_1}} + \frac{\Delta z}{C_{j_1}} A \right) x - \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\Delta z}{C_{j_1}} B \right) x_2^n \\ & - \frac{I_{in}((n+1)\Delta t) + I_{b_1} - 2I_1^{n+\frac{1}{2}} + I_0^n}{K C_{j_1}} + \frac{I_{c_1}}{K C_{j_1}} \sin(x_1^n + \Delta t x) \end{aligned} \quad (22)$$

则问题转化为求 $f(x)$ 的零点. 首先应确保 $f(x)$ 的零点具有唯一性, 否则会得到错误的解, 导致结果发散. 若 $f(x)$ 单调, 则零点唯一. $f(x)$ 的导数为

$$f'(x) = \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{R_j C_{j_1}} + \frac{\Delta z}{C_{j_1}} A + \frac{I_{c_1}}{K C_{j_1}} \Delta t \cos(x_1^n + \Delta t x) \quad (23)$$

为使 $f(x)$ 的导数恒为非负, 只需 $\Delta t, \Delta z$ 满足收敛条件:

$$\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{R_j C_{j_1}} + \frac{\Delta z}{C_{j_1}} A \geq \frac{I_{c_1}}{K C_{j_1}} \Delta t \quad (24)$$

则 $f(x)$ 的零点唯一, 即方程式(20)有唯一解.

同理, 由方程式(21), 当 $\Delta t, \Delta z$ 满足收敛条件

$$\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{R_j C_{j_2}} + \frac{\Delta z}{C_{j_2}} A \geq \frac{I_{c_2}}{K C_{j_2}} \Delta t \quad (25)$$

时, 方程式(21)有唯一解.

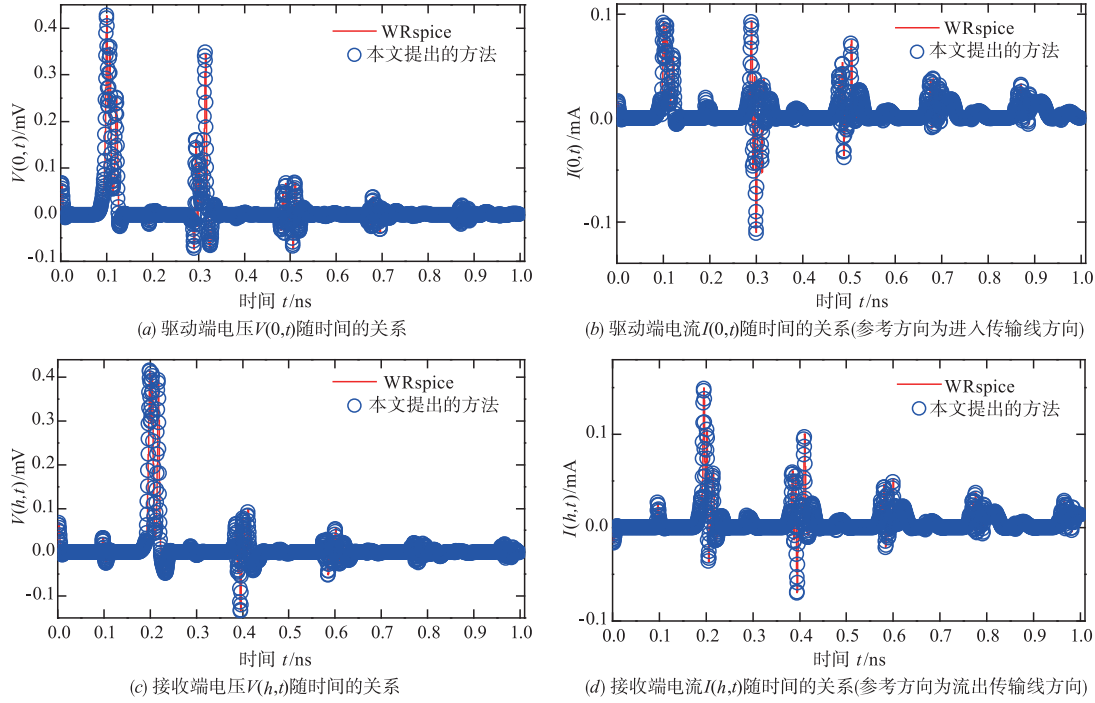


图3 本文提出方法的计算结果和WRspice的仿真结果对比

此外, FDTD 的时间和空间步长 $\Delta t, \Delta z$ 还需满足 Courant 稳定性条件

$$\Delta t \leq \Delta z / v_p \quad (26)$$

其中 v_p 为相速度。

由上述推导, 本文所提出方法求解过程如下:

1) 先设定传输线上各处电流、电压的初始值 I_k^0, V_k^0 , Josephson 结相位及其一阶导数的初始值 $x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0$ 都为零;

2) 设定满足收敛性条件式(24)(25)和 FDTD 稳定性条件式(26)的时间、空间步长 $\Delta t, \Delta z$;

3) 已知 n 时刻传输线上电压、电流以及 Josephson 结相位的情况下, 在 $n+1$ 时刻进行迭代, 先用 Newton-Raphson 迭代法求解方程式(20)和(21), 解出 x_2^{n+1} 和 y_2^{n+1} , 然后将 x_2^{n+1} 代入式(16)(17)(18)(19)得 $x_1^{n+1}, V_1^{n+1}, J_0^{n+1}$, 同理, 由 y_2^{n+1} 可得 $y_1^{n+1}, V_{N+1}^{n+1}, I_{N+1}^{n+1}$, 再将 $V_1^{n+1}, V_{N+1}^{n+1}, J_0^{n+1}, J_{N+1}^{n+1}$ 代入式(11)(12)得传输线上其余点处的电压 V_k^{n+1} 和电流 I_k^{n+1} ;

4) 重复3)的过程, 直至 $n+1$ 达到求解区间的最后一个时间点 T , 迭代结束。

4 数值结果

数值实验中, 超导传输线的分布参数为: $R = G = 0, L = 39.366 \text{ nH/m}, C = 2.2979 \text{ nF/m}$, 传输线长度 $h = 0.01 \text{ m}$; 驱动与接收 Josephson 结的参数一致, 为: $I_c = 0.1 \text{ mA}, R_j = 3 \Omega, C_j = 1.0 \text{ pF}, I_b = 0.07 \text{ mA}$. 输入电流为高斯脉冲:

$$I_{in}(t) = I_m \exp\left(-\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2\right)$$

其中, $I_m = 0.118 \text{ mA}, t_0 = 100 \text{ ps}, \tau = 10 \text{ ps}$.

本文提出方法的计算结果和 WRspice 的仿真结果如图3所示, 其中(a)、(b)分别是超导传输线驱动端电压 $V(0,t)$ 、电流 $I(0,t)$ 的时域响应, (c)和(d)分别是接收端电压 $V(h,t)$ 和电流 $I(h,t)$ 的时域响应。

表1列出了本文提出方法的运行时间和 WRspice 的仿真时间. 其中本文方法和 WRspice 的时间步长都设为 $\Delta t = 0.01 \text{ ps}$. 对于不同长度的超导传输线, 本文方法分别选取了不同的空间步长. 通过对比可以发现, 在时间步长相同的前提下, 对于不同传输线长度, 采用不同的空间步长, 本文方法的计算速度都快于 WRspice 的仿真速度。

表1 本文提出的方法和 WRspice 运行时间对比

长度(m)	Δz (m)	本文方法 (s)	WRspice (s)
0.01	1×10^{-5}	1.58	9.07
	2×10^{-5}	1.30	
	1×10^{-4}	1.01	
0.02	1×10^{-5}	2.02	9.17
	2×10^{-5}	1.45	
	1×10^{-4}	1.05	
0.05	1×10^{-5}	3.55	10.88
	2×10^{-5}	2.28	
	1×10^{-4}	1.15	

5 结论

本文针对 Josephson 结与超导传输线组成的非线性系统,提出了一种精确高效的时域响应分析方法. 基于精确的系统模型,采用 FDTD 方法求解超导传输线方程,并结合 Newton-Raphson 迭代法处理非线性器件 Josephson 结产生的非线性边界,解出传输线的时域信号响应. 最后,通过与仿真软件 WRspice 的对比,验证了本文提出的 Josephson 结和超导传输线协同分析方法的精度与效率.

参考文献

- [1] Likharev K K, Semenov V K. RSFQ logic/memory family: a new Josephson-junction technology for sub-terahertz-clock-frequency digital systems[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 1991, 1(1): 3-28.
- [2] Ando Y, Sato R, Tanaka M, et al. Design and demonstration of an 8-bit bit-serial RSFQ microprocessor: CORE e4[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2016, 26(5): 1-5.
- [3] Tang G M, Takagi K, Takagi N. 32 × 32-bit 4-bitbit-slice integer multiplier for RSFQ microprocessors [J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2017, PP(99): 1-1.
- [4] Suzuki H, Nagasawa S, Miyahara K, et al. Characteristics of driver and receiver circuits with a passive transmission line in RSFQ circuits[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2002, 10(3): 1637-1641.
- [5] Hashimoto Y, Yorozu S, Kameda Y, et al. Design and investigation of gate-to-gate passive interconnections for SFQ logic circuits[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2005, 15(3): 3814-3820.
- [6] McCumber D E. Tunneling and weak-link superconductor phenomena having potential device applications[J]. Journal of Applied Physics, 1968, 39(6): 2503-2508.
- [7] Stewart W C. Current-voltage characteristics of Josephson junctions[J]. Apply Phys Lett, 1968, 12(8): 277-279.
- [8] Dhong S H, Van Duzer T. Minimum-width control-current pulse for Josephson logic gates [J]. IEEE Trans Electron Devices, 1980, 27(10): 1965-1973.
- [9] 樊彬, 周铁戈, 等. Multisim 在超导器件研究中的应用[J]. 电子学报, 2010, 38(8): 1886-1891.
Fan Bin, Zhou Tie-ge, et al. The application of Multisim in superconductive electronics [J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(8): 1886-1891. (in Chinese)
- [10] Xiao S, Vahldieck R. An extended 2D FDTD method for hybrid mode analysis of lossy and superconducting structures[A]. Antennas and Propagation Society International Symposium[C]. IEEE, 1994. 1774-1777.
- [11] Boutboul M S, Kokabi H, Pyée M. Modeling of microstrip quasi-TEM superconducting transmission lines, comparison with experimental results[J]. Physica C Superconductivity, 1998, 309(1-2): 71-78.
- [12] Sheen D M, Ali S M, Oates D E, et al. Current distribution, resistance, and inductance for superconducting strip transmission lines[J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 1991, 1(2): 108-115.
- [13] Dimov B, Ortlepp T, Toepfer H, et al. Design issues for interconnects in densely packaged RSFQ structures [J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2003, 13(2): 498-501.

作者简介



裴子激 男, 1993 年 10 月出生于江苏. 硕士研究方向为超导 RSFQ 电路互连.



李晓春(通信作者) 女, 1977 年 2 月出生于山西. 1999 年、2002 年先后于天津大学获学士、硕士学位, 2007 年于上海交通大学获博士学位. 现为上海交通大学高速电子系统设计与电磁兼容重点实验室教授, 博士生导师, 长期从事高速与微波电路、互连技术、电磁兼容等研究工作.
E-mail: lixc@sjtu.edu.cn