

# 近似线性相位全通数字滤波器的 迭代重加权 Minimax 设计

赖春露<sup>1</sup>, 王 路<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工业大学(威海)信息与电气工程学院, 山东威海 264209; 2. 山东大学澳国立联合理学院, 山东威海 264209)

**摘 要:** 近似线性相位是许多滤波系统希望具有的重要特性, 全通滤波器则是实现这个特性的重要技术手段. 提出全通数字滤波器的一种迭代重加权 minimax 设计方法, 最小化最大加权线性相位偏差, 并利用群延迟偏差信息对权函数进行迭代更新, 使群延迟偏差函数近似等纹波. 为展现该方法的优越性, 将该方法应用于线性相位希尔伯特变换器及相位均衡器的设计. 设计例子展示了算法良好的收敛性, 以及在实现滤波系统近似线性相位和近似常数群延迟方面的优良性能.

**关键词:** 全通数字滤波器; 相位均衡器; 希尔伯特变换器; 线性相位

**中图分类号:** TN79      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2020)04-0743-08

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2020.04.016

## An Iterative Reweighted Minimax Design of All-pass Filters for Nearly Linear Phases

LAI Chun-lu<sup>1</sup>, WANG Lu<sup>2</sup>

(1. School of Information and Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology (Weihai), Weihai, Shandong 264209, China;  
2. SDU-ANU Joint Science College, Shandong University (Weihai), Weihai, Shandong 264209, China)

**Abstract:** Linear phases are often a requisite in many signal filtering applications. All-pass digital filters are the main device to realize the linear phases. An iterative reweighted minimax method is proposed for the design of all-pass digital filters. The method minimizes the maximum weighted phase deviation from some linear phase, and reduces the maximum group-delay deviation from some constant group delay through updating the phase-error weight function iteratively by virtue of the group-delay deviation. To demonstrate its advantages, the proposed method is applied in the designs of phase equalizers and linear-phase Hilbert transformers. Simulation results show that the proposed algorithm has good convergence properties, and is very effective in realizing the nearly linear phase and nearly constant group delay of the filtering system.

**Key words:** all-pass filter; phase equalizer; Hilbert transformer; linear phase

## 1 引言

作为基本的无损信号处理构件, 全通数字滤波器的设计及应用, 几十年来一直受到研究者的关注和青睐<sup>[1-25]</sup>. 全通滤波器的成功应用, 主要归因于全通滤波器只改变信号的相频特性而完全不影响信号幅频关系这一显著特征. 由于这一显著特征, 全通滤波器特别适合相位/群延迟均衡器、希尔伯特变换器及分数延迟全通滤波器等设计, 使全通滤波器本身或经其补偿后的相位响应接近实际应用所期望的线性相位.

由于全通滤波器的幅频响应为常数, 其设计问题归结为相位响应和/或群延迟响应的逼近问题. 文献[1, 4, 7]最小化最大群延迟误差, 得到了等纹波的群延迟误差响应. 更多文献<sup>[2, 3, 5, 6, 9-14, 18, 19, 21, 23, 25]</sup>致力于最小化相位逼近误差. 文献[25]证明了相位逼近误差等纹波解是最大相位误差最小化问题的最优解. 但由于这些最小化相位误差的方法未对群延迟误差加以约束, 得到的全通滤波器通常有较大的最大群延迟误差. 文献[26]针对有限冲击响应滤波器的相位误差约束 minimax 设计, 提出一种相位误差迭代重约束方法, 既保证

相位误差满足约束条件,又能有效减小最大群延迟误差,使群延迟误差近似等纹波.文献[13]将这一思想应用到全通滤波器的设计中,提出一个迭代重加权 minimax 方法,得到了相位误差和群延迟误差都很小的全通滤波器.文献[27,28]针对一般数字滤波器的设计问题,提出迭代重加权相位误差 minimax 算法,取得了良好的设计效果.

按优化性能指标分,全通数字滤波器的设计主要有加权最小二乘法<sup>[11,12,19]</sup>、最小  $p$ -范数方法<sup>[3,21]</sup>及加权 minimax 方法<sup>[2,4,6,7,9,10,13,14,18,25]</sup>.本文考虑加权相位误差 minimax 设计,即最小化最大加权相位误差,并用重加权技术<sup>[13,27]</sup>减小最大群延迟误差.这里的重加权技术是用群延迟误差函数更新相位误差权函数,有别于文献[6,12,18,19,21]中用相位误差函数更新相位误差权函数的方法.为使全通滤波器本身的相位或用全通滤波器补偿后的相位尽可能接近线性相位,把期望线性相位响应  $\tau\omega$  中的  $\tau$  当作优化变量参与优化.这一思想源于早期文献[4,7],并在最近十几年的研究中得到广泛应用<sup>[1,27,29]</sup>.诚然,不少应用希望滤波器具有线性相位和不随频率变化的常数群延迟,但并不太多关心相位和群延迟的具体数值.把  $\tau$  当作优化变量,非常有利于减小实际相位与线性相位及实际群延迟与常数群延迟之间的偏差,使所设计滤波器具有近似线性相位和近似常数群延迟<sup>[1,4,7,27,29]</sup>.

为便于滤波器的硬件实现,本文将全通滤波器表示成二阶节级联的形式,与许多文献采用的单一多项式表示相比,更利于设计中施加充分必要的三角稳定性约束,以保证所设计滤波器的稳定性.对所形成的非凸 minimax 设计问题,本文应用高斯-牛顿方法,将关于待优化变量非线性的相位误差函数用其一阶泰勒展开来近似,把问题转化成线性 minimax 问题进行求解.

本文将所提迭代重加权 minimax 设计算法,应用于相位均衡器及希尔伯特变换器的设计.通过设计例子,展示了算法的良好收敛特性,并与文献方法进行了比较,表明本文方法在实现滤波系统近似线性相位和近似常数群延迟方面的有效性.

## 2 设计问题的数学描述

不失一般性,假设无限冲击响应全通数字滤波器的阶数  $N$  为偶数,将其分解为  $N/2$  个二阶全通数字滤波器的连乘,用频率响应表示为

$$A(e^{j\omega}, \mathbf{a}) = \prod_{n=1}^{N/2} A_n(e^{j\omega}, \mathbf{a}_n) \quad (1a)$$

$$A_n(e^{j\omega}, \mathbf{a}_n) = e^{-j2\omega} \frac{1 + a_{n1}e^{j\omega} + a_{n2}e^{j2\omega}}{1 + a_{n1}e^{-j\omega} + a_{n2}e^{-j2\omega}} \quad (1b)$$

式(1)中,  $\omega$  表示数字角频率,  $j$  为虚数单位,  $\mathbf{a}_n = [a_{n1},$

$a_{n2}]^T$  及  $\mathbf{a} = [a_1^T, a_2^T, \dots, a_{N/2}^T]^T$  分别是二阶全通滤波器  $A_n(z, \mathbf{a}_n)$  及  $N$  阶全通滤波器  $A(z, \mathbf{a})$  的系数向量.容易得到:

$$A(e^{j\omega}, \mathbf{a}) = e^{j\theta(\omega, \mathbf{a})} \quad (2)$$

其幅频响应恒等于 1, 相频响应为

$$\theta(\omega, \mathbf{a}) = \sum_{n=1}^{N/2} \theta_n(\omega, \mathbf{a}_n) \quad (3a)$$

$$\theta_n(\omega, \mathbf{a}_n) = -2\omega + 2 \operatorname{atan} \frac{\mathbf{S}^T(\omega) \mathbf{a}_n}{1 + \mathbf{C}^T(\omega) \mathbf{a}_n} \quad (3b)$$

其中:  $\mathbf{S}(\omega) = [\sin\omega, \sin(2\omega)]^T$ ,  $\mathbf{C}(\omega) = [\cos\omega, \cos(2\omega)]^T$ .

设待补偿的相位响应为  $\phi_0(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega_p = [\omega_L, \omega_H] \subset [0, \pi]$ , 用  $N$  阶全通滤波器补偿后的期望相位响应为  $-\tau\omega$ , 其中  $\tau$  待定. 从而, 全通滤波器的期望相位响应为

$$\phi_D(\omega, \tau) = -\phi_0(\omega) - \tau\omega, \omega \in \Omega_p \quad (4)$$

相位响应逼近误差及群延迟误差分别为

$$E_p(\omega, \mathbf{a}, \tau) = \theta(\omega, \mathbf{a}) - \phi_D(\omega, \tau) \quad (5)$$

$$= \phi_0(\omega) - N\omega + \tau\omega + 2 \sum_{n=1}^{N/2} \operatorname{atan} \frac{\mathbf{S}^T(\omega) \mathbf{a}_n}{1 + \mathbf{C}^T(\omega) \mathbf{a}_n}$$

$$E_g(\omega, \mathbf{a}, \tau) = -\frac{d}{d\omega} E_p(\omega, \mathbf{a}, \tau) = -\frac{d}{d\omega} [\theta(\omega, \mathbf{a}) - \phi_D(\omega, \tau)] \quad (6)$$

类似于文献[1,4,7,27,29], 本文把  $\tau$  看作优化变量参与优化. 文献中的设计例子表明, 让  $\tau$  参与优化有以下明显的优点: 实际群延迟随频率的波动要比固定  $\tau$  时小很多. 传统方法中, 虽然期望的  $\tau$  固定不变, 但实际的群延迟波动很大. 让  $\tau$  参与优化, 能使实际群延迟的波动大幅度减小, 有利于滤波信号失真度的减小, 是应用所需要的<sup>[1,4,7-9,13,18,20,30]</sup>.

所有极点位于复平面单位圆内, 是全通滤波器  $A(z, \mathbf{a})$  稳定的一个充要条件. 另一个等价的充要条件是稳定三角形条件, 即任意一个二阶节  $A_n(z, \mathbf{a}_n)$  的系数向量  $\mathbf{a}_n$  均位于二维向量空间的一个三角形内<sup>[1]</sup>. 本文采用稳定三角形条件来保证所设计滤波器的稳定性, 为使所设计的全通滤波器具有一定的稳定裕量, 通常要求其极点位于复平面上圆心在原点半径为  $r < 1$  的圆内, 相应的稳定三角形条件表示为<sup>[27]</sup>

$$|ra_{n1}| - a_{n2} < r^2, a_{n2} < r^2, n = 1, 2, \dots, N/2 \quad (7)$$

若预先知道或希望滤波器的群延迟不超出某个范围, 如  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ , 可将其作为约束条件来限制  $\tau$  的搜索范围. 于是, 全通数字滤波器  $A(z, \mathbf{a})$  的加权相位误差 minimax 设计问题可描述为

$$\min_{\mathbf{a}, \tau} \max_{\omega \in \Omega_p} \{W(\omega) | E_p(\omega, \mathbf{a}, \tau) | \} \quad (8a)$$

$$\text{s. t. } |ra_{n1}| - a_{n2} < r^2, a_{n2} < r^2, n = 1, 2, \dots, N/2 \quad (8b)$$

$$\tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max} \quad (8c)$$

其中  $E_p(\omega, \mathbf{a}, \tau)$  是式(5)定义的相位误差函数,  $W(\omega) > 0$  是相位误差权函数.

### 3 设计问题的求解算法

当  $W(\omega) = 1$  时, 求解问题(8)得到的相位误差  $E_p(\omega, \mathbf{a}, \tau)$ , 在  $\Omega_p = [\omega_L, \omega_H]$  上是等纹波的. 但群延迟误差  $E_g(\omega, \mathbf{a}, \tau)$  没有这个性质, 而是在  $\Omega_p$  的带边及附近, 取值要比其它频率点大很多, 导致最大群延迟误差很大. 增大带边及附近权函数  $W(\omega)$  的取值, 可减小带边及附近的相位误差, 降低带边及附近的群延迟误差, 达到减小最大群延迟误差的目的<sup>[13, 27, 28]</sup>. 文献[13]直接利用群延迟误差绝对值函数的分段线性包络线对相位误差进行重加权, 并用于分数时延全通滤波器的设计. 文献[27, 28]则对包络线进行修改后再重加权相位误差, 在一般数字滤波器设计中成功应用. 本文结合这两种方法, 当  $\omega_L = 0$  时直接利用群延迟误差绝对值函数的分段线性包络线, 当  $\omega_L \neq 0$  时则利用修改的包络线对相位误差权函数进行迭代更新, 使群延迟误差函数逐次接近等纹波, 最大限度减小最大群延迟误差.

滤波器设计中, 用逼近误差的包络线对逼近误差重加权, 以减小最大逼近误差的思想来源于文献[31], 并得到后续广泛应用<sup>[6, 12, 13, 18, 19, 21, 27, 28]</sup>. 该方法采用累乘规则更新权函数, 即  $W_{k+1}(\omega) = W_k(\omega) F^\alpha(k, \omega)$ , 其中  $F(k, \omega) > 0$  是反映当前绝对值误差随  $\omega$  变化趋势的某种包络线, 参数  $0 < \alpha < 2.0$  用于控制算法的收敛性.  $\alpha$  值越大, 算法收敛越快, 但  $\alpha$  值过大会使算法振荡甚至不收敛.  $\alpha$  值越小, 越能保证算法收敛, 但  $\alpha$  值过小会使算法收敛过慢. 本文采用的包络线及修改的包络线  $\bar{F}(k, \omega)$ , 是  $\Omega_p$  上关于  $\omega$  的拟凸函数. 采用这样的  $\bar{F}(k, \omega)$  并取  $\alpha = 0.5$ , 能保证算法收敛并有较快的收敛速度.

假设已经有一个问题(8)的求解算法, 并记第  $k$  次迭代的相位误差权函数为  $W_k(\omega)$ , 此权函数下问题(8)的解为  $(\mathbf{a}_w(k), \tau_w(k))$ , 则本文的全通数字滤波器迭代重加权 minimax 设计算法可描述于算法 1. 算法 1 的第 2 步, 求解权函数给定的加权相位误差 minimax 问题(9). 这是一个非线性的函数逼近问题, 本文应用高斯-牛顿方法<sup>[32]</sup>转化成线性 minimax 问题进行迭代求解. 高斯-牛顿法是求解非线性函数逼近问题的一个经典方法, 其核心是在当前迭代点对非线性的逼近误差进行一阶泰勒近似.

#### 算法 1 设计全通数字滤波器的迭代重加权 minimax 算法

1. 初始化滤波器系数  $\mathbf{a}_w(0) = \mathbf{0}$ ,  $\tau_{\min} < \tau_w(0) < \tau_{\max}$ . 令  $k = 1, W_1(\omega) = 1, E_g^{\max} = \infty$ .

2. 求解下述加权相位误差 minimax 问题:

$$(\mathbf{a}_w(k), \tau_w(k)) = \min_{\mathbf{a}, \tau} \max_{\omega \in \Omega_p} \{W_k(\omega) |E_p(\omega, \mathbf{a}, \tau)|\} \quad (9a)$$

$$\text{s. t. } |ra_{n1}| - a_{n2} < r^2, a_{n2} < r^2, n = 1, 2, \dots, N/2 \quad (9b)$$

$$\tau_{\min} < \tau < \tau_{\max} \quad (9c)$$

3. 计算群延迟误差绝对值  $E_g(k, \omega) = |E_g(\omega, \mathbf{a}_w(k), \tau_w(k))|$ , 若  $|\max(E_g(k, \omega)) - E_g^{\max}| < \eta E_g^{\max}$  (其中  $\eta > 0$  为允许误差), 终止算法. 否则继续.

4. 计算  $E_g(k, \omega)$  在  $\Omega_p$  上的分段线性包络线  $F_g(k, \omega)$ .

5. 如果  $\omega_L \neq 0$ , 像文献[27]那样计算修改的群延迟误差包络线, 记为  $\bar{F}_g(k, \omega)$ ; 如果  $\omega_L = 0$ , 令  $\bar{F}_g(k, \omega) = F_g(k, \omega)$ .

6. 更新相位误差权函数:

$$W_{k+1}(\omega) = W_k(\omega) \sqrt{\bar{F}_g(k, \omega)} \quad (10)$$

令  $k = k + 1$ , 返回第 2 步.

假设当前迭代点为  $[(\mathbf{a}^{(\ell)})^T, \tau^{(\ell)}]^T$ , 其中非负整数  $\ell$  代表当前迭代次数, 相位误差函数  $E_p(\omega, \mathbf{a}, \tau)$  在当前迭代点的一阶泰勒近似为  $\bar{E}_p(\ell, \omega, \delta\mathbf{a}, \delta\tau)$ , 其中:

$$\delta\mathbf{a} = [\delta a_1^T, \delta a_2^T, \dots, \delta a_{N/2}^T]^T = \mathbf{a} - \mathbf{a}^{(\ell)}, \delta\tau = \tau - \tau^{(\ell)} \quad (11)$$

$$\bar{E}_p(\ell, \omega, \delta\mathbf{a}, \delta\tau)$$

$$= E_p(\omega, \mathbf{a}^{(\ell)}, \tau^{(\ell)}) + \delta\mathbf{a}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} E_p(\omega, \mathbf{a}^{(\ell)}, \tau^{(\ell)}) + \delta\tau \frac{\partial}{\partial \tau} E_p(\omega, \mathbf{a}^{(\ell)}, \tau^{(\ell)}) \quad (12)$$

将式(5)代入式(12), 可得

$$\bar{E}_p(\ell, \omega, \delta\mathbf{a}, \delta\tau) = E_p(\omega, \mathbf{a}^{(\ell)}, \tau^{(\ell)}) + [\delta\mathbf{a}^T, \delta\tau] \psi(\omega, \mathbf{a}^{(\ell)}, \tau^{(\ell)}) \quad (13)$$

其中

$$\psi(\omega, \mathbf{a}^{(\ell)}, \tau^{(\ell)})$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times \frac{[1 + \mathbf{C}^T(\omega) \mathbf{a}_1^{(\ell)}] \mathbf{S}(\omega) - [\mathbf{S}^T(\omega) \mathbf{a}_1^{(\ell)}] \mathbf{C}(\omega)}{[1 + \mathbf{C}^T(\omega) \mathbf{a}_1^{(\ell)}]^2 + [\mathbf{S}^T(\omega) \mathbf{a}_1^{(\ell)}]^2} \\ \vdots \\ 2 \times \frac{[1 + \mathbf{C}^T(\omega) \mathbf{a}_{N/2}^{(\ell)}] \mathbf{S}(\omega) - [\mathbf{S}^T(\omega) \mathbf{a}_{N/2}^{(\ell)}] \mathbf{C}(\omega)}{[1 + \mathbf{C}^T(\omega) \mathbf{a}_{N/2}^{(\ell)}]^2 + [\mathbf{S}^T(\omega) \mathbf{a}_{N/2}^{(\ell)}]^2} \end{bmatrix} \omega \quad (14)$$

用式(13)的  $\bar{E}_p(\ell, \omega, \delta\mathbf{a}, \delta\tau)$  代替式(9a)中的  $E_p(\omega, \mathbf{a}, \tau)$ , 并对  $\delta\tau$  及  $\delta\mathbf{a}$  进行约束:  $-h_\tau \leq \delta\tau \leq h_\tau, -h_a \leq \delta a_{n1} \leq h_a, -h_a \leq \delta a_{n2} \leq h_a$ , 其中  $h_\tau > 0$  及  $h_a > 0$  是步长参数, 则问题(9)可转化为如下可用现有凸优化软件进行求解的线性 minimax 问题:

$$\min_{\delta\mathbf{a}, \delta\tau} \max_{\omega \in \Omega_p} \left\{ W(\omega) \left| \begin{bmatrix} [\delta\mathbf{a}^T, \delta\tau] \psi(\omega, \mathbf{a}^{(\ell)}, \tau^{(\ell)}) \\ + E_p(\omega, \mathbf{a}^{(\ell)}, \tau^{(\ell)}) \end{bmatrix} \right| \right\} \quad (15a)$$

$$\text{s. t. } r\delta a_{n1} - \delta a_{n2} < r^2 - ra_{n1}^{(\ell)} + a_{n2}^{(\ell)}, n = 1, 2, \dots, N/2 \quad (15b)$$

$$-r\delta a_{n1} - \delta a_{n2} < r^2 + ra_{n1}^{(\ell)} + a_{n2}^{(\ell)}, n = 1, 2, \dots, N/2 \quad (15c)$$

$$\delta a_{n2} < r^2 - a_{n2}^{(\ell)}, n = 1, 2, \dots, N/2 \quad (15d)$$

$$-h_a \leq \delta a_{n1} \leq h_a, -h_a \leq \delta a_{n2} \leq h_a, n = 1, 2, \dots, N/2 \quad (15e)$$

$$-h_\tau \leq \delta\tau \leq h_\tau \quad (15f)$$

一阶泰勒近似的残差较小时, 高斯-牛顿法有较快的局部收敛性<sup>[32]</sup>. 式(15e)及式(15f)对  $\delta\mathbf{a}$  和  $\delta\tau$  的约束, 就是为使一阶泰勒近似的残差足够小, 以保证高斯-牛顿法的收敛性. 大量例子表明, 参数取值  $h_\tau = 10^{-3}$  和  $h_a = 0.1$ , 能够保证算法2描述的迭代线性 minimax 算法收敛, 且有较快的收敛速度. 在算法2的第3步中增加线搜索能使算法单调收敛, 但可能使收敛速度变慢, 本文不采用线搜索, 而是直接用  $\delta\mathbf{a}^{(\ell)}$ ,  $\delta\tau^{(\ell)}$  来更新  $\mathbf{a}^{(\ell)}$  和  $\tau^{(\ell)}$ .

将算法2代入算法1的第2步, 得到迭代重加权 minimax 设计的完整算法. 需要指出, 这个算法是将期望群延迟  $\tau$  当作优化变量参与优化的. 如果  $\tau$  事先给定不参与优化, 只需将算法2中算出的梯度向量  $\Psi(\omega, \mathbf{a}^{(\ell)}, \tau^{(\ell)})$  的最后一个元素设置为零即可.

#### 算法2 问题(9)的迭代线性 minimax 算法

1. 取  $\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{a}_w(k-1)$ ,  $\tau^{(0)} = \tau_w(k-1)$ ,  $h_\tau = 10^{-3}$ ,  $h_a = 0.1$ . 令  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\ell = 0$ .
2. 分别按式(6)和式(14)计算  $E_p(\omega, \mathbf{a}^{(\ell)}, \tau^{(\ell)})$  和  $\Psi(\omega, \mathbf{a}^{(\ell)}, \tau^{(\ell)})$ .
3. 求线性 minimax 问题(15)的解  $(\delta\mathbf{a}^{(\ell)}, \delta\tau^{(\ell)})$ , 令  $\mathbf{a}^{(\ell+1)} = \mathbf{a}^{(\ell)} + \delta\mathbf{a}^{(\ell)}$ ,  $\tau^{(\ell+1)} = \tau^{(\ell)} + \delta\tau^{(\ell)}$ ,  $\ell = \ell + 1$ .
4. 如果  $\|\delta\mathbf{a}(\ell-1)\| + |\delta\tau(\ell-1)| > \varepsilon[\|\mathbf{a}(\ell)\| + |\tau(\ell)|]$ , 返回第2步.
5. 令  $\mathbf{a}_w(k) = \mathbf{a}^{(\ell)}$ ,  $\tau_w(k) = \tau^{(\ell)}$ .

从计算复杂度考虑, 算法1的核心是问题(9)的求解, 而求解问题(9)的算法2的核心是线性 minimax 问题(15)的求解. 本文应用文献[33]提出的 CPCLS-GI 算法求解问题(15), 其计算复杂度最多是  $O(N^3)$ . 假设完整的迭代重加权 minimax 设计算法共需  $M$  个内循环迭代(算法2的迭代), 则计算复杂度大约是  $O(MN^3)$ .

## 4 设计例子

本节通过希尔伯特变换器及相位补偿器的设计例子, 展示所提全通数字滤波器迭代重加权 minimax 设计算法的有效性. 设计时, 将频率区间  $[0, \pi]$  离散化为频率点集  $\{\omega_k = k\pi/400; k = 0, 1, \dots, 400\}$ , 最大极点半径参数  $r = 0.98$ . 算法用 MATLAB 编程, 计算在 Intel(R) Core(TM) i7-8700K CPU@37 GHz 的计算机上进行.

**例1** 设计一个希尔伯特变换器, 除某个纯时延外, 实现如下期望频率响应:

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0.06\pi \leq \omega \leq 0.94\pi \\ j, & 1.06\pi \leq \omega \leq 1.94\pi \end{cases} \quad (16)$$

像文献[5, 19, 21, 23]那样, 用一个  $N = 6$  阶的全通滤波器来实现. 期望相位响应取为

$$\phi_D(\omega, \tau) = -(N-1)\omega - 0.5\pi - \tau\omega, \quad 0.06\pi \leq \omega \leq 0.94\pi \quad (17)$$

其中  $\tau$  待定.

用本文算法进行设计, 最大群延迟误差(采样间隔为单位)及最大相位误差(弧度为单位)随重加权迭代次数的变化示于图1, 图中曲线显示了本文算法很好的收敛性. 表1列出了几个不同次数的重加权迭代后, 算法得到的最大群延迟误差和最大相位误差. 由图1及表1可见, 最大相位误差随迭代次数增大而增加, 最大群延迟误差随迭代次数增大而减小.

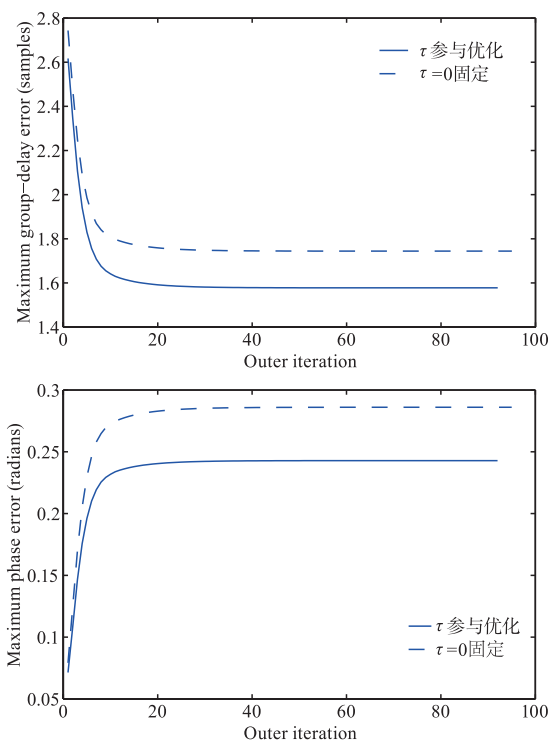


图1 最大群延迟误差及最大相位误差随重加权迭代次数的变化

表1 不同次数重加权后的最大群延迟误差(Maximum Group-Delay Error, MGDE)和最大相位误差(Maximum Phase Error, MPE)

重加权次数		1次	2次	20次	50次	90次
MGDE	$\tau$ 参与优化	2.617	2.347	1.592	1.578	1.578
	$\tau=0$ 固定	2.744	2.477	1.759	1.744	1.744
MPE	$\tau$ 参与优化	0.07137	0.1082	0.2405	0.2428	0.2428
	$\tau=0$ 固定	0.07921	0.1244	0.2829	0.2860	0.2860

我们也对  $\tau$  取固定值0的情形进行了设计, 所得最大相位误差和最大群延迟误差的收敛曲线, 以及不同迭代次数后的误差值, 也分别示于图1和表1. 可以看到, 不论  $\tau$  是否参与优化, 两个误差都快速收敛, 都在50次外循环迭代(重加权迭代)后基本不再变化. 但  $\tau$  参与优化后, 两个误差明显比  $\tau$  固定取0时要小.  $\tau$  参与优化和  $\tau$  固定取0两种情形下, 算法 ( $\eta = 10^{-7}$ )

分别在 92 和 95 次外循环迭代后终止,花费 752 和 670 次内循环迭代(算法二的迭代),CPU 耗时 4.21s 和 5.17s.

图 2 示出了每个外循环迭代所需的内循环迭代次数.可以看到,除第 1 次外循环迭代所需的内循环迭代较多外,其它外循环迭代所需的内循环迭代次数都不多,大概 10 次外循环迭代后,每次外循环迭代仅需 2 次内循环迭代,60 次外循环迭代后,则仅需 1 次内循环迭代.这个结果一方面表明算法 2 有良好的收敛性,另一方面也表明整个迭代重加权算法的计算量主要在前几次特别是第 1 次外循环迭代.

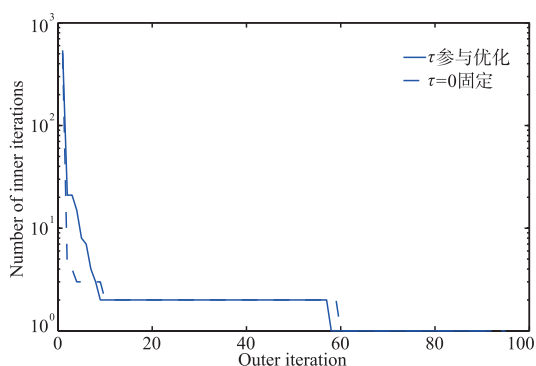


图2 内循环(算法2)迭代次数随重加权迭代次数的变化

图 3 和表 2 给出了本文结果与文献结果的比较,其中本文方法-1 表示无重加权即  $W(\omega) = 1$  固定,本文方法-2 表示有重加权.文献方法中, $\tau$  都取预设值 0.对于本文方法,图 3 只给出了  $\tau$  参与优化的结果,表 2 则同

时列出了  $\tau$  参与优化和  $\tau$  取固定值 0 时的结果.可看到,无重加权时,不论  $\tau$  固定还是参与优化,本文得到的最大相位误差和最大群延迟误差均小于文献[5,19,21]的相应结果.经过迭代重加权后,最大群延迟误差明显小于文献结果,但最大相位误差大于或接近文献结果.

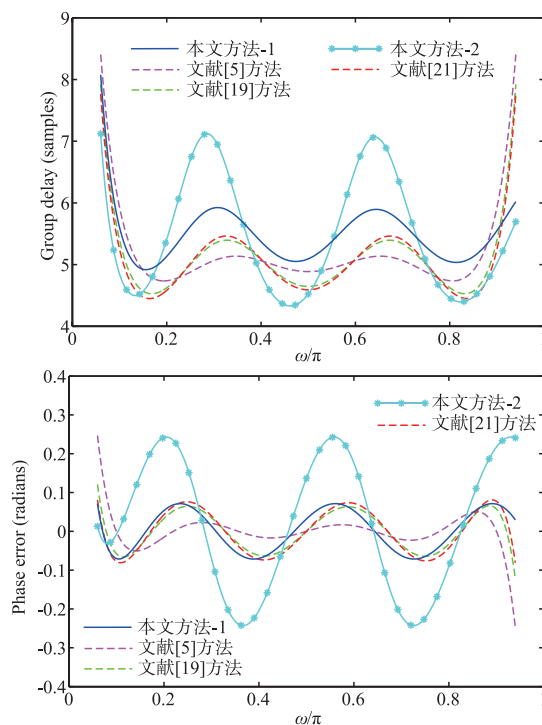


图3 例1中不同方法得到的群延迟响应及相位误差响应

表 2 不同方法得到的最大群延迟误差 (MGDE) 和最大相位误差 (MPE)

设计算法	本文方法-1		文献[21]	文献[19]	文献[5]	本文方法-2	
	优化值 0.46	预设值 0				预设值 0	预设值 0
$\tau$	优化值 0.46	预设值 0	预设值 0	预设值 0	预设值 0	预设值 0	优化值 0.5438
MGDE	2.617	2.744	2.770	2.923	3.4053	1.744	1.578
MPE	0.07137	0.07921	0.08103	0.1211	0.2469	0.2860	0.2428

**例 2** 设计一个希尔伯特变换器,除某个纯时延外,实现如下期望频率响应:

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0.04\pi \leq \omega \leq 0.94\pi \\ j, & 1.06\pi \leq \omega \leq 1.96\pi \end{cases} \quad (18)$$

像文献[11,12,19]那样,用一个  $N=30$  阶的全通滤波器来实现,期望相位取为

$$\phi_D(\omega, \tau) = -(N-1)\omega - 0.5\pi - \tau\omega, \quad 0.04\pi \leq \omega \leq 0.94\pi \quad (19)$$

其中  $\tau$  待定.

$\tau$  参与优化和  $\tau$  固定取 1 时,本文的迭代重加权算法( $\eta = 10^{-7}$ ),分别在 160 次和 90 次外循环迭代后终

止,花费 688 次和 226 次内循环迭代,CPU 耗时 35.46s 和 10.57s,得到的最大群延迟误差及最大相位误差如表 3 示.为比较,表 3 还列出了文献[11,12,19]( $\tau$  固定取 1)的相应结果.由表 3 可看到, $\tau$  参与优化时,本文得到的最大相位误差和最大群延迟误差均比文献结果小很多. $\tau$  固定取 1 时,本文得到的最大群延迟误差比所有文献结果小,最大相位误差也比文献[11]的结果小但比文献[12,19]的结果大.图 4 画出了本文方法( $\tau$  参与优化)和文献[11,12,19]得到的相位误差响应和群延迟响应.

表3 迭代重加权 minimax 算法得到的例2 设计结果及与文献结果的比较

方法	本文方法		文献[12]	文献[11]	文献[19]
$\tau$	优化值 0.58554	预设值 1	预设值 1	预设值 1	预设值 1
最大群延迟误差	0.14534	0.6949	1.517	2.4962	1.3526
最大相位误差	0.004833	0.02249	0.00956	0.02927	0.008391

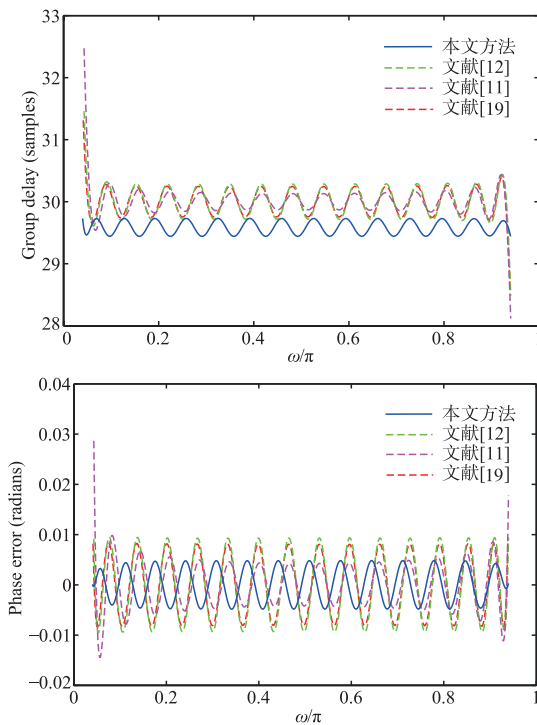


图4 例2中不同方法得到的群延迟响应及相位误差响应

**例3** 设计一个相位均衡器,用于补偿用 MATLAB 命令 `ellip(4,0.5,32,0.5)` 得到的 4 阶椭圆滤波器的非线性相位,使椭圆滤波器与相位均衡器级联后,具有近似线性相位和近似常数群延迟.该椭圆滤波器的幅值响应和群延迟响应如图 5 所示.分别用  $N=11$  阶和  $N=$

表4 级联滤波器的最大群延迟误差(MGDE)及最大相位误差(MPE)及与文献结果的比较

方法	本文方法( $N=11$ )	文献[7]( $N=11$ )	文献[15]( $N=11$ )	本文( $N=12$ )	文献[1,4]*( $N=12$ )
$\tau$	20.829	20.83	Not provided	22.4126	22.4044
MGDE	0.156	0.157	0.455	0.08803	0.09446
MPE	0.00722	0.00726	0.00691	0.003794	0.003745

\*注:MATLAB filter design 工具箱中的 `iirgrpdelay()` 函数实现,CPU 耗时 0.11s

定义归一化群延迟响应为:  $2 \times$ 群延迟响应  $\div$  (通带最大群延迟 + 通带最小群延迟).图 6 示出了 4 阶椭圆滤波器及其与 11 阶(上图)和 12 阶(下图)全通滤波器级联后的归一化群延迟响应.由图可见,补偿前的归一化群延迟与 1 有很大的偏差,表明群延迟与常数之间的偏差很大.补偿后,通带上的归一化群延迟与 1 偏

12 阶的全通滤波器来进行相位补偿,期望相位响应取为

$$\phi_D(\omega, \tau) = -\phi_0(\omega) - \tau\omega, \quad 0 \leq \omega \leq 0.5\pi \quad (20)$$

其中  $\phi_0(\omega)$  为待补偿的相位响应,  $\tau > 0$  待定.

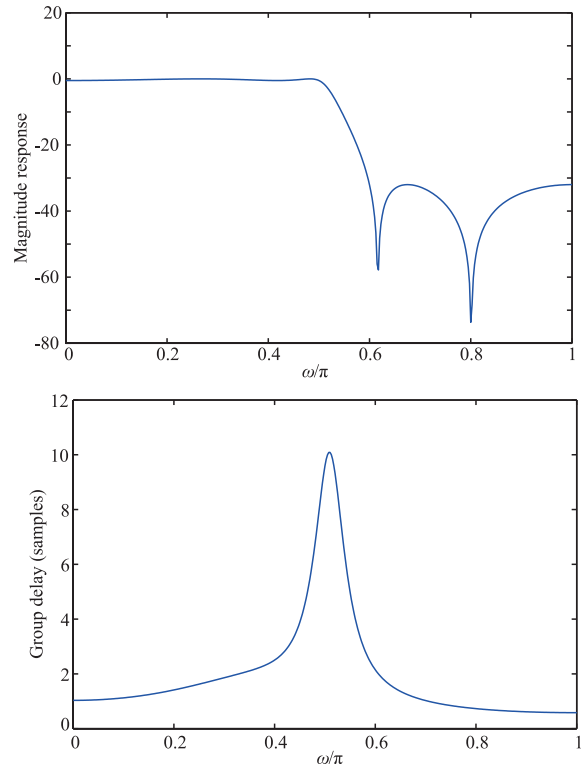


图5 四阶椭圆滤波器的幅频响应及群延迟响应

本文的迭代重加权 minimax 算法 ( $\eta = 10^{-7}$ ),分别在 195 次和 200 次外循环迭代后终止,花费 1238 次和 838 次内循环迭代,CPU 耗时 13.45s 和 10.12s.表 4 给出了本文设计及与文献[7,15]的 11 阶设计及文献[1,4]的 12 阶设计的比较.本文得到了比文献[1,4,7]的最大群延迟误差最小化方法略小的最大群延迟误差,进一步说明本文方法在减小最大群延迟误差方面的有效性.

差很小,表示补偿后的群延迟非常接近常数群延迟.图 7 是补偿前后相位响应与线性相位响应的偏差:补偿前的偏差为  $\phi_0(\omega) + \omega d$ ,其中  $d$  等于最小化  $\max_{0 \leq \omega \leq \pi} |\phi_0(\omega) + \omega d|$  的那个  $d$  值;补偿后的偏差就是  $E_p(\omega, \mathbf{a}, \tau)$ .可见,补偿前相位响应与线性相位的偏差很大,而补偿后的相位响应则非常接近线性相位.

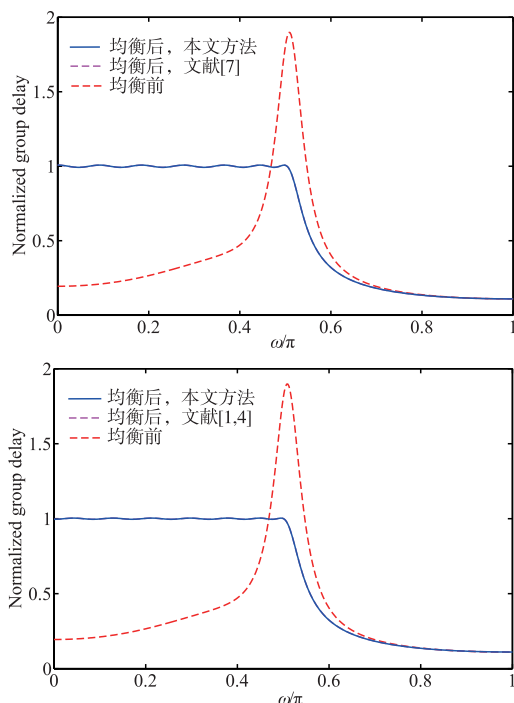


图6 分别用11阶及12阶的全通滤波器补偿前后的归一化群延迟响应

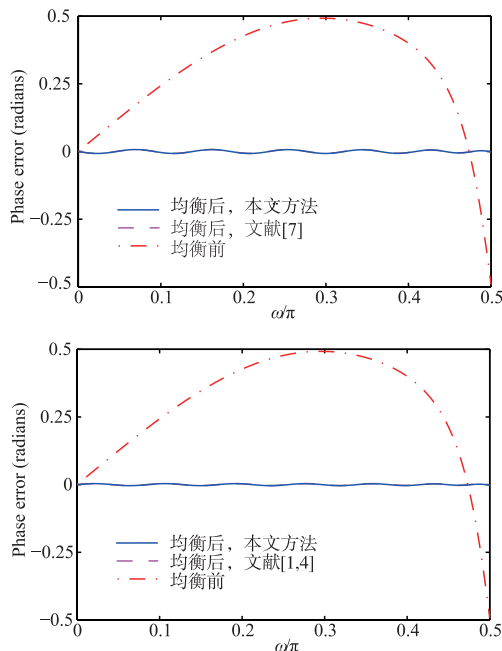


图7 分别用11阶及12阶全通滤波器补偿前后的相位偏差

## 5 结束语

提出的全通数字滤波器迭代重加权 minimax 相位误差设计方法,不仅能最小化最大加权相位误差,还能利用群延迟误差信息对相位误差权函数进行迭代更新,使滤波系统的群延迟误差近似等纹波,实现滤波系统的近似线性相位和近似常数群延迟。在希尔伯特变换器设计中,该方法得到了比文献结果小的最大群延迟误差;在相位/

群延迟均衡器设计中,该方法得到了比最大群延迟误差最小化设计略小的最大群延迟误差。

## 参考文献

- [1] ANTONIOU A. Digital Signal Processing: Signals, Systems and Filters [M]. New York, USA: McGraw-Hill, 2005.
- [2] CHAN S C, CHEN H H, PUN C K S. The design of digital all-pass filters using second-order cone programming (SOCP) [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2005, 52(2): 66–70.
- [3] CHANG W D. Phase response design of recursive all-pass digital filters using a modified PSO algorithm [J]. Computational Intelligence and Neuroscience, 2015, 2015: 1–7.
- [4] CHARALAMBOUS C, ANTONIOU A. Equalization of recursive digital filters [J]. Proceedings of the Institute of Electrical Engineers, 1980, 127–G(5): 219–225.
- [5] CHEN L W, JOU Y D, et al. Design of IIR allpass filters using a neural-based learning algorithm [J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2015, 34: 3031–3056.
- [6] CHEN C K, LEE J H. Design of digital all-pass filters using a weighted least squares approach [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, 1994, 41(5): 346–350.
- [7] DECZKY A G. Equiripple and minimax (Chebyshev) approximations for recursive digital filters [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1974, ASSP-22: 98–111.
- [8] DENG T B, SOONTORNWONG P. Delay-error-constrained minimax design of all-pass variable-fractional-delay digital filters [J]. Signal Processing, 2016, 120: 438–447.
- [9] HONG T, BAI H, LI S, et al. A new method for designing allpass filters with equiripple group delay errors [A]. Proceedings of the 9th Conference on Industrial Electronics and Applications [C]. UA: IEEE, 2014. 1024–1028.
- [10] JING Z Q. A new method for digital all-pass filter design [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1987, ASSP-35(11): 1557–1564.
- [11] JOU Y D, LIN Z P, CHEN F K. Low-complexity design framework of all-pass filters with application in quadrature mirror filter banks design [J]. IET Signal Processing, 2017, 11(3): 239–249.
- [12] KIDAMBI S S. Weighted least-squares design of recursive allpass filters [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(6): 1553–1557.
- [13] LAI X P, LIN Z P. Design and application of allpass filters with equiripple group delay errors [A]. Proceedings of the 2013 International Symposium on Circuits and Systems [C]. US: IEEE, 2013. 2924–2927.
- [14] LANG M. All-pass filter design and applications [J]. IEEE

- Transactions on Signal Processing, 1998, 46: 2505 – 2514.
- [15] LANG M, LAAKSO T I. Simple and robust method for the design of allpass filters using least-squares phase error criterion [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, 1994, 41(1): 40 – 48.
- [16] PEI S C, LU W Y, GUO B Y. Pole-zero assignment of allpass-based notch filters [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, 2017, 64(4): 477 – 481.
- [17] REGALIA P A, MITRA S K, VAIDYANATHAN P P. The digital all-pass filter: A versatile signal processing building block [J]. Proceedings of the IEEE, 1988, 76(1): 19 – 37.
- [18] SHYU J J, PEI S C, CHAN C H. Minimax phase error design of allpass variable fractional-delay digital filters by iterative weighted least-squares method [J]. Signal Processing, 2009, 89(9): 1774 – 1781.
- [19] SU L C, JOU Y D, CHEN F K, SUN C M. Neural network-based IIR all-pass filter design [J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2014, 33: 437 – 457.
- [20] 佟星元, 贺璐璐, 杜慧敏, 董嗣万. 针对级联型 IIR 滤波器群延时的均衡优化技术 [J]. 电子学报, 2019, 47(8): 1717 – 1723.  
TONG X-Y, HE L-L, DU H-M, DONG S-W. Equalization based optimization technique for group delay of cascaded IIR filter [J]. Acta Electronica Sinica, 2019, 47(8): 1717 – 1723. (in Chinese)
- [21] TSENG C C. Design of IIR digital all-pass filters using least pth phase error criterion [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, 2003, 50(9): 653 – 656.
- [22] WIJENAYAKE C, MADANAYAKE A, et al. All-pass filter-based 2-D IIR filter-enhanced beamformers for AESA receivers [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers, 2014, 61(5): 1331 – 1342.
- [23] 吴凯, 苏涛. 全通型分数延时滤波器的设计 [J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2015, 42(4): 8 – 13.  
WU K, SU T. Design and application of the allpass fractional delay filter [J]. Journal of Xidian University (Natural Science Edition), 2015, 42(4): 8 – 13. (in Chinese)
- [24] 徐红, 黄朝耿, 等. 并行计算的全通数字滤波器结构 [J]. 电子学报, 2015, 43(10): 2034 – 2039.  
XU H, HUANG C G, et al. Parallel computing for allpass digital filter structures [J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(10): 2034 – 2039. (in Chinese)
- [25] ZHANG X, IWAKURA H. Design of IIR digital allpass filters based on eigenvalue problem [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(2): 554 – 559.
- [26] LAI X P, LAI C L, ZHAO R J. An iterative approach to near-uniform group-delay error design of FIR filters [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(2): 107 – 110.
- [27] LAI X P, LIN Z P. Iterative reweighted minimax phase error designs of IIR digital filters with nearly linear phases [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(9): 2416 – 2428.
- [28] 王路, 赖春露. FIR 数字滤波器幅频响应约束最大加权相位误差最小化设计 [J]. 电子学报, 2018, 46(11): 2781 – 2786.  
WANG L, LAI C-L. Design of FIR digital filters by a magnitude-response constrained minimax weighted phase error method [J]. Acta Electronica Sinica, 2018, 46(11): 2781 – 2786. (in Chinese)
- [29] NONGPIUR R C, SHPAK D J, ANTONIOU A. Improved design method for nearly linear-phase IIR filters using constrained optimization [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(4): 895 – 906.
- [30] 骆睿, 刘莉, 等. 基于 Tikhonov 正则化的高分辨率群时延测量与计算方法 [J]. 电子学报, 2019, 47(5): 1044 – 1048.  
LUO R, LIU L, et al. High resolution group delay measurement and calculation method based on Tikhonov regularization [J]. Acta Electronica Sinica, 2019, 47(5): 1044 – 1048. (in Chinese)
- [31] LIM Y C, LEE J H, et al. A weighted least-squares algorithm for quasi-equiripple FIR and IIR filter design [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(3): 551 – 558.
- [32] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [33] LAI X P. Optimal design of nonlinear-phase FIR filters with prescribed phase error [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(9): 3399–3410.

#### 作者简介



赖春露 女, 1989 年 4 月生于山东威海. 现为哈尔滨工业大学(威海)信息与电气工程学院工程师. 主要研究方向为信号处理、滤波器设计、数字图像处理.  
E-mail: laicl\_ruby@hitwh.edu.cn



王路(通信作者) 男, 1988 年 9 月生于山东德州. 现为山东大学澳国立联合理学院工程师. 主要研究方向为信号处理、滤波器设计、数字图像处理.  
E-mail: wanglu@sdu.edu.cn