

两阶段高维容积信息滤波及其在目标跟踪中的应用

张 露^{1,2}, 饶文碧², 王海伦¹, 许大星¹

(1. 衢州学院电气与信息工程学院, 浙江衢州 324000; 2. 武汉理工大学计算机科学与技术学院, 湖北武汉 430070)

摘 要: 非线性系统估计的过程是一个多传感器信息融合的过程, 在集中处理量测数据的过程中, Kalman 滤波具有很高的计算复杂度. 尤其当系统模型中存在随机偏差时, 扩维后计算量大幅增大, 容易造成系统溢出和运行失败的问题. 通过将两阶段容积 Kalman 滤波嵌入到扩展信息滤波框架的方式, 提出了一种两阶段高维容积信息滤波算法. 该算法初始化容易, 计算量较小, 直接利用协方差矩阵的逆与信息矩阵之间的等价关系参与滤波递推的过程, 减少了对滤波增益阵的计算. 在协方差矩阵的解算过程中, 两阶段算法的协方差矩阵之间存在有耦合关系, 因此在信息滤波中, 两阶段信息矩阵之间也存在着某种耦合关系, 算法中通过将非线性 T 变换和矩阵求逆应用于信息矩阵, 得到了两阶段信息矩阵与协方差矩阵之间的耦合关系. 通过纯方位跟踪系统的仿真实验, 验证了两阶段高维容积信息滤波算法在精度上高于容积 Kalman 滤波算法, 在运行时间上也短于容积 Kalman 滤波算法, 证明了该算法的可用性.

关键词: 扩展信息滤波框架; 容积信息滤波; 五维 Spherical-Radial 容积规则; 两阶段高维容积信息滤波

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2019)02-0440-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2019.02.026

Two-Stage High Degree Cubature Information Filter and Its Application in Target Tracking

ZHANG Lu^{1,2}, RAO Wen-bi², WANG Hai-lun¹, XU Da-xing¹

(1. College of Electrical and Information Engineering, Quzhou University, Quzhou, Zhejiang 324000, China;

2. College of Computer Science and Technology, Wuhan University of Technology, Wuhan, Hubei 430070, China)

Abstract: The estimation process of nonlinear system is a process of multi-sensor information fusion. During the process of data processing, Kalman filter has high computational complexity. Especially when there are random deviations in the system model, the amount of calculation increases greatly after dimension expansion, which is easy to cause system overflow and operation failure. By embedded the two-stage Cubature Kalman filter into the extended information filtering framework, Two-stage High degree Cubature Information Filter(TSHCIF) is proposed. The algorithm is easy to initialization and small in computation. It takes advantage of the equivalence relation between the inverse of covariance matrix and information matrix to participate in the process of filter recurrence, and reduces the computation of filter gain matrix. In the solution of the covariance matrix, there is a coupling relationship in the covariance matrices of the two-stage algorithm. Therefore, there is a coupling relationship between the two stage information matrix. In the algorithm, the nonlinear T transformation and the inverse of the matrix should be applied to the information matrix. The coupling relationship between the two-stage information matrix and the covariance matrix is obtained. Through the simulation experiment of bearings only tracking system, it is verified that TSHCIF is superior to CKF in accuracy, and the running time is also shorter than CKF, which proves the availability of the algorithm.

Key words: extended information filter framework; cubature information filter; five-order spherical-radial cubature rule; two-stage high degree cubature information filter(TSHCIF)

1 引言

基于贝叶斯框架的非线性滤波和估计方法是近几年研究的热点,包括对非线性函数近似的扩展 Kalman 滤波(EKF)^[1]、对高斯概率密度近似的无迹 Kalman 滤波(UKF)^[2]和容积 Kalman 滤波(CKF)^[3]等.相较于 EKF,UKF 和 CKF 无需计算 Jacobian 矩阵且估计精度较高. CKF 使用三维 Spherical-Radial 容积规则近似高斯加权积分,使用的容积点权值相同且均为正数,比 UKF 的稳定性好.但 CKF 同样也有缺陷,比如估计精度仍旧有限、对一些简单多项式函数的高斯权值积分无法准确计算等.在实际应用中,为了获得更好的跟踪效果,往往需要高精度的滤波算法.因此为了获得高于目前精度的估计结果,需要设计更高维的 CKF 算法.目前,已有学者基于 Genz 积分推导了高维球面规则,基于矩匹配法推导了高维径向规则^[3,4],建立了相应的高维容积规则并在目标跟踪问题中进行了应用,取得了优于三维容积 Kalman 滤波的估计精度.

非线性系统估计的过程是一个多传感器信息融合的过程,在集中处理量测数据的过程中,Kalman 滤波具有很高的计算复杂度^[6].信息滤波因其初始化容易,计算量较小的计算性能优势,在多传感器的信息融合和控制领域得到了广泛的应用^[7].信息滤波的实质是用协方差矩阵的逆等价的表示 Kalman 滤波^[8],可以不用知道系统状态的先验信息.容积 Kalman 滤波嵌入到扩展信息滤波器(Extended Information Filter, EIF)框架中可以得到容积信息滤波(Cubature Information Filter, CIF)算法,CIF 通过传递信息向量和信息矩阵实现状态估计,其估计精度和滤波稳定性均优于 EIF 和无迹信息滤波(Unscented Information Filter, UIF)算法,特别是在高维滤波时,这种优势更加明显^[9].

本文通过将两阶段容积 Kalman 滤波嵌入到扩展信息滤波框架的方式,提出了一种两阶段高维容积信息滤波(Two-stage High degree Cubature Information Filter, TSHCIF).该算法初始化容易,计算量较小,直接利用协方差矩阵的逆与信息矩阵之间的等价关系参与滤波递推的过程,减少了对滤波增益阵的计算.在协方差矩阵的解算过程中,两阶段算法的协方差矩阵之间存在有耦合关系,因此在信息滤波中,两阶段信息矩阵之间也存在着某种耦合关系,算法中通过将非线性 T 变换和矩阵求逆应用于信息矩阵,得到了两阶段信息矩阵与协方差矩阵之间的耦合关系.

2 高维容积信息滤波算法

将标准 Kalman 滤波嵌入到扩展信息滤波框架中得到了容积 Kalman 滤波的信息形式,需要用到扩展信息

滤波相关知识,所以在本节中首选介绍扩展信息滤波算法,然后引入五维 Spherical-Radial 容积规则近似高斯权值积分,得到高维容积 Kalman 滤波,将高维容积滤波嵌入扩展信息滤波框架,可以得到高维容积信息滤波,该算法兼顾信息滤波初始化快,计算量低和高维容积滤波精度高的优点.

非线性系统模型表示如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= f_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) + \boldsymbol{\omega}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k &= h_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (1)$$

其中 k 是离散时间点, \mathbf{x}_k 为 $n \times 1$ 的状态向量, \mathbf{z}_k 为 $m \times 1$ 的对应于状态向量的观测向量. $f_{k-1}: \mathbf{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbf{R}^{n \times 1}$ 和 $h_k: \mathbf{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbf{R}^{m \times 1}$ 均为已知可微非线性函数. 过程噪声 $\boldsymbol{\omega}_{k-1}$ 和测量噪声 \mathbf{v}_k 为不相关的零均值高斯白噪声过程且方差满足如下条件:

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\omega}_i \boldsymbol{\omega}_j^T) &= \begin{cases} Q_k, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\ E(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T) &= \begin{cases} R_k, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

初始状态 \mathbf{x}_0 满足 $E(\mathbf{x}_0) = \hat{\mathbf{x}}_{0|0}$, $E([\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0}] \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{0|0})^T) = P_{0|0}$ 且与 $\boldsymbol{\omega}_k$ 、 \mathbf{v}_k 不相关.

扩展信息滤波是扩展 Kalman 滤波的信息表示形式,定义 Fisher 信息矩阵 $\mathbf{Y}_{k-1|k-1}$ 和信息向量 $\hat{\mathbf{y}}_{k-1|k-1}$ 可表示为^[8]:

$$\mathbf{Y}_{k-1|k-1} = P_{k-1|k-1}^{-1} \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k-1|k-1} = P_{k-1|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} = Y_{k-1|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$$

由式(2)可得信息预测矩阵 $\mathbf{Y}_{k|k-1}$ 、信息预测向量 $\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}$ 、信息更新矩阵 $\mathbf{Y}_{k|k}$ 和信息更新向量 $\hat{\mathbf{y}}_{k|k}$ 为:

$$\mathbf{Y}_{k|k-1} = P_{k|k-1}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} = P_{k|k-1}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = Y_{k|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad (3)$$

$$\mathbf{Y}_{k|k} = P_{k|k}^{-1} = P_{k|k-1}^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k = Y_{k|k-1} + I_k$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k} = \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} + H_k^T R_k^{-1} (\mathbf{v}_k + H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) = \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} + i_k$$

其中 $I_k = H_k^T R_k^{-1} H_k$ 为信息贡献矩阵, $i_k = H_k^T R_k^{-1} (\mathbf{v}_k + H_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$ 为信息贡献向量, $\mathbf{v}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}$ 为新息向量.

由式(2)可得:

$$P_{k|k} = Y_{k|k}^{-1} \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = Y_{k|k}^{-1} \hat{\mathbf{y}}_{k|k}$$

由式(2)的 Fisher 信息矩阵 $\mathbf{Y}_{k-1|k-1}$ 和信息向量 $\hat{\mathbf{y}}_{k-1|k-1}$ 以及式(3)的信息预测矩阵 $\mathbf{Y}_{k|k-1}$ 和信息预测向量 $\hat{\mathbf{y}}_{k|k-1}$ 可知信息更新矩阵 $\mathbf{Y}_{k|k}$ 和信息更新向量 $\hat{\mathbf{y}}_{k|k}$ ^[9] 为:

$$\mathbf{Y}_{k|k} = Y_{k|k-1} + I_k \quad (5)$$

$$I_k = Y_{k|k-1} P_{xz, k|k-1} R_k^{-1} P_{xz, k|k-1}^T Y_{k|k-1}^T$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k|k} = \hat{\mathbf{y}}_{k|k-1} + i_k \quad (6)$$

$$i_k = Y_{k|k-1} P_{xz, k|k-1} R_k^{-1} (\mathbf{v}_k + P_{xz, k|k-1}^T Y_{k|k-1}^T \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$$

利用 Genz 积分方法^[3],可以得到五维球面规则,将

其与信息滤波框架一起引入容积 Kalman 滤波中,可得高维容积信息滤波.

高维容积信息滤波算法描述如下:

$$X_{i,k-11k-1} \text{ 表示容积点, } i=0,1,\dots,2n^2 \quad (7)$$

$$X_{i,k-11k-1} = S_{k-11k-1} \xi_i + \hat{x}_{k-11k-1}$$

其中 $P_{k-11k-1} = S_{k-11k-1} S_{k-11k-1}^T$, $\{\xi_i, w_i\}$ 为容积点:

$$\xi_i = \begin{cases} [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T, i=0 \\ \sqrt{n+2s_i^+}, i=1,2,\dots,\frac{n(n-1)}{2} \\ -\sqrt{n+2s_i^+}, i=\frac{n(n-1)}{2}+1,\frac{n(n-1)}{2}+2, \\ \dots,n(n-1) \\ \sqrt{n+2s_{i-n(n-1)}^-}, i=n(n-1)+1, \\ n(n-1)+2,\dots,\frac{3n(n-1)}{2} - \sqrt{n+2s_{i-\frac{3n(n-1)}{2}}^-}, \\ i=\frac{3n(n-1)}{2}+1,\frac{3n(n-1)}{2}+2, \\ \dots,2n(n-1) \\ \sqrt{n+2e_{i-2n(n-1)}}, \\ i=2n(n-1)+1,2n(n-1)+2, \\ \dots,n(2n-1) - \sqrt{n+2e_{i-n(2n-1)}}, \\ i=n(2n-1)+1,n(2n-1)+2,\dots,2n^2 \end{cases}$$

其中 e_i 为空间 R^n 中第 i 个元素为 1 的单位向量, s_j^+ 和 s_j^- 为:

$$\begin{cases} s_j^+ = \sqrt{\frac{1}{2}}(e_m + e_n), m < n, m=1,2,\dots,n \\ s_j^- = \sqrt{\frac{1}{2}}(e_m - e_n), m < n, m=1,2,\dots,n \end{cases}$$

$X_{i,k-11k-1}^*$ 表示传播容积点, $i=0,1,\dots,2n^2$

$$X_{i,k-11k-1}^* = f(X_{i,k-11k-1}) \quad (8)$$

\hat{x}_{k1k-1} 是 k 时刻的状态预测值:

$$\hat{x}_{k1k-1} = \sum_{i=1}^{2n^2} w_i X_{i,k-11k-1}^* \quad (9)$$

其中

$$w_i = \begin{cases} \frac{2}{n+2}, & i=0 \\ \frac{1}{(n+2)^2}, & i=1,2,\dots,2n(n-1) \\ \frac{4-n}{(n+2)^2}, & i=2n(n-1)+1,2n(n-1)+2,\dots,2n^2 \end{cases}$$

P_{k1k-1} 是 k 时刻的状态误差协方差:

$$P_{k1k-1} = \sum_{i=2}^{2n^2} w_i (X_{i,k-11k-1}^* - \hat{x}_{k1k-1}) \cdot (X_{i,k-11k-1}^* - \hat{x}_{k1k-1})^T + Q_{k-1} \quad (10)$$

\hat{z}_{k1k-1} 是 k 时刻的量测预测值:

$$\hat{z}_{k1k-1} = \sum_{i=1}^{2n^2} w_i Z_{i,k1k-1} \quad (11)$$

其中 $Z_{i,k1k-1}$ 是经过测量方程传播的传播容积点

($i=1,2,\dots,2n^2$):

$$Z_{i,k1k-1} = h(X_{i,k1k-1})$$

$$X_{i,k1k-1} = S_{k1k-1} \xi_i + \hat{x}_{k1k-1}$$

$$P_{k1k-1} = S_{k1k-1} S_{k1k-1}^T$$

$P_{xz,k1k-1}$ 是 k 时刻的互协方差:

$$P_{xz,k1k-1} = \sum_{i=1}^{2n^2} w_i (X_{i,k1k-1}^* - \hat{x}_{k1k-1}) (Z_{i,k1k-1} - \hat{z}_{k1k-1})^T \quad (12)$$

式(6)中新息向量 v_k 为:

$$v_k = z_k - \hat{z}_{k1k-1} = z_k - \sum_{i=1}^{2n^2} w_i Z_{i,k1k-1} \quad (13)$$

3 两阶段高维容积信息滤波算法

考虑带有未知随机偏差的非线性离散随机系统^[10-12]模型表示如下:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k) + B_k b_k + \omega_k^x \\ b_{k+1} &= b_k + \omega_k^b \end{aligned} \quad (14)$$

$$z_k = h(x_k) + F_k b_k + v_k$$

其中 $x_k \in R^n$ 是状态向量, $z_k \in R^m$ 是观测向量, $b_k \in R^p$ 是系统偏差向量, 非线性函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 分别是状态转移函数和观测函数且在 x_k 处连续可微, 矩阵 B_k 和 F_k 分别是偏差在状态方程和在观测方程中的系数矩阵, 且各自具有合适的维度. 噪声序列 ω_k^x, ω_k^b 和 v_k 是互不相关的零均值高斯白噪声序列, 方差具有如下所示的关系:

$$E \begin{bmatrix} \omega_k^x \\ \omega_k^b \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_k^x \\ \omega_k^b \\ v_k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} Q_k^x & 0 & 0 \\ 0 & Q_k^b & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \delta_{ij}$$

其中 Q_k^x, Q_k^b, R_k 为正定对称矩阵, δ_{ij} 是 Kronecker 函数.

假设初始状态值 x_0 和 b_0 是互不相关的白噪声过程, 且两者为具有以下特征的高斯随机变量:

$$E[x_0] = \hat{x}_0, E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] = P_0^x > 0$$

$$E[b_0] = \hat{b}_0, E[(b_0 - \hat{b}_0)(b_0 - \hat{b}_0)^T] = P_0^b > 0$$

为了推导出两阶段高维容积信息滤波, 需要用到矩阵分块求逆引理.

引理 1 (矩阵分块求逆引理) 矩阵 A, B, C 具有适当的维度且 C 可逆, 则有^[13]

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D & E \\ E^T & F \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} D = (A - BC^{-1}B^T)^{-1} \\ E = -DBC^{-1} \\ F = C^{-1} + C^{-1}B^TDBC^{-1} \end{cases}$$

引理结束.

两阶段高维容积信息滤波不能直接套用两阶段扩展 Kalman 滤波框架, 需要使用矩阵分块解耦方法. 在两

阶段扩展 Kalman 滤波中,状态矩阵 A_k 直接与变换矩阵相乘,矩阵维数确定,所以在矩阵分块的时候可以清楚的分成四块.但是在两阶段高维容积信息滤波中,矩阵是由统计方法得到的,不能直接分块,必须根据状态维度和偏差维度动态的进行分块.

由文献[14]和[15]可以推导出非线性 T 变换和非线性两阶段变换,进而可得到非线性两阶段变换信息向量 \hat{y}_k 和信息矩阵 Y_k 如下:

$$\hat{y}_{k|k-1} = T(\Phi, \bar{y}_{k|k-1}) \quad (15)$$

$$\hat{y}_{k|k} = T(\Psi, \bar{y}_{k|k}) \quad (16)$$

$$Y_{k|k-1} = \frac{\partial T(\Phi, \bar{y}_{k|k-1})}{\partial \bar{y}_{k|k-1}} \bar{Y}_{k|k-1} \left(\frac{\partial T(\Phi, \bar{y}_{k|k-1})}{\partial \bar{y}_{k|k-1}} \right)^T \quad (17)$$

$$Y_{k|k} = \frac{\partial T(\Psi, \bar{y}_{k|k})}{\partial \bar{y}_{k|k}} \bar{Y}_{k|k} \left(\frac{\partial T(\Psi, \bar{y}_{k|k})}{\partial \bar{y}_{k|k}} \right)^T \quad (18)$$

式(17)和(18)具有如下性质:

$$\frac{\partial T(\Phi, \bar{y}_{k|k-1})}{\partial \bar{y}_{k|k-1}} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & S_k \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \equiv T(S_k) \quad (19)$$

$$\frac{\partial T(\Psi, \bar{y}_{k|k})}{\partial \bar{y}_{k|k}} = \begin{bmatrix} I_{n-p} & T_k \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \equiv T(T_k) \quad (20)$$

S_k 和 T_k 如式(21)所示:

$$S_k = \frac{\partial \Phi(\bar{y}_{k|k-1}^2)}{\partial \bar{y}_{k|k-1}^2}, T_k = \frac{\partial \Psi(\bar{y}_{k|k}^2)}{\partial \bar{y}_{k|k}^2} \quad (21)$$

由式(4)、(16)和非线性两阶段变换公式,展开并整理可得:

$$\bar{X}_{k|k-1}^1 = \sum_{i=1}^{2n^2} w_i f^1(S_{k-1|k-1} \xi_i + T(\Psi, \bar{X}_{k-1|k-1}), u_{k-1}) - \Phi(\bar{X}_{k|k-1}^2) \quad (22)$$

$$\bar{X}_{k|k}^1 = (\bar{P}_{k|k}^1 + V_k \bar{P}_{k|k}^2 V_k^T) (\bar{y}_{k|k}^1 + \Psi(\bar{y}_{k|k}^2)) + V_k \bar{P}_{k|k}^2 \bar{y}_{k|k}^2 - \Psi(\bar{x}_{k|k}^2) \quad (23)$$

$$\bar{X}_{k|k-1}^2 = \sum_{i=1}^{2n^2} w_i f^2(S_{k-1|k-1} \xi_i + T(\Psi, \bar{X}_{k-1|k-1}), u_{k-1}) \quad (24)$$

$$\bar{X}_{k|k}^2 = \bar{P}_{k|k}^2 V_k^T (\bar{y}_{k|k}^1 + \Psi(\bar{y}_{k|k}^2)) + \bar{P}_{k|k}^2 \bar{y}_{k|k}^2 \quad (25)$$

其中 $f(\cdot) = [(f^1(\cdot))^T \ (f^2(\cdot))^T]^T$.

根据系统中矩阵的维数,对式(13)进行分块:

$$v_k = \begin{bmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_k - \sum_{i=1}^{2n^2} w_i h^1(S_{k|k-1} \xi_i + T(\Phi, \bar{X}_{k|k-1}), u_k) \\ z_k - \sum_{i=1}^{2n^2} w_i h^2(S_{k|k-1} \xi_i + T(\Phi, \bar{X}_{k|k-1}), u_k) \end{bmatrix} \quad (26)$$

其中 $h(\cdot) = [(h^1(\cdot))^T \ (h^2(\cdot))^T]^T$.

将式(15)、(17)和(19)分别带入式(3)的两端,整理可得:

$$\bar{y}_{k|k-1}^1 = (\bar{Y}_{k|k-1}^1 + S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T) (\bar{X}_{k|k-1}^1 + \Phi(\bar{X}_{k|k-1}^2))$$

$$+ S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2 \bar{X}_{k|k-1}^2 - \Phi(\bar{y}_{k|k-1}^2) \quad (27)$$

$$\bar{y}_{k|k-1}^2 = \bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T (\bar{X}_{k|k-1}^1 + \Phi(\bar{X}_{k|k-1}^2)) + \bar{Y}_{k|k-1}^2 \bar{X}_{k|k-1}^2 \quad (28)$$

令 $L = P_{xz, k|k-1} R_k^{-1}$, 由式(5)、(6)、(15)~(17)、(20)、(26)得到:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{k|k}^1 &= \bar{y}_{k|k-1}^1 + \Phi(\bar{y}_{k|k-1}^2) - \Psi(\bar{y}_{k|k}^2) \\ &+ (\bar{Y}_{k|k-1}^1 + S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T) L \\ &\cdot [v_k^1 + P_{xz, k|k-1}^T ((\bar{Y}_{k|k-1}^1 + S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T) \\ &\cdot (\bar{X}_{k|k-1}^1 + \Phi(\bar{X}_{k|k-1}^2)) + S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2 \bar{X}_{k|k-1}^2)] \\ &+ S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2 L [v_k^2 + P_{xz, k|k-1}^T (\bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T (\bar{X}_{k|k-1}^1 \\ &+ \Phi(\bar{X}_{k|k-1}^2)) + \bar{Y}_{k|k-1}^2 \bar{X}_{k|k-1}^2)] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{k|k}^2 &= \bar{y}_{k|k-1}^2 + \bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T L [v_k^1 + P_{xz, k|k-1}^T ((\bar{Y}_{k|k-1}^1 \\ &+ S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T) (\bar{X}_{k|k-1}^1 + \Phi(\bar{X}_{k|k-1}^2)) \\ &+ S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2 \bar{X}_{k|k-1}^2)] + \bar{Y}_{k|k-1}^2 L [v_k^2 \\ &+ P_{xz, k|k-1}^T (\bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T (\bar{X}_{k|k-1}^1 \\ &+ \Phi(\bar{X}_{k|k-1}^2)) + \bar{Y}_{k|k-1}^2 \bar{X}_{k|k-1}^2)] \end{aligned} \quad (30)$$

对于式(10),令

$$M_{k-1} = \sum_{i=1}^{2n^2} w_i (X_{i, k-1|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1}) (X_{i, k-1|k-1}^* - \hat{x}_{k|k-1})^T$$

根据之前得到的分块矩阵的维数,得到 k 时刻的状态误差协方差 $P_{k|k-1}$:

$$P_{k|k-1} = \begin{bmatrix} M_{k-1}^{11} + Q_{k-1}^{11} & M_{k-1}^{12} + Q_{k-1}^{12} \\ (M_{k-1}^{12} + Q_{k-1}^{12})^T & M_{k-1}^{22} + Q_{k-1}^{22} \end{bmatrix}$$

整理得到:

$$\bar{P}_{k|k-1}^1 = M_{k-1}^{11} + Q_{k-1}^{11} - U_k (M_{k-1}^{22} + Q_{k-1}^{22}) U_k^T \quad (31)$$

$$\bar{P}_{k|k-1}^2 = M_{k-1}^{22} + Q_{k-1}^{22} \quad (32)$$

$$U_k = (M_{k-1}^{12} + Q_{k-1}^{12}) (M_{k-1}^{22} + Q_{k-1}^{22})^{-1} \quad (33)$$

由式(3)和引理1得到:

$$\bar{Y}_{k|k-1}^1 = (\bar{P}_{k|k-1}^1)^{-1} - S_k Y_{k|k-1}^2 S_k^T \quad (34)$$

$$\bar{Y}_{k|k-1}^2 = (\bar{P}_{k|k-1}^2)^{-1} + U_k^T (\bar{P}_{k|k-1}^1)^{-1} U_k \quad (35)$$

$$S_k = -(\bar{P}_{k|k-1}^1)^{-1} U_k ((\bar{P}_{k|k-1}^2)^{-1} + U_k^T (\bar{P}_{k|k-1}^1)^{-1} U_k)^{-1} \quad (36)$$

令 $N = P_{xz, k|k-1} R_k^{-1} P_{xz, k|k-1}^T$, 由式(5)得到:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{k|k}^1 &= (\bar{Y}_{k|k-1}^1 + S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T) [I + N (\bar{Y}_{k|k-1}^1 + S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T)] \\ &+ S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2 N \bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T - T_k \bar{Y}_{k|k}^2 T_k^T \end{aligned} \quad (37)$$

$$\bar{Y}_{k|k}^2 = \bar{Y}_{k|k-1}^2 (I + N \bar{Y}_{k|k-1}^2) + \bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T N S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2 \quad (38)$$

$$\begin{aligned} T_k &= [S_k Y_{k|k-1}^2 (I + N \bar{Y}_{k|k-1}^2) + \\ &(\bar{Y}_{k|k-1}^1 + S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T) N S_k Y_{k|k-1}^2] \\ &[Y_{k|k-1}^2 (I + N \bar{Y}_{k|k-1}^2) + \bar{Y}_{k|k-1}^2 S_k^T N S_k \bar{Y}_{k|k-1}^2]^{-1} \end{aligned} \quad (39)$$

由式(4)和引理1得到:

$$\bar{P}_{k|k}^1 = (\bar{Y}_{k|k}^1)^{-1} - V_k P_{k|k}^2 V_k^T \quad (40)$$

$$\bar{P}_{k|k}^2 = (\bar{Y}_{k|k}^2)^{-1} + T_k^T (\bar{Y}_{k|k}^1)^{-1} T_k \quad (41)$$

$$V_k = -(\bar{Y}_{k|k}^1)^{-1} T_k ((\bar{Y}_{k|k}^2)^{-1} + T_k^T (\bar{Y}_{k|k}^1)^{-1} T_k)^{-1} \quad (42)$$

通过后向差分方程可以确定非线性函数 Φ 和 Ψ :

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{X}_{k|k-1}^2) &= \Phi(\bar{X}_{k-1|k-2}^2) + U_k(\bar{X}_{k|k-1}^2 - \bar{X}_{k-1|k-2}^2) \\ \Psi(\bar{X}_{k|k}^2) &= \Psi(\bar{X}_{k-1|k-1}^2) + V_k(\bar{X}_{k|k}^2 - \bar{X}_{k-1|k-1}^2) \end{aligned}$$

推导完毕.

两阶段容积信息滤波算法是容积信息滤波算法经过非奇异两阶段变换得到的,因此两者在数学上可以证明是等价的,故而两种算法的精度相同.但当系统模型中存在随机偏差时,传统的做法将随机偏差作为系统状态的一部分,对系统状态进行扩维,扩维滤波器计算复杂度随着扩维矩阵的增加而增大.扩维矩阵维度为 $n+p$,当维度 p 和 n 可比时,相较于系统的初始状态维度,新的状态向量 x_k 的维度显著增大,扩维滤波器的计算量大幅增长,在数字计算机上运行时容易溢出和造成系统崩溃从而失效,而造成这种结果的主要原因是额外计算了 $P^{vb}(\cdot)$.为了解决这个问题,引入了两阶段滤波器的思想,两阶段信息滤波可以降低高维系统模型中滤波器的计算复杂度.

4 实验与分析

4.1 仿真系统模型

纯方位跟踪系统是通过两个传感器来跟踪移动目标的状态^[9],得到非线性的测量值,每个传感器只能获得目标状态的角度观察值,两个角度观测值记为 $\alpha_{i,k}$ 和 $\beta_{i,k}$,如图 1 所示.两个角度的观测值形成平面坐标中的交叉点的位置.对于图 1 所示的直角坐标系,两个传感器 S_{i1} 和 S_{i2} ($i=1,2,\dots,N$) 分别固定在平台 P_1 和 P_2 上,它们之间的距离为 d .有很多传感器固定在平台 P_j ($j=1,2$) 上,记为 $\{(S_{1,j}, P_j), (S_{2,j}, P_j), \dots, (S_{N,j}, P_j)\}$,对应的非线性量测值为 $\{(\alpha_{1,k}, \beta_{1,k}), (\alpha_{2,k}, \beta_{2,k}), \dots, (\alpha_{N,k}, \beta_{N,k})\}$.

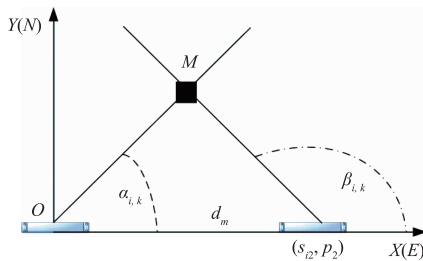


图1 纯方位跟踪系统图

其动力学模型是一个四维的非线性系统 $x_k = [x_{1,k}, x_{2,k}, y_{1,k}, y_{2,k}]^T$,其中 $x_{1,k}$ 和 $x_{2,k}$ 是东、北方向的位移分量, $y_{1,k}$ 和 $y_{2,k}$ 是和位移分量相对的速度分量,将目标的移动作为 CV 模型,状态方程和偏差方差表示如下:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_k x_k + b_k + \omega_k^x \\ b_{k+1} &= b_k + \omega_k^b \end{aligned}$$

其中 $F_k = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 过程噪声方差

$$Q_k = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{T^2}{2} & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \times 0.5, \text{跟踪周期 } T = 1 \text{ s.}$$

根据交叉原则,观测函数

$$h_k(x_k) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arccos\left(\frac{x_{1,k}}{\sqrt{x_{1,k}^2 + y_{1,k}^2}}\right) \\ \arccos\left(\frac{x_{1,k} - d}{\sqrt{(x_{1,k} - d)^2 + y_{1,k}^2}}\right) \end{bmatrix}$$

在多传感器系统中,量测方程为:

$$z_{i,k} = \begin{bmatrix} \arccos\left(\frac{x_{1,k}}{\sqrt{x_{1,k}^2 + y_{1,k}^2}}\right) \\ \arccos\left(\frac{x_{1,k} - d}{\sqrt{(x_{1,k} - d)^2 + y_{1,k}^2}}\right) \end{bmatrix} + b_k + v_{i,k} \quad (i=1,2,\dots,N)$$

其中 $h_{1,k}(x_k) = h_{2,k}(x_k) = \dots = h_{N,k}(x_k) = h_k(x_k)$.

本仿真实验使用计算机硬件配置为四核 Intel 酷睿 i5 4258U 2.4G 处理器,4GB 内存,操作系统为 Windows7 64 位专业版,仿真软件为 Matlab2013a 版本.

4.2 CKF 算法与 TSHCIF 算法对比实验

初始状态估计值和协方差矩阵为:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{010} &= [0 \quad 10 \quad 3 \quad 10]^T, \hat{\delta}_{010} = [0.1], \\ P_{010}^x &= \text{diag}\{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}, P_{010}^b = [0.5], \\ R_k^x &= \begin{bmatrix} 0.15 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}, R_k^b = 0.5 \times T^2, d = 500. \end{aligned}$$

仿真时间为 200 秒,对 TSHCIF 算法进行了 1000 次 Monte Carlo 仿真.算法误差使用均方根误差(RMSE 误差)进行计算.

$$RMSE(k) = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x_{*,k}^{(i)} - \hat{x}_{*,k|k}^{(i)})^2} \quad (43)$$

其中 M 为 Monte Carlo 仿真次数, $x_{*,k}^{(i)}$ 和 $\hat{x}_{*,k|k}^{(i)}$ 分别表示第 n 次 Monte Carlo 仿真下的 x_* 的状态值和估计值.

图 2 至图 9 是 CKF 算法和 TSHCIF 算法的状态估计值对比图和均方根误差对比图.图 10 和图 11 是偏差项的估计值对比图和均方根误差对比图,其中 CKF 采用的是扩维的方法,在估计其他状态的同时估计偏差.

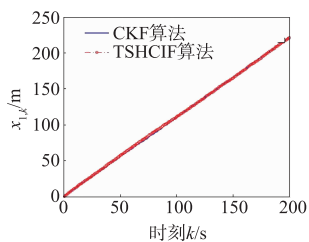


图2 两种算法 $x_{1,k}$ 估计值对比图

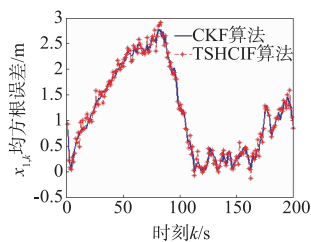


图3 两种算法 $x_{1,k}$ 均方根误差对比图

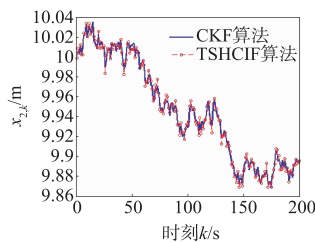


图4 两种算法 $x_{2,k}$ 估计值对比图

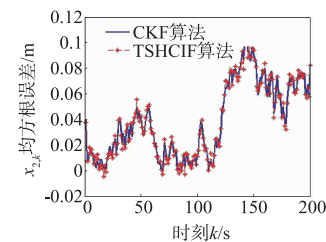


图5 两种算法 $x_{2,k}$ 均方根误差对比图

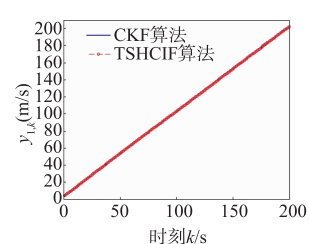


图6 两种算法 $y_{1,k}$ 估计值对比图

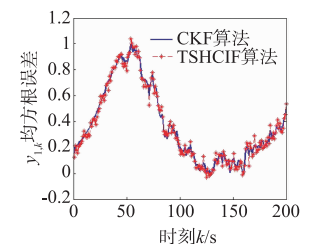


图7 两种算法 $y_{1,k}$ 均方根误差对比图

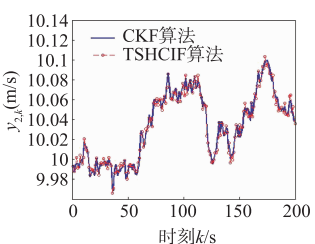


图8 两种算法 $y_{2,k}$ 估计值对比图

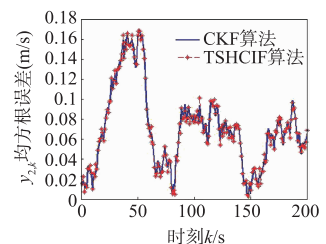


图9 两种算法 $y_{2,k}$ 均方根误差对比图

从图 2、4、6、8 可知,两种算法对状态向量的估计值曲线近似;从图 3、5、7、9 可知 CKF 算法和 TSHCIF 算法的均方根误差曲线近似,差异不大,各个时刻位置基本相同,认为两种算法的估计精度相当.从图 10,图 11 上可以看出,两种算法的曲线图基本一致,误差在可以接受的范围内,事实上这个精度的误差是计算机在进行计算过程中的计算误差.

表 1 表示由式(43)计算出状态估计各分量的均方根误差表.表 2 表示 1000 次 Monte Carlo 仿真算法平均运行时间表.

表 1 状态估计均方根误差表

	CKF 算法	TSHCIF 算法
$x_{1,k}$ (m)	1.1253	1.1223
$x_{2,k}$ (m)	0.1048	0.0826
$y_{1,k}$ (m/s)	0.3496	0.3183
$y_{2,k}$ (m/s)	0.0634	0.0571
b_k (m)	0.0579	0.0319

表 2 1000 次 Monte Carlo 仿真算法平均运行时间表

	CKF 算法	TSHCIF 算法
运行时间 (s)	90.525724	88.672191

从表 1 中可知,TSHCIF 算法的估计精度略高于 CKF 算法,这是因为 TSHCIF 算法采用的是五维 Spherical-Radial 规则,可得到五维精度,而 CKF 算法为三维精度.从运行时间上可看出 TSHCIF 算法运行时间较短,这也验证了信息滤波初始化简单,计算量低的特点.

4.3 CIF 算法与 TSHCIF 算法对比实验

这里仍旧采用 4.2 小节中的初始状态估计值和协方差矩阵,仿真时间为 200 秒,对 TSHCIF 算法进行 1000 次

Monte Carlo 仿真.算法误差使用式(43)进行计算.

图 12 至图 19 是 CIF 算法和 TSHCIF 算法的状态估计值对比图和均方根误差对比图.图 20 和 21 是偏差项的估计值对比图和均方根误差对比图.

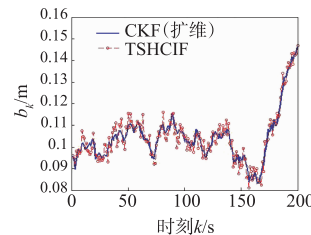


图10 两种算法 b_k 估计值对比图

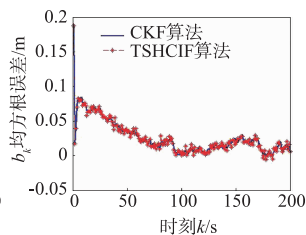


图11 两种算法 b_k 均方根误差对比图

从图 12、14、16、18 可知,两种算法对状态向量的估计值曲线近似;从图 13、15、17、19 可知 CIF 算法和 TSHCIF 算法的均方根误差曲线相较于 4.2 小节中实验更加近似,差异更小,各个时刻位置基本相同,说明两种算法的等价性,估计精度相当.从图 20 和图 21 进一步可以看出,两种算法的等价性.

表 3 为状态估计各分量的均方根误差表,表 4 为 1000 次 Monte Carlo 仿真算法平均运行时间表.

表 3 状态分量均方根误差表

	CIF 算法	TSHCIF 算法
$x_{1,k}$ (m)	0.0177	0.0185
$x_{2,k}$ (m)	0.0224	0.0265
$y_{1,k}$ (m/s)	0.3459	0.3496
$y_{2,k}y_{2,k}$ (m/s)	0.4746	0.4721
b_k (m)	0.1805	0.1790

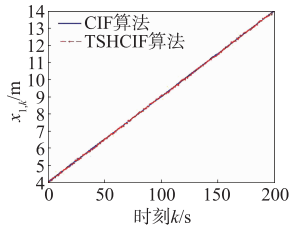


图12 两种算法 $x_{1,k}$ 估计值对比图

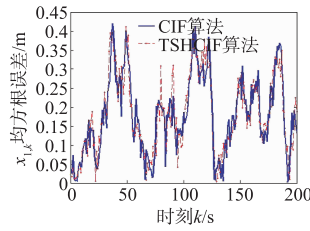


图13 两种算法 $x_{1,k}$ 均方根误差对比图

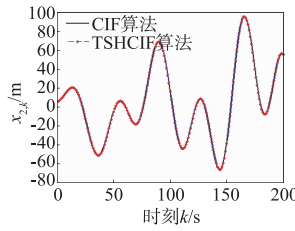


图14 两种算法 $x_{2,k}$ 估计值对比图

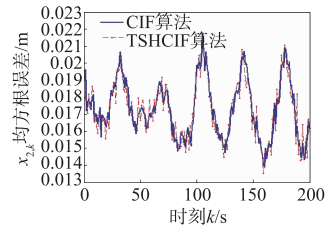


图15 两种算法 $x_{2,k}$ 均方根误差对比图

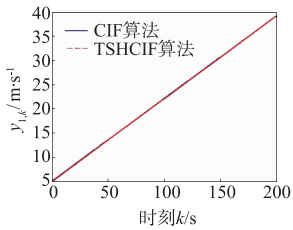


图16 两种算法 $y_{1,k}$ 估计值对比图

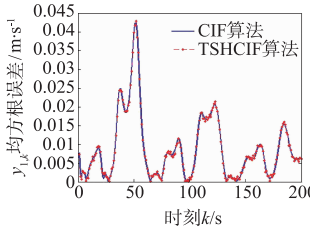


图17 两种算法 $y_{1,k}$ 均方根误差对比图

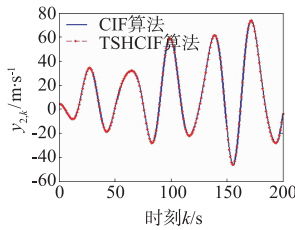


图18 两种算法 $y_{2,k}$ 估计值对比图

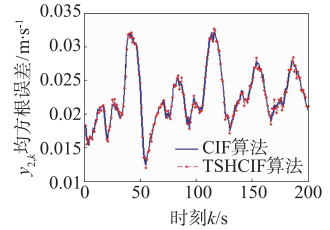


图19 两种算法 $y_{2,k}$ 均方根误差对比图

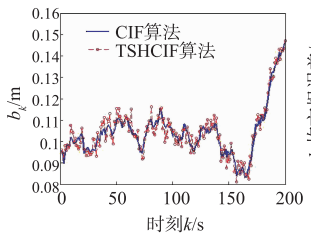


图20 两种算法 b_k 估计值对比图

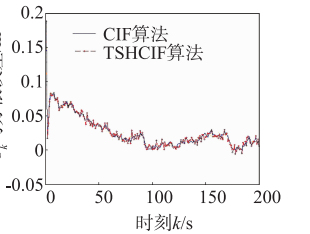


图21 两种算法 b_k 均方根误差对比图

表 4 1000 次 Monte Carlo 仿真算法平均运行时间表

	CIF 算法	TSHCIF 算法
运行时间(s)	88.593870	86.483927

从表 3 中可知,CIF 算法和 TSHCIF 算法的均方根误差非常接近,二者的等价性非常明显.从运行时间上可以看出 TSHCIF 算法运行时间较短,这也验证了两阶段滤波计算复杂度低的特点.

5 结论

为了获取更高精度的容积 Kalman 滤波,本文采用了五维 Spherical-Radial 容积规则,并将高维容积 Kalman 滤波嵌入到扩展信息滤波框架中得到高维容积信息滤波.对于存在随机偏差的系统模型容易造成系统溢出和运行失败的问题通过动态矩阵分块方法,提出了两阶段高维容积信息滤波算法,该算法不用计算滤波增益,初始化简单,计算复杂度较低,同时相较于三维容积规则,该算法的精度也更好.

参考文献

[1] Bucy Senne S. Digital synthesis of nonlinear filter[J]. Au-

tomatica,1971,7(3):287-298.

[2] Julier J,Uhlmann K,Durrant-Whyte F. A new approach for filtering nonlinear system[A]. Proceedings of the American Control Conference[C]. Seattle: American Control Conference Council,1995. 1628-1632.

[3] Arasaratnam I,Haykin S. Cubature kalman filters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2009,54(6):1254-1269.

[4] Sun Tao,Xin Ming. Hypersonic entry vehicle state estimation using high-degree cubature Kalman filter[A]. Proceedings of the AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference[C]. Atlanta: American Institute of Aeronautics and Astronautics,2014. 2383-2394.

[5] Jia Bin,Ming Xin,Cheng Yang. High-degree cubature Kalman filter[J]. Automatica,2013,49(2):510-518.

[6] Gan Q,Harris CJ. Comparison of two measurement fusion methods for Kalman-filter-based multisensor data fusion[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,2001,37(1):273C280.

[7] Mutambara A G O,Durrant Whyte H. Estimation and control for a modular wheeled mobile robot[J]. IEEE Transactions on Control System Technology,2000,8(1):35-46.

[8] Liu Jun,Liu Yu,Xiong Wei, et al. Traching ballistic target based on square-root cubature information filter[J]. Journal of CAEIT,2015,10(5):527-532.

[9] Ge Quanbo,Xu Daxing,Wen Chenglin. Cubature information filters with correlated noises and their applications in decentralized fusion[J]. Signal Proccession,2014,94:434-444.

[10] Zhang Lu,Lv Meilei,Niu Zhuyun, et al. Two-stage CKF for nonlinear system with random bias[A]. Proceeding of

- 2014 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Information Integration[C]. Beijing: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2014. 366 – 370.
- [11] Zhang Lu, Rao Wenbi, Wang Hailun, et al. An advance two-stage cubature kalman filter for nonlinear system with random bias[J]. Journal of Residuals Science & Technology, 2016, 7(13): 206. 1 – 206. 8.
- [12] Zhang Lu, Rao Wenbi, Xu Daxing, et al. Two-stage high-degree cubature information filter [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. 2017, 33(5): 2823 – 2835.
- [13] 韩崇昭, 朱洪艳, 段战胜. 多源信息融合(第二版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2010.
- [14] Hsieh C S, Chen F C. General two-stage Kalman filters [J]. Automatic Control. 2000, 45(4): 819 – 824.
- [15] Hsieh C S. General two-stage extended Kalman filters [J]. Automatic Control, 2003, 48(2): 289 – 293.

作者简介



张 露 女, 1981 年 3 月生于河北邯郸, 衢州学院电气与信息工程学院, 副教授, 博士. 主要研究领域为智能方法与智能计算.
E-mail: zhanglu90573@163.com



饶文碧 女, 1967 年生于湖北武汉, 武汉理工大学计算机科学与技术学院, 教授, 博士生导师. 主要研究领域为数据挖掘与机器学习.
E-mail: wbrao@whut.edu.cn