

基于高斯混合模型的衍射成像算法

练秋生,侯亚伟,苏月明,石保顺
(燕山大学信息科学与工程学院,河北秦皇岛 066004)

摘要: 编码衍射成像系统中记录的测量值丢失了相位,而相位含有关于图像的大部分结构信息. 如何利用无相位测量值重构原始图像是相位恢复(Phase Retrieval, PR)算法面临的一个重要问题. 由期望最大(EM)算法训练高斯混合模型(GMM)的最优参数,任一图像块可以选用GMM中某一模型分量最佳表示. 基于该认识,本文利用GMM的统计特性融合数据保真项构造PR优化问题,并用加速邻近梯度法求解该问题. 实验结果表明,该算法在噪声强度较大、编码衍射图案较少的情况下仍能获得较高质量的图像重构.

关键词: 相位恢复; 编码衍射图案; 高斯混合模型; 加速邻近梯度

中图分类号: TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2018)10-2347-04

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.10.006

A Diffraction Imaging Algorithm Based on Gaussian Mixture Model

LIAN Qiu-sheng, HOU Ya-wei, SU Yue-ming, SHI Bao-shun
(School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

Abstract: The phase information of the recorded measurements is lost in the coded diffraction imaging system. However, the phase contains most of structural information about the image. How to reconstruct the original image from measurements without phase information is a crucial problem faced by the phase retrieval algorithms. The optimal parameters of the Gaussian mixture model (GMM) are trained by the expectation maximization (EM) algorithm. An image patch can be represented optimally by one of the components in the GMM model. Based on this fact, a PR optimization problem which fuses the statistical properties of GMM and the data fidelity term is formulated. Moreover, the accelerated proximal gradient method is utilized to solve this problem. The experimental results show that the proposed method can achieve high-quality image at the case of few coded diffraction patterns and high noise levels.

Key words: phase retrieval; coded diffraction pattern; Gaussian mixture model; accelerated proximal gradient

1 引言

由于物理限制,光学传感器如电荷耦合器件(CCD)相机、感光膜和人类的眼睛只能记录光场的模值或强度(模值的平方)信息,丢失了相位,而相位携带大部分的结构信息. 给定未知信号的傅立叶变换模值,通过相关技术恢复原始信号的过程称为相位恢复(Phase Retrieval, PR). 它在很多领域有广泛的应用,如光学、X射线晶体学、天文成像和核磁共振成像^[1,2]等.

近年来,受压缩感知理论启发的相位恢复算法相继提出,GESPAR(Greedy Sparse Phase Retrieval)算法^[3]采用快速局部搜索来动态更新支撑信息. Schniter等提出利用GAMP(Generalized Approximate Message Passing)算法^[4]来求解稀疏信号的相位恢复. 随后 Metzler等在

GAMP基础上加入BM3D去噪算子提出BM3D-prGAMP算法^[5],用更少的测量值实现压缩相位恢复.

编码衍射成像系统中,测量值为编码衍射图案(Coded Diffraction Pattern, CDP)^[6],CDP携带更多关于待重建图像的信息,且装置简单. 为解决该系统中的PR问题, Candes等提出WF(Wirtinger Flow)算法^[7]和TWF(Truncated Wirtinger Flow)算法^[8],利用梯度下降的方法迭代更新. 上述算法没有利用图像的先验,重构需要较多CDP. 文献[9]提出DOLPHIn(DictiOnary Learning for PHase RetrIeval)算法,利用字典学习进行稀疏表示来恢复相位. 文献[10]提出的SPAR(Sparse Phase Amplitude Reconstruction)算法,利用BM3D滤波来求解抗泊松噪声的PR问题.

由于PR问题是不适定的,基于正则化的方法可以通过构造合适的正则项,将不同先验引入到图像重建中. 本

文受文献[11]启发,提出基于高斯混合模型(Gaussian Mixture Model, GMM)正则化的相位恢复(Phase Retrieval based on Gaussian Mixture Model, GMM_PR)算法,以利用较少的 CDP 实现抗噪性能好的图像重构.

2 高斯混合模型(GMM)

2.1 求解 GMM 的最优参数

GMM 可以表示为 K 个高斯模型的加权和. 样本 \mathbf{x} 由 GMM 描述的概率密度函数为:

$$p(\mathbf{x}|\Theta) = \sum_{k=1}^K \pi_k N(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) \quad (1)$$

其中, Θ 是超参数, 包括: $\{(\pi_k, \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)\}_{k=1}^K$, π_k 表示第 k 个高斯模型的权重且满足: $\sum_{k=1}^K \pi_k = 1$, $N(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k)$ 为高斯模型概率密度函数, $\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k$ 是均值和协方差矩阵.

为有效拟合随机变量的概率分布, 很难直接通过最大似然求得最优的 Θ . EM (Expectation Maximization) 算法是含有隐变量的概率参数模型估计, 交替迭代 E-step 和 M-step 可以求解上述非线性问题.

2.2 GMM 先验

对于给定的图像 \mathbf{x} , 第 i 个图像块用 $\mathbf{P}_i \mathbf{x}$ 表示, 任意 $\mathbf{P}_i \mathbf{x}$ 可以用 GMM 近似描述. 为降低计算复杂度, 选择 GMM 中某个高斯分量最佳表示样本, 此高斯分量的条件权重 $\pi'_k = p(k|\mathbf{P}_i \mathbf{x})$ 最大.

本文利用 EM 算法训练 BSD300 中随机选取的 150 幅自然图像, 得到不同模型数的 GMM 用于后续的实验. 协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_k$ 通过特征值分解可以得到 PCA 基, 图 1 选取其中 3 个模型分量的 PCA 基, 由图可以看到不同的 PCA 基具有不同的方向特征.

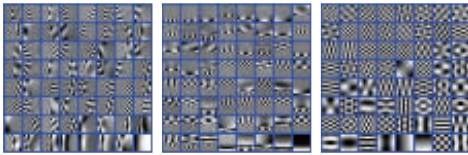


图1 GMM中3个分量的PCA基

3 基于 GMM 正则化的相位恢复

3.1 基于 GMM 正则化求解框架

编码衍射成像系统中, 得到的观测值是原始信号经随机掩膜调制后的衍射图案:

$$\mathbf{b} = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \quad (2)$$

其中, $\mathbf{b} \in R^N$ 为 CDP, $\mathbf{A} = (\mathbf{F}\mathbf{M}_1, \mathbf{F}\mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{F}\mathbf{M}_L)^\top$, \mathbf{F} 为傅里叶变换矩阵, $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_L$ 表示随机照明掩膜, L 为随机掩膜(或 CDP)数.

为重构高质量图像, 将正则项加到 PR 优化问题中:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{b} - |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2\|_2^2 + \lambda R(\mathbf{x}) \quad (3)$$

上式中第一项为数据保真项, $R(\mathbf{x})$ 是正则项, λ 是两者间的权衡因子. 为下文表示方便, 令 $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{b} - |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2\|_2^2$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \lambda R(\mathbf{x})$.

用对数似然率衡量图像块属于某个模型分量的程度, 提出利用 GMM 统计特性作为正则项 PR 优化问题:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{b} - |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2\|_2^2 - \lambda \sum_i \log p(\mathbf{P}_i \mathbf{x}) \quad (4)$$

式(4)适用于测量数据受高斯噪声干扰, 当其受泊松噪声干扰, 引入比例因子控制图像的强度^[12], 测量值 \mathbf{b} 符合泊松分布, 提出基于 GMM 正则化的抗泊松噪声 PR 问题:

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{1}^\top |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 - \mathbf{b}^\top \ln(|\mathbf{A}\mathbf{x}|^2) - \lambda \sum_i \log p(\mathbf{P}_i \mathbf{x}) \quad (5)$$

式(4)、(5)中 $\log p(\mathbf{P}_i \mathbf{x})$ 表示图像块在 GMM 先验下的对数似然率^[11].

本文利用加速临近梯度法(Accelerated Proximal Gradient, APG)来求解上述非凸优化问题, 迭代过程如下(对于第 t 次迭代):

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t + \frac{\rho_{t-1} - 1}{\rho_t} (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t-1}) \quad (6)$$

$$\mathbf{x}_{t+1} = \text{prox}_{\alpha, \mathbf{g}}(\mathbf{y}_t - \alpha \nabla f(\mathbf{y}_t)) \quad (7)$$

$$\rho_{t+1} = \frac{\sqrt{4\rho_t^2 + 1} + 1}{2} \quad (8)$$

引入 \mathbf{y}_t 作为中间变量, α_t 为步长因子, 选用线搜索的方法(黄金分割法)自动搜索最优步长. $f(\mathbf{x})$ 对 \mathbf{x} 求偏导, 分别得到高斯、泊松噪声干扰下的数据保真项梯度:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 4\mathbf{A}^\top [(|\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}] \quad (9)$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}^\top \left(\frac{|\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 - \mathbf{b}}{|\mathbf{A}\mathbf{x}|^2} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} \right) \quad (10)$$

更新 \mathbf{x} 时, 根据临近映射的定义, 式(7)等同于求解以下优化问题:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_t\|_2^2 - \lambda_1 \sum_i \log p(\mathbf{P}_i \mathbf{x}) \right\} \quad (11)$$

其中, $\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \alpha_t \nabla f(\mathbf{y}_t)$, $\lambda_1 = \alpha_t \lambda$, 引入辅助变量 $\mathbf{z}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{x}$, 则上式可转化为:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_t\|_2^2 + \sum_i \left[\frac{\beta}{2} \|\mathbf{P}_i \mathbf{x} - \mathbf{z}_i\|_2^2 - \lambda_1 \log p(\mathbf{z}_i) \right] \quad (12)$$

利用交替优化策略分别更新变量 \mathbf{z}_i, \mathbf{x} :

(1) 固定 \mathbf{x} 不变, 更新 \mathbf{z}_i , 式(12)中关于 \mathbf{z}_i 的优化问题可转化为以下约束问题:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_i &= \arg \min_{\mathbf{z}_i} \left\{ \frac{\beta}{2} \|\mathbf{P}_i \mathbf{x} - \mathbf{z}_i\|_2^2 - \lambda_1 \log p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) \right\} \\ \text{s. t. } & \hat{k} = \arg \max_k p(k | \mathbf{P}_i \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (13)$$

交替计算 k, \mathbf{z}_i 来求解上式的优化问题:

首先, 选择最大的权重所对应的第 \hat{k} 个分量: $\hat{k} =$

$\arg \max_k \pi'_k$, 其中 $\pi'_k = p(k | \mathbf{P}_i \mathbf{x})$.

最佳概率模型 k 选定后, 将高斯分布的概率密度公式代入式(13), 计算 z_i 的估计值:

$$\hat{z}_i = \arg \min_{z_i} \left\{ \frac{\beta}{2} \|z_i - \mathbf{P}_i \mathbf{x}\|_2^2 + \frac{\lambda_1}{2} (z_i - \boldsymbol{\mu}_k)^T \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} (z_i - \boldsymbol{\mu}_k) + C \right\} \quad (14)$$

其中, C 是与 z_i 无关的常数项, 式(14)对 z_i 求偏导并令其等于零, 可以得到闭式解:

$$\hat{z}_i = \left[\boldsymbol{\Sigma}_k (\mathbf{P}_i \mathbf{x}) + \frac{\lambda_1}{\beta} \boldsymbol{\mu}_k \right] \left(\boldsymbol{\Sigma}_k + \frac{\lambda_1}{\beta} \mathbf{I} \right)^{-1} \quad (15)$$

(2) 固定 z_i 不变, 更新 \mathbf{x} , 式(12)对 \mathbf{x} 求偏导, 令导数等于零, 可得到关于 \mathbf{x} 的闭式解:

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{v}_i + \beta \sum_i \mathbf{P}_i^T z_i \right) \left(\mathbf{I} + \beta \sum_i \mathbf{P}_i^T \mathbf{P}_i \right)^{-1} \quad (16)$$

交替更新 z_i, \mathbf{x} , 完成式(7)的更新.

综上, GMM_PR 算法具体步骤如表 1.

表 1 本文算法 GMM_PR 的实现步骤

算法 1 GMM_PR 算法

输入: 原始图像经随机掩膜调制后傅立叶变换的幅值 \mathbf{b} , 参数 λ, β , 最大迭代次数 $iter$;

初始化: \mathbf{x}_0 为随机初始值, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0, \rho_1 = 1, \rho_0 = 0$;

Step 1: 根据式(6)更新中间变量 \mathbf{y}_i ;

Step 2: 根据式(9)、(10)计算不同含噪情况下的梯度方向 $\nabla f(\mathbf{y}_i)$;

Step 3: 根据黄金分割法搜索步长 α_i , 使得:

$$\alpha_i = \arg \min_{\alpha} f(\mathbf{y}_i - \alpha \nabla f(\mathbf{y}_i));$$

Step 4: 根据式(13)更新图像块 z_i , 根据式(16)更新 \mathbf{x}_{i+1} ;

Step 5: 根据式(8)更新 ρ_{i+1} ;

Step 6: 当 $\frac{\|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\|}{\|\mathbf{x}_{i+1}\|} \leq 10^{-5}$ 或 $t > iter$ 输出结果, 否则

算法转至 Step 1;

输出: 重构图像 \mathbf{x}_{i+1} ;

4 实验结果与分析

本文通过峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 和结构相似度 (Structural Similarity, SSIM) 来评价图像的重构质量. 对比算法包括 WF、TWF 算法 (代码: <http://web.stanford.edu/~yxchen/TWF/code.html>), DOLPHIn、SPAR、BM3D-prGAMP 算法 (代码见作者主页).

4.1 测量值受不同噪声干扰算法比较

真实测量值容易受到噪声的影响, 本文用测量强度值的信噪比 (Signal to Noise Ratio, SNR) 来衡量高斯、泊松噪声的强度. 实验均在 $L=1$ 的情况下进行比较. 本文算法最大迭代次数为 25 次, 前 10 次迭代选取 $K=2$, 中间 10 次迭代选取 $K=18$, 最后 5 次迭代选取 $K=200$. 实验中本文算法整体迭代 25 次, 每更新一次式(7)交替更新 z_i, \mathbf{x} 一次.

固定测量值的 SNR 分别为 5dB、10dB、15dB、20dB, 当高斯噪声干扰下测量值 SNR = 15dB 时, 式(12)中参数设定为 $\lambda_1 = 1/11$, 即 $\lambda = 1/11\alpha, \beta = 255\lambda_1^2$, 当 SNR 值减小时, 需适当调节减小 λ_1 的值.

表 2 显示了不同算法重构图像的 PSNR 和 SSIM 值. 不同噪声强度下, GMM_PR 算法的 PSNR 和 SSIM 值都明显高于其他算法, 噪声强度较大时, 优势更明显. 选取高斯噪声 SNR = 15dB, 各算法重构图像如图 2. 视觉效果显示 GMM_PR 算法的重构质量优于其他算法, WF 算法有大量的噪声存在, DOLPHIn、BM3D-prGAMP 算法有伪迹, 而 GMM_PR 算法包含相对多的细节信息.

表 2 各算法在高斯、泊松噪声下重构图像的峰值信噪比和结构相似度

噪声	图像	算法	SNR = 5dB		SNR = 10dB		SNR = 15dB		SNR = 20dB	
			PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
高斯噪声	Lena	WF	9.48	0.0324	11.64	0.0546	13.23	0.0773	14.07	0.0922
		DOLPHIn	22.40	0.4705	24.72	0.5669	27.13	0.6458	29.62	0.7810
		BM3D-prGAMP	23.73	0.7063	26.98	0.7717	29.15	0.8030	32.00	0.8564
		GMM_PR	26.17	0.7167	29.00	0.8029	31.67	0.8521	33.85	0.8823
	Peppers	WF	9.59	0.0332	11.69	0.0550	13.21	0.0765	14.01	0.0901
		DOLPHIn	22.31	0.4874	24.68	0.5703	27.31	0.6527	29.57	0.7653
		BM3D-prGAMP	23.86	0.6979	27.11	0.7575	29.48	0.7866	31.94	0.8303
		GMM_PR	26.63	0.7252	29.56	0.7983	32.00	0.8360	33.76	0.8582
泊松噪声	Lena	TWF	8.39	0.0283	11.36	0.0567	13.27	0.0826	14.10	0.0964
		DOLPHIn	21.01	0.4094	24.21	0.4795	27.41	0.6547	30.12	0.7278
		SPAR	22.67	0.6510	28.03	0.7800	31.40	0.8487	34.21	0.8944
		GMM_PR	25.51	0.6239	29.09	0.7843	31.80	0.8539	34.33	0.8929
	Peppers	TWF	8.55	0.0296	11.43	0.0578	13.28	0.0821	14.06	0.0946
		DOLPHIn	21.05	0.4200	24.42	0.4936	27.63	0.6579	30.24	0.7306
		SPAR	22.03	0.6360	27.51	0.7597	31.28	0.8252	33.73	0.8623
		GMM_PR	26.09	0.6464	29.58	0.7824	32.07	0.8363	34.09	0.8650

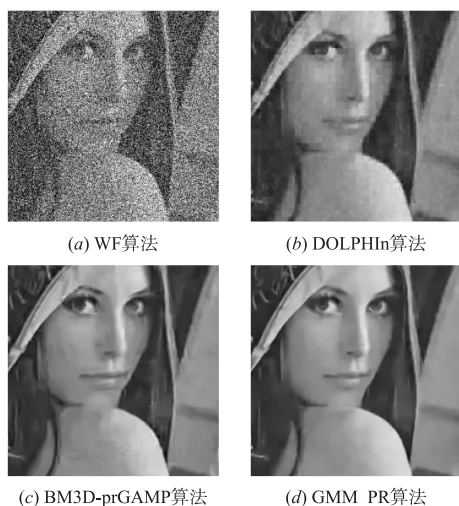


图2 SNR=15dB(高斯噪声)时不同算法重构图像的比较

5 结论

本文利用编码衍射图案进行图像重构,将 GMM 的统计特性作为先验,提出了基于 GMM 正则化的 PR 优化问题.迭代过程中基于分块处理,每个图像块由 GMM 中某个分量最佳表示.结果表明,当 CDP 的数量较少、噪声强度较大时,GMM_PR 算法明显优于 WF、TWF、DOLPHIn、BM3D-prGAMP、SPAR 算法,有效地减少了测量数据以及测量数据的采集时间,且对高斯、泊松噪声均具有更强的鲁棒性.

参考文献

- [1] SHECHTMAN Y, ELDAR Y C, COHEN O, et al. Phase retrieval with application to optical imaging: a contemporary overview [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2015, 32(3): 87–109.
- [2] LUSTIG M, DONOHO D L, PAULY J M. Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58(6): 1182–1195.
- [3] SHECHTMAN Y, BECK A, ELDAR Y C. GESPAR: efficient phase retrieval of sparse signals [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(4): 928–938.
- [4] SCHNITER P, RANGAN S. Compressive phase retrieval via generalized approximate message passing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(4): 1043–1055.
- [5] METZLER C A, MALEKI A, BARANIUK R G. BM3D-PRGAMP: Compressive phase retrieval based on BM3D denoising [A]. IEEE International Conference on Image Processing [C]. Phoenix, AZ, USA: ICIP, 2016. 2504–2508.

- [6] CANDES E J, LI X, SOLTANOLKOTABI M. Phase retrieval from coded diffraction patterns [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2015, 39(2): 277–299.
- [7] CANDES E J, LI X, SOLTANOLKOTABI M. Phase retrieval via Wirtinger flow: theory and algorithms [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(4): 1985–2007.
- [8] CHEN Y, CANDES E J. Solving random quadratic systems of equations is nearly as easy as solving linear systems [A]. Advances in Neural Information Processing Systems 28 [C]. Montreal, Canada: NIPS, 2015. 739–747.
- [9] TILLMANN A M, ELDAR Y C, MAIRAL J M. DOLPHIn—dictionary learning for phase retrieval [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(24): 6485–6500.
- [10] KATKOVNIK V. Sparse phase retrieval from noisy data: variational formulation and algorithms [A]. 3D Image Acquisition and Display: Technology, Perception and applications [C]. Heidelberg, Germany: Optical Society of America, 2016. JT3A. 42.
- [11] ZORAN D, WEISS Y. From learning models of natural image patches to whole image restoration [A]. IEEE International Conference on Computer Vision [C]. Barcelona, Spain: ICCV, 2011. 479–486.
- [12] IKEDA S, KONO H. Phase retrieval from single biomolecule diffraction pattern [J]. Optics Express, 2012, 20(4): 3375.

作者简介



练秋生 男,1969年8月出生于江西遂川,现为燕山大学信息科学与工程学院教授、博士生导师,主要研究方向为图像处理、稀疏表示、压缩感知及相位恢复等。
E-mail: lianqs@ysu.edu.cn



侯亚伟 女,1993年6月出生于山东莱芜,现为燕山大学信息科学与工程学院硕士研究生,主要研究方向为非线性压缩感知、相位恢复。
E-mail: hyw8269@163.com