多值逻辑中基于 Camberra 模糊距离的计量化方法

赵 彬[1],于 鹏[1,2]
(1. 陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西西安 710119;2. 陕西科技大学文理学院,陕西西安 710021)

摘 要: 本文以模糊集间的 Camberra 距离为工具,给出了多值 Łukasiewicz 逻辑系统中公式间的 Camberra-距离,Camberra-相似度与 Camberra-真度的概念,讨论了 Camberra-相似度与 Camberra-真度的性质,证明了每一个公式 φ 的 Camberra-真度都等于一些互不相容的公式的 Camberra-真度之和. 然后以 Camberra-真度为依托,研究了 Łukasiewicz 逻辑度量空间的一些性质,证明了三值 Łukasiewicz 逻辑度量空间没有孤立点,以及每一个球形领域都是不相容理论等结论. 为在公式集 $F(S)$ 上展开程度化推理提供了一种新的方法.

关键词: 计量逻辑学;Camberra 模糊距离;近似推理;相容理论
中图分类号: O141.1;O153.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2018)10-2305-11
电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.10.001

A Kind of Quantitative Method Based on Camberra Fuzzy Distance in Multiple-Valued Logic

ZHAO Bin[1], YU Peng[1,2]
(1. *College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi* 710119, *China*;
2. *School of Arts and Sciences, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an, Shaanxi* 710021, *China*)

Abstract: In this paper, by using Camberra fuzzy distance on fuzzy set, we propose the notions of Camberra-distance, Camberra-similarity degree between two formulas and Camberra-truth degree of one formula in multiple-valued Łukasiewicz logic system, and discuss the properties of Camberra-similarity degree and Camberra-truth degree, prove that the Camberra-truth degree of formula φ is equal to the sum of Camberra-truth degrees of some incompatible formulas. And then, based on Camberra-truth degree, we study some properties of Łukasiewicz logic metric space, prove that there is no isolated point, and arbitrarily sphere neighbourhood is an inconsistent theory in three valued Łukasiewicz logic metric space and so on. Which provides a new method for expand the grade reasoning on formula set $F(S)$.

Key words: quantitative logic; camberra fuzzy distance; approximate reasoning; consistent theory

1 引言

自1965年 Zadeh 提出模糊集的概念以后,模糊数学已经渗透到了各个数学应用分支. 模糊逻辑作为多值逻辑的推广,也获得了很大的发展. 如何将模糊数学中的一些常见方法,例如模糊距离方法、模糊相似度方法引入到多值逻辑与模糊逻辑中,是一个非常有趣的工作. 文献[1]通过引入公式集上的 Broel 模糊测度给出了多值逻辑系统中的一个公式的概率真度,文献[2]在模糊 Łukasiewicz 逻辑系统中给出了公式的 Choquet 积分真度理论,很好的将模糊数学方法引入到了逻辑系统的研究中. 另外,以公式真度为核心概念的计量逻辑学实现了逻辑系统的形式化推理与数值计算的融合. 解决了经典逻辑系统,多值逻辑系统,模糊逻辑系统中程度化推理的问题[3~8],为在公式集 $F(S)$ 上展开近似推理提供了一个可行的框架.

分析已有的计量逻辑学文献,我们发现计量逻辑学中通过先定义公式真度,再通过计算公式 $(\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)$ (简记为 $\varphi\leftrightarrow\psi$) 的真度来定义公式的相似度以及伪距离的思路对于常见的逻辑系统,例如经典命题

收稿日期:2017-06-20;修回日期:2017-11-06;责任编辑:孙瑶
基金项目:国家自然科学基金重点项目(No.11531009);中央高校基本科研业务费专项资金(No.GK201501001)

逻辑系统 L,多值逻辑系统 $Ł_n$,L_n^*,模糊逻辑系统 Łuk,L^* 是很适用的. 但对于更为广泛的模糊逻辑系统,例如 MTL 逻辑系统却不在适用. 这是因为对于一些左连续的 t 模,构成伪距离的三角不等式不再成立. 例如在 $[0,1]^2$ 上定义$\otimes$算子如下:当 $a\le\sqrt{1-b^2}$,$a\otimes b=0$,当 $a>\sqrt{1-b^2}$时,$a\otimes b=\sqrt{a^2+b^2-1}$. 可以验证$\otimes$是左连续 t-模,但不是强正则左连续 t-模,通过$\otimes$算子及其伴随的蕴涵算子,无法通过计量逻辑学的方法定义公式间的距离[9]. 为了克服这些不足,文献[9,10]通过限制蕴涵算子是强正则蕴涵算子的方法,在 MTL 逻辑中给出了一类特殊的 MTL 逻辑系统的真度理论,并称之为强 MTL 逻辑系统 SMTL,但这种改进不能从根本上克服上述困难.

为了在更广泛的范围内建立并应用程度化推理方法,本文以标准 Camberra 模糊距离为例,通过引入公式间的 Camberra-距离的方式,定义了公式间的 Camberra-相似度与一个公式的 Camberra-真度的概念. 一方面给出了一个有别于计量逻辑学的近似推理方法,另一方面为将模糊距离引入到多值逻辑的程度化推理中做出了尝试. 此外,本文定义的 Camberra-真度是不满足文献[11]中概率真度公理化定义的一种公式真度,因此它也是一种有别于概率计量逻辑的新方法,是对计量逻辑的有效拓展,为在公式集上展开近似推理提供了一种新途径.

2 公式间的 Camberra-距离

本节中,我们概要性的给出本文将要用到的一些基本概念和公式间的 Camberra-距离.

定义 1 设 $S=\{p_1,p_2,\cdots\}$是可数集,$\neg$ 是一元运算,$\vee$和$\to$是二元运算,由 S 生成的($\neg$,$\vee$,$\to$)型自由代数记作 $F(S)$. $F(S)$中的元素称为公式或命题,S 中的元素称为原子公式或原子命题. $F(S)$的子集 Γ 叫理论.

定义 2 设 $n\in N^+$,$n\ge 2$. 令

$$I_n=\left\{0,\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}(n\ge 2)$$

在 I_n 中规定:$a\to b=(1-a+b)\wedge 1$,$a\otimes b=(a+b-1)\vee 0$,$a\vee b=\max\{a,b\}$,$\neg a=a\to 0$. 则 I_n 成为($\neg$,$\to$,$\otimes$)代数,称为 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统,并记为 $Ł_n$.

定义 3 设 $v:F(S)\to I_n$ 是($\neg$,$\vee$,$\to$)型同态,称 v 为 $F(S)$的赋值,$A\in F(S)$,$v(A)$称为 A 的赋值,$F(S)$的赋值映射的全体记为 Ω. 若对每一个赋值 $v\in\Omega$ 都有 $v(A)=1$,则称公式 A 为重言式. 若对每一个赋值 $v\in\Omega$ 都有 $v(A)=0$,则称公式 A 为矛盾式. 全体重言式之集与全体矛盾式之集分别记作 Tau 与 Contr. 再设 $A,B\in F(S)$,若$\forall v\in\Omega$,都有 $v(A)=v(B)$,则称公式 A 与 B 逻辑等价,并用 $A\approx B$ 表示.

令 $S_m=\{p_1,p_2,\cdots,p_m\}$是原子命题集 S 上的有限命题集. 公式 A 是含有 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 的合式公式,则公式 A 在 S 上的赋值 v 由 v 在 S_m 上的赋值所唯一确定,其全体记为 Ω_m. 当 v 限制在 S_m 上以后,对于任意的公式 $A(p_1,p_2,\cdots,p_m)$,其赋值映射 v 的赋值域可用 I_n^m 表示,I_n^m 所含元素个数为 n^m 个. 为下文叙述方便记 I_n^m 为 U_m,即 $I_n^m=U_m=\{x_1,\cdots,x_{n^m}\}$,其中 $x_i\in I_n^m$ 且 $x_1,\cdots,x_{n^m}$按字典序依次排列. 此时 $v_x(\varphi)$表示公式 φ 在一个赋值 $x(x\in U_m)$下的像. 例如 $n=3$,$m=2$ 时,

$$U_2=\left\{\begin{array}{l}(0,0),\left(0,\frac{1}{2}\right),(0,1),\left(\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\\ \left(\frac{1}{2},1\right),(1,0),\left(1,\frac{1}{2}\right),(1,1)\end{array}\right\},$$

公式 $\varphi=p\wedge q$ 在赋值 x_i 下的像依次为 $0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1$.

定义 4[12] 设 U 是任意一个非空集合,$I_n=\left\{0,\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{n-2}{n-1},1\right\}$,称映射 $A:U\to I_n$ 为一个 n 值模糊集.

定义 5 令 $U_m=\{x_1,\cdots,x_{n^m}\}$,公式 $\varphi=\varphi(p_1,\cdots,p_m)\in F(S_m)$. 定义 U_m 到 I_n 上的映射 $\varphi:U_m\to I_n$,$\varphi(x)=v_x(\varphi)$,则公式 φ 可视为论域 U_m 上的 n 值模糊集.

定义 6[13] 设集合 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,A 与 B 是 U 上的模糊集,定义模糊集 A 与 B 之间的 Camberra 距离 $\rho(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|A(x_i)-B(x_i)|}{A(x_i)+B(x_i)}$.

定义 7 设 $\varphi,\psi\in F(S_m)$,令

$$\rho_C(\varphi,\psi)=\frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n^m}\frac{|\varphi(x_i)-\psi(x_i)|}{\varphi(x_i)+\psi(x_i)},x_i\in U_m$$

则称 $\rho_C(\varphi,\psi)$为公式 φ 与 ψ 间的 Camberra-距离,$(F(S),\rho_C)$称为基于 Camberra 模糊距离的逻辑度量空间.

定理 1 (公式间 Camberra-距离的不变性) 将 S_m 添加原子公式 $p_{m+1},\cdots,p_{m+t}$得到 S_{m+t},相应的将 $F(S_m)$中的公式 φ 与 ψ 逻辑等价拓展为 $\bar{\varphi}=\varphi\wedge(\bigwedge_{i=1}^{t}(p_{m+i}\to p_{m+i}))$,$\bar{\psi}=\psi\wedge(\bigwedge_{i=1}^{t}(p_{m+i}\to p_{m+i}))$,则 $\rho_C(\varphi,\psi)=\rho_C(\bar{\varphi},\bar{\psi})$.

证明 $t=1$ 时. 定义映射 $g:U_m\to P(U_{m+1})$,$g(x)=\{(x,i)\mid i\in I_n\}$,其中$(x,i)$表示以 x 为前 m 个分量以 i 为第 $m+1$ 个分量的 $m+1$ 维向量,则 $g(U_m)=U_{m+1}$,即 $U_{m+1}=\bigcup_{x\in U_m}\{(x,i)\mid i\in I_n\}$. 由题设 $\bar{\varphi}=\varphi\wedge(p_{m+1}\to p_{m+1})$

$\approx\varphi,\bar{\psi}=\psi\wedge(p_{m+1}\to p_{m+1})\approx\psi$ 可知 $\bar{\varphi},\bar{\psi}$ 作为 U_{m+1} 上的 n 值模糊集有 $\bar{\varphi}=\varphi((x,i))=\varphi(x),\bar{\psi}((x,i))=\psi(x)$ $\left(i=0,\frac{1}{n-1},\cdots,1\right)$. 所以

$$\begin{aligned}p_C(\bar{\varphi},\bar{\psi})&=\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{x\in U_m,i\in I_n}\frac{|\bar{\varphi}((x,i))-\bar{\psi}((x,i))|}{\bar{\varphi}((x,i))+\bar{\psi}((x,i))}\\&=\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{x\in U_m,i\in I_n}\frac{|\varphi(x)-\psi(x)|}{\varphi(x)+\psi(x)}\\&=\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{x\in U_m}n\frac{|\varphi(x)-\psi(x)|}{\varphi(x)+\psi(x)}\\&=\frac{1}{n^{m}}\sum_{x\in U_m}\frac{|\varphi(x)-\psi(x)|}{\varphi(x)+\psi(x)}\\&=p_C(\varphi,\psi)\end{aligned}$$

当 $t>1$ 时. 可以仿照上面的证明定义函数列 $\{g_i\}$ $(i=1,\cdots,t)$，从而得到公式序列 $\{\varphi_i\}$ 与 $\{\psi_i\}$ $(i=1,\cdots,t)$ 满足 $\rho_C(\varphi,\psi)=\rho_C(\varphi_1,\psi_1)=\cdots=\rho_C(\varphi_t,\psi_t)$，$\varphi_t=\bar{\varphi},\psi_t=\bar{\psi}$，命题得证.

例 1　取 $S_2=\{p_1,p_2\}$，在逻辑系统 $Ł_3$ 中，求公式 $\varphi=p_1\vee p_2$ 与 $\psi=p_1\wedge p_2$ 之间的 Camberra-距离.

解　按照定义 5 和定义 7，此时的论域

$$U_2=\left\{\begin{array}{l}(0,0),(0,\frac{1}{2}),(0,1),(\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\\(\frac{1}{2},1),(1,0),(1,\frac{1}{2}),(1,1)\end{array}\right\},$$

U_2 上的 3 值模糊集

$$\varphi=\left(0,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1,1,1\right),$$

$$\psi=\left(0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\right).$$

则 $\rho_C(\varphi,\psi)=\frac{14}{27}$.

为进一步描述不同公式间的距离，做如下准备工作：

将 $[0,1]$ 区间 n 等分，得到 n 个小区间：$\left[0,\frac{1}{n-1}\right)$，$\left[\frac{1}{n-1},\frac{2}{n-1}\right),\cdots,\left[\frac{n-2}{n-1},1\right]$，则立方体 $[0,1]^m$ 被分成 n^m 个体积为 $\frac{1}{n^m}$ 的小立方体，依次记 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{n^m}$. 由于 $\left[\frac{i}{n-1},\frac{i+1}{n-1}\right)\cap I_n=\frac{i}{n-1}$，所以 $\forall x_i\in U$ 都存在某个小立方体包含 x_i，不妨设 $x_i\in\sigma_i$ 定义函数 $\tilde{\varphi}(x)$ 为 $\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x_i),x\in\sigma_i$.

定理 2　（公式间 Camberra-距离的积分表示）　设 $\varphi,\psi\in F(S_m)$，则公式 φ 与 ψ 间的 Camberra-距离为

$$\rho_C(\varphi,\psi)=\int_{[0,1]^m}\frac{|\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\psi}(x)|}{\tilde{\varphi}(x)+\tilde{\psi}(x)}\mathrm{d}x,x\in[0,1]^m.$$

证明　由 $\tilde{\varphi}(x)$ 的定义可知，$\tilde{\varphi}(x)$ 是小区域 σ_i 上的常值函数，$\forall x\in\sigma_i,\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x_i)$，所以

$$\begin{aligned}\int_\sigma\frac{|\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\psi}(x)|}{\tilde{\varphi}(x)+\tilde{\psi}(x)}\mathrm{d}x&=\frac{|\tilde{\varphi}(x_i)-\tilde{\psi}(x_i)|}{\tilde{\varphi}(x_i)+\tilde{\psi}(x_i)}\int_\sigma\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n^m}\frac{|\tilde{\varphi}(x_i)-\tilde{\psi}(x_i)|}{\tilde{\varphi}(x_i)+\tilde{\psi}(x_i)}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\rho_C(\varphi,\psi)&=\frac{1}{n^m}\sum_{x_i\in U_m}\frac{|\tilde{\varphi}(x_i)-\tilde{\psi}(x_i)|}{\tilde{\varphi}(x_i)+\tilde{\psi}(x_i)}\\&=\sum_{x_i\in U_m}\frac{|\tilde{\varphi}(x_i)-\tilde{\psi}(x_i)|}{\tilde{\varphi}(x_i)+\tilde{\psi}(x_i)}\int_\sigma\mathrm{d}x\\&=\int_{[0,1]^m}\frac{|\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\psi}(x)|}{\tilde{\varphi}(x)+\tilde{\psi}(x)}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

下面我们给出无穷值逻辑系统中公式间 Camberra-距离的定义.

定义 8　在模糊 Łukasiewicz 逻辑系统中，设 $\varphi,\psi\in F(S_m)$，定义公式 φ 与 ψ 间的 Camberra-距离

$$\rho_C(\varphi,\psi)=\int_{[0,1]^m}\frac{|\varphi(x)-\psi(x)|}{\varphi(x)+\psi(x)}\mathrm{d}x,x\in[0,1]^m.$$

其中 $\varphi(x),\psi(x)$ 是以 $[0,1]^m$ 为定义域，以 $\varphi(x)=\nu_x(\varphi)$ 为隶属度的公式模糊集.

引理 1　设 $a,b,c\in[0,1]$，则有

(ⅰ) $\frac{|a\vee b-a\vee c|}{a\vee b+a\vee c}\le\frac{|b-c|}{b+c}$;

(ⅱ) $\frac{|a\wedge b-a\wedge c|}{a\wedge b+a\wedge c}\le\frac{|b-c|}{b+c}$;

(ⅲ) $\frac{|a\to b-a\to c|}{a\to b+a\to c}\le\frac{|b-c|}{b+c}$;

(ⅳ) 若 $a\le b\le c$，则 $\frac{c-b}{b+c}\vee\frac{b-a}{a+b}\le\frac{c-a}{a+c}$;

(ⅴ) 若 $a\le c$，则 $\frac{|b-b\vee a|}{b+b\vee a}\le\frac{|b-c|}{b+c}$.

这里 $a\vee b=\max\{a,b\},a\wedge b=\min\{a,b\},a\to b=(1-a+b)\wedge1$.

证明　仅以(ⅲ)为例加以证明.

(ⅲ)分 6 种情形证明：

case 1：$a\le b\le c$. 此时

$$\frac{|a\to b-a\to c|}{a\to b+a\to c}=0\le\frac{|b-c|}{b+c}.$$

case 2：$a\le c\le b$. 此时

$$\frac{|a\to b-a\to c|}{a\to b+a\to c}=0\le\frac{|b-c|}{b+c}.$$

case 3：$c\le a\le b$. 此时

$$\frac{|a\to b-a\to c|}{a\to b+a\to c}=\frac{a-c}{2-a+c}\le\frac{a-c}{b+c}\le\frac{|b-c|}{b+c}.$$

case 4：$b\le a\le c$. 此时

$$\frac{|a\to b-a\to c|}{a\to b+a\to c}=\frac{a-b}{2-a+b}\le\frac{a-b}{b+c}\le\frac{|b-c|}{b+c}.$$

case 5: $b \le c \le a$. 此时

$$\frac{|a\to b-a\to c|}{a\to b+a\to c}=\frac{c-b}{2(1-a)+b+c}\le\frac{|b-c|}{b+c}.$$

case 6: $c \le b \le a$. 此时

$$\frac{|a\to b-a\to c|}{a\to b+a\to c}=\frac{b-c}{2(1-a)+b+c}\le\frac{|b-c|}{b+c}.$$

由以上 6 种情形可得

$$\frac{|a\to b-a\to c|}{a\to b+a\to c}\le\frac{|b-c|}{b+c}.$$

命题 1 设 $\varphi,\psi,\chi\in F(S)$, $\bar{0}\in \mathrm{Contr}$, $T\in \mathrm{Tau}$, 则下列性质成立:

(ⅰ) $\rho_C(\bar{0},T)=1$;

(ⅱ) $\rho_C(\varphi\vee\psi,\varphi\vee\chi)\le\rho_C(\psi,\chi)$;

(ⅲ) $\rho_C(\varphi\wedge\psi,\varphi\wedge\chi)\le\rho_C(\psi,\chi)$;

(ⅳ) $\rho_C(\varphi\to\psi,\varphi\to\chi)\le\rho_C(\psi,\chi)$;

(ⅴ) 若 $\vdash\varphi\to\psi$, $\vdash\psi\to\chi$, 则 $\rho_C(\varphi,\psi)\vee\rho_C(\psi,\chi)\le\rho_C(\varphi,\chi)$;

(ⅵ) 若 $\vdash\varphi\to\psi$, 则 $\rho_C(\chi,\chi\vee\varphi)\le\rho_C(\varphi,\chi)$.

证明 仅以(ⅳ)为例加以证明,其余结合 Camberra-距离的定义与引理 1 可得.

(ⅳ) 由引理 1(ⅲ)可知

$$\begin{aligned}&\rho_C(\varphi\to\psi,\varphi\to\chi)\\&=\frac{1}{n^m}\sum_{x\in U_m}\frac{|\varphi\to\psi(x)-\varphi\to\chi(x)|}{\varphi\to\psi(x)+\varphi\to\chi(x)}\\&\le\frac{1}{n^m}\sum_{x\in U_m}\frac{|\psi(x)-\chi(x)|}{\psi(x)+\chi(x)}\\&=\rho_C(\psi,\chi)\end{aligned}$$

3 公式间的 Camberra-相似度与公式的 Camberra-真度

如何区分一个公式的可靠程度最早是由 Roser 与 Turquette 在文献[14]中提出的问题,它是数理逻辑中一个热点问题. Pavelka 提出的真值指派方法[15], Hailperin、Nilsson 等提出的概率逻辑方法[16,17],王国俊教授提出的广义重言式以及计量逻辑方法[8,18],分别从不同角度对这一问题做出了阐释.

本节中,我们将通过公式间的 Camberra-距离,给出公式间的 Camberra-相似度以及 Camberra-真度的概念,从而给出我们解决此问题的方法.

定义 9 设 $\varphi,\psi\in F(S_m)$, 令

$$\xi_C(\varphi,\psi)=1-\rho_C(\varphi,\psi),$$

则称 $\xi_C(\varphi,\psi)$ 为公式 φ 与 ψ 间的 Camberra-相似度. 进一步,设 $T\in\mathrm{Tau}$, 令

$$\tau_C(\varphi)=\xi_C(\varphi,T),$$

则称 $\tau_C(\varphi)$ 为公式 φ 的 Camberra-真度.

注 1 重言式是所有公式中公认的好公式,拿一个公式同重言式比较,考察它们的相似程度自然而然的可以表示这个公式的"好、坏"程度,这是定义公式的 Camberra-真度的立足点.

以下讨论由 Camberra-距离导出的公式间的 Camberra-相似度与 Camberra-真度的性质.

命题 2 设 $\varphi\in F(S_m)$, 则

$$\tau_C(\varphi)=\frac{1}{n^m}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2i}{n-1+i}\left|\varphi^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|.$$

证明 由 Camberra-真度的定义

$$\begin{aligned}\tau_C(\varphi)&=1-\frac{1}{n^m}\sum_{x\in U_m}\frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}\\&=1-\frac{1}{n^m}\sum_{\varphi(x)=\frac{i}{n-1}}\frac{1-\frac{i}{n-1}}{1+\frac{i}{n-1}}\\&=1-\frac{1}{n^m}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n-1-i}{n-1+i}\left|\varphi^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|\\&=\frac{1}{n^m}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2i}{n-1+i}\left|\varphi^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|.\end{aligned}$$

命题 3 设 $\varphi\in F(S_m)$, 则在 $Ł_3$ 中

$$\tau_C(\varphi)=\frac{1}{3^m}\left(|\varphi^{-1}(1)|+\frac{2}{3}\left|\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right).$$

注 2

(ⅰ) 在上述公式 φ 的 Camberra-真度的定义中,如果我们按照计量逻辑学的基本框架先定义公式 φ 的真度 $\tau(\varphi)=\frac{1}{n^m}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{2i}{n-1+i}\left|\varphi^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right)\right|$, 然后定义公式 φ 与 ψ 的相似度 $\xi(\varphi,\psi)=\tau(\varphi\leftrightarrow\psi)$, 最后定义 φ 与 ψ 的距离为 $\rho(\varphi,\psi)=1-\xi(\varphi,\psi)$. 可以验证上述定义的 $\rho(\varphi,\psi)$ 不满足距离定义中的三角不等式,例如在 $Ł_3$ 中取公式 $\varphi=\bar{0}$, $\psi=p$, $\chi=T$, 则有 $\rho(\varphi,\psi)+\rho(\varphi,\chi)=\frac{8}{9}<\rho(\bar{0},T)=1$.

(ⅱ) 在经典命题逻辑系统中,如果我们按照定义 9 的方式定义公式 φ 的真度,根据命题 3 公式 φ 的 Camberra-真度 $\tau(\varphi)=\frac{1}{2^m}|\varphi^{-1}(1)|$, 这恰好是计量逻辑学[8]中公式 φ 的真度.

(ⅲ) 由定义 7, 定义 9 与注 2(ⅰ)可知,本文在 Łukasiewicz 逻辑系统上建立逻辑度量空间的方法不依赖于蕴含算子的选取,只取决于公式 φ 与 ψ 在赋值空间 Ω 上的赋值,具有较强的适应性. 也就是说本文引入公式距离及真度的方法,同样适用于 MTL 逻辑, BL 逻辑等常见的命题逻辑系统.

命题 4 设 $\varphi,\psi\in F(S_m)$, 则

(ⅰ) $0\le\tau_C(\varphi)\le1$;

(ⅱ) φ 是重言式当且仅当 $\tau_C(\varphi)=1$;

(ⅲ) φ 是矛盾式当且仅当 $\tau_C(\varphi)=0$;

(ⅳ)若 φ 与 ψ 可证等价,则 $\tau_C(\varphi)=\tau_C(\psi)$;

(ⅴ)若 $\vdash\varphi\to\psi$,则 $\tau_C(\varphi)\le\tau_C(\psi)$;

(ⅵ)$\tau_C(\varphi\vee\psi)=\tau_C(\varphi)+\tau_C(\psi)-\tau_C(\varphi\wedge\psi)$;

(ⅶ)在 $Ł_3$ 中,$\tau_C(\varphi)+\tau_C(\neg\varphi)=1+\frac{1}{2}\tau_C(\varphi\wedge\neg\varphi)$;

(ⅷ)在 $Ł_3$ 中,$\tau_C(\varphi\vee\neg\varphi)=1-\frac{1}{2}\tau_C(\varphi\wedge\neg\varphi)$;

(ⅸ)$\tau_C(\varphi\wedge\psi)\ge\tau_C(\varphi)+\tau_C(\psi)-1$;

(ⅹ)$\tau_C(\psi)\le\tau_C(\varphi\to\psi)$;

(ⅺ)$\tau_C(\varphi\to\psi)+\tau_C(\psi\to\varphi)=1+\tau_C(\psi\leftrightarrow\varphi)$.

证明　(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)(ⅳ)由 $\tau_C(\varphi)$ 的定义及命题 2 可证.

(ⅴ)因为 $\vdash\varphi\to\psi$,所以 $\forall x\in U_m,\varphi(x)\le\psi(x)$.

由于$\frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}\ge\frac{1-\psi(x)}{1+\psi(x)}$,所以

$$\begin{aligned}\tau_C(\varphi)&=1-\frac{1}{n^m}\sum_{x\in U_m}\frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}\\&\le 1-\frac{1}{n^m}\sum_{x\in U_m}\frac{1-\psi(x)}{1+\psi(x)}\\&=\tau_C(\psi).\end{aligned}$$

命题成立.

(ⅵ)令
$$\begin{aligned}D_>&=\{x\in U_m\mid\varphi(x)>\psi(x)\},\\D_<&=\{x\in U_m\mid\varphi(x)<\psi(x)\},\\D_=&=\{x\in U_m\mid\varphi(x)=\psi(x)\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\tau(\varphi\vee\psi)\\&=1-\frac{1}{n^m}\sum_{x\in U_m}\frac{1-\varphi\vee\psi(x)}{1+\varphi\vee\psi(x)}\\&=1-\frac{1}{n^m}\Big(\sum_{x\in D_>}\frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}+\sum_{x\in D_<}\frac{1-\psi(x)}{1+\psi(x)}+\sum_{x\in D_=}\frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}\\&=1-\frac{1}{n^m}\Big(\sum_{x\in D_<}\frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}+\sum_{x\in D_>}\frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}+\sum_{x\in D_=}\frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}\\&\quad+\sum_{x\in D_>}\frac{1-\psi(x)}{1+\psi(x)}+\sum_{x\in D_<}\frac{1-\psi(x)}{1+\psi(x)}+\sum_{x\in D_=}\frac{1-\psi(x)}{1+\psi(x)}\\&\quad-\sum_{x\in D_<}\frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}-\sum_{x\in D_>}\frac{1-\psi(x)}{1+\psi(x)}-\sum_{x\in D_=}\frac{1-\psi(x)}{1+\psi(x)}\Big)\\&=\Big(1-\frac{1}{n^m}\Big(\sum_{x\in D_>}\frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}+\sum_{x\in D_<}\frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}\\&\quad+\sum_{x\in D_=}\frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}\Big)\Big)+\Big(1-\frac{1}{n^m}\Big(\sum_{x\in D_>}\frac{1-\psi(x)}{1+\psi(x)}\\&\quad+\sum_{x\in D_<}\frac{1-\psi(x)}{1+\psi(x)}+\sum_{x\in D_=}\frac{1-\psi(x)}{1+\psi(x)}\Big)\Big)\\&\quad-\Big(1-\frac{1}{n^m}\Big(\sum_{x\in D_<}\frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}+\sum_{x\in D_>}\frac{1-\psi(x)}{1+\psi(x)}\\&\quad+\sum_{x\in D_=}\frac{1-\psi(x)}{1+\psi(x)}\Big)\Big)\\&=\Big(1-\frac{1}{n^m}\sum_{x\in U_m}\frac{|1-\varphi(x)|}{1+\varphi(x)}\Big)+\Big(1-\frac{1}{n^m}\Big(\sum_{x\in U_m}\frac{|1-\psi(x)|}{1+\psi(x)}\Big)\\&\quad-\Big(1-\frac{1}{n^m}\sum_{x\in U_m}\frac{1-\varphi\wedge\psi(x)}{1+\varphi\wedge\psi(x)}\Big)\\&=\tau(\varphi)+\tau(\psi)-\tau(\varphi\wedge\psi)\end{aligned}$$

(ⅶ)由(ⅵ)与命题 3 可得.

(ⅷ)由(ⅵ)与(ⅶ)可知

$$\begin{aligned}\tau_C(\varphi\vee\neg\varphi)&=\tau_C(\varphi)+\tau_C(\neg\varphi)-\tau_C(\varphi\wedge\neg\varphi)\\&=1+\frac{1}{2}\tau_C(\varphi\wedge\neg\varphi)-\tau_C(\varphi\wedge\neg\varphi)\\&=1-\frac{1}{2}\tau_C(\varphi\wedge\neg\varphi).\end{aligned}$$

(ⅸ)(ⅵ)的推论.

(ⅹ)由 $\psi\to(\varphi\to\psi)$ 是 $Ł$ 中的定理及(ⅴ)可证.

(ⅸ)由(ⅴ)可知 $\tau_C(\varphi\leftrightarrow\psi)=\tau_C(\varphi\to\psi)+\tau_C(\psi\to\varphi)-\tau_C((\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi))$. 因为 $Ł_n$ 满足预线性,所以 $\tau_C((\varphi\to\psi)\vee(\psi\to\varphi))=1$,命题得证.

注 3　由命题 4 可以看出,本文定义的 Camberra-真度 τ_C 满足文献[11]中的概率真度公理化定义的(ŁK1)(ŁK2)(ŁK3)条件,既(ŁK1):$0\le\tau_C(\varphi)\le1$;(ŁK2):φ 是定理,则 $\tau_C(\varphi)=1$;(ŁK3):如果 $\vdash\varphi\to\psi$,则 $\tau_C(\varphi)\le\tau_C(\psi)$. 但 Camberra-真度不满足概率真度公理化定义的(Łk4)条件. 例如取公式 $\varphi=p,\psi=\neg p$. 则在 $Ł_3$ 中 $\neg(\varphi\to\neg\psi)$ 是可驳公式,但是 $\tau_C(\neg\varphi\to\psi)=\tau_C(\neg p\to\neg p)=1\ne\tau_C(\varphi)+\tau_C(\psi)=\frac{10}{9}$. 既 $\varphi\otimes\psi$ 是可驳公式情形下,$\tau_C(\neg\varphi\to\psi)=\tau_C(\varphi)+\tau_C(\psi)$ 不一定成立. 本文定义的 Camberra-真度 $\tau_C(\varphi)$ 不是文献[11]意义下的概率真度函数,是一种新的公式真度定义方法,本文的计量化模型是有别于概率计量逻辑的一种计量化模型.

例 2　在 $Ł_3$ 中,求下列公式的 Camberra-真度

(ⅰ)$\varphi_1=p\vee\neg p$;

(ⅱ)$\varphi_2=(p\to q)\to r$;

(ⅲ)$\varphi_3=p_1\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n$.

解

(ⅰ)此时,$U_1=\{0,\frac{1}{2},1\}$. 显然 $\varphi_1(0)=\varphi_1(1)=1,\varphi_1(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. 由命题 3,$\tau_C(\varphi)=\frac{1}{3}(2+\frac{2}{3})=\frac{8}{9}$.

(ⅱ)此时,$U_1=\{0,\frac{1}{2},1\}^3$. 可以验证

当 x 为 $(1,0,0),(1,0,\frac{1}{2}),(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}),(0,0,1),(0,\frac{1}{2},1),(0,1,1),(\frac{1}{2},0,1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),(\frac{1}{2},1,1),(1,0,1),(1,\frac{1}{2},1),(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(1,1,1)$ 时,$\varphi_2(x)=1$.

当 x 为 $(1,\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},0,0),(0,0,\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{2},$

$\frac{1}{2}$),$(0,1,\frac{1}{2})$,$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$,$(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$时,$\varphi_2(x)=\frac{1}{2}$.

由命题3,$\tau_C(\varphi_2)=\frac{1}{3^3}(14+\frac{2}{3}\times 7)=\frac{56}{81}$.

(ⅲ)可以验证只有当 $x=(1,1,\cdots,1)$时,$\varphi_2(x)=1$. 要想使得 $\varphi_2(x)=\frac{1}{2}$,x 的分量只能在$\{\frac{1}{2},1\}$中取值,且至少有一个分量为$\frac{1}{2}$可以验证满足上述条件的向量 x 共有 $C_m^1+C_m^2+\cdots+C_m^m=2^m-1$ 个.

由命题3,$\tau_C(\varphi_3)=\frac{1}{3^m}(1+\frac{2}{3}(2^m-1))=\frac{2^{m+1}+1}{3^{m+1}}$.

命题5 设 $\varphi,\psi,\chi\in F(S)$,$\bar{0}\in \mathrm{Contr}$,$T\in \mathrm{Tau}$,则下列性质成立:

(ⅰ)$\xi_C(\bar{0},T)=0$;

(ⅱ)$\xi_C(\varphi\vee\psi,\varphi\vee\chi)\geq\xi_C(\psi,\chi)$;

(ⅲ)$\xi_C(\varphi\wedge\psi,\varphi\wedge\chi)\geq\xi_C(\psi,\chi)$;

(ⅳ)$\xi_C(\varphi\to\psi,\varphi\to\chi)\geq\xi_C(\psi,\chi)$;

(ⅴ)若 $\vdash\varphi\to\psi$, $\vdash\psi\to\chi$,则 $\xi_C(\varphi,\psi)\vee\xi_C(\psi,\chi)\geq\xi_C(\varphi,\chi)$;

(ⅵ)若 $\vdash\varphi\to\psi$,则 $\xi_C(\chi,\chi\vee\varphi)\geq\xi_C(\varphi,\chi)$.

注4 在命题5(ⅰ)中矛盾式与重言式的 Camberra-相似度为0,但两个相似度为0的公式 φ 与 ψ,只能推出 $\varphi\wedge\psi$ 是矛盾式,推不出 φ 与 ψ 一个是矛盾式,一个是重言式. 这是因为,为使 $\xi(\varphi,\psi)=0$,需要 $\forall x\in U_m$,$\frac{|\varphi(x)-\psi(x)|}{\varphi(x)+\psi(x)}=1$. 从而 $\varphi(x)-\psi(x)=\varphi(x)+\psi(x)$或者 $\psi(x)-\varphi(x)=\varphi(x)+\psi(x)$. 当 $\varphi(x)>\psi(x)$时,$\psi(x)=0$. 当 $\varphi(x)<\psi(x)$时,$\varphi(x)=0$. 所以 $\forall x\in U_m$,$\varphi\wedge\psi(x)=0$,$\varphi\wedge\psi$ 是矛盾式.

下面我们讨论 Camberra-距离的 Camberra-真度表达形式.

定理3 在 $Ł_3$ 中,设 $\varphi,\psi\in F(S)$,则

$$\rho_C(\varphi,\psi)=\tau_C(\varphi\leftrightarrow\psi)+2(\tau_C(\varphi\vee\psi)-\tau_C(\varphi\wedge\psi))-1.$$

证明

一方面

$$\begin{aligned}&\rho_C(\varphi,\psi)+\tau_C(\varphi\leftrightarrow\psi)\\&=\frac{1}{3^m}(|\varphi^{-1}(\tfrac{1}{2})\cap\psi^{-1}(0)|+|\varphi^{-1}(0)\cap\psi^{-1}(\tfrac{1}{2})|\\&\quad+|\varphi^{-1}(1)\cap\psi^{-1}(0)|+|\varphi^{-1}(0)\cap\psi^{-1}(1)|\\&\quad+\frac{1}{3}(|\varphi^{-1}(1)\cap\psi^{-1}(\tfrac{1}{2})|+|\varphi^{-1}(\tfrac{1}{2})\cap\psi^{-1}(1)|)\\&\quad+|(\varphi\leftrightarrow\psi)^{-1}(1)|+\frac{2}{3}|(\varphi\leftrightarrow\psi)^{-1}(\tfrac{1}{2})|)\\&=1+\frac{2}{3}(|\varphi^{-1}(\tfrac{1}{2})\cap\psi^{-1}(0)|+|\varphi^{-1}(0)\cap\psi^{-1}(\tfrac{1}{2})|),\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}&\tau_C(\varphi\vee\psi)-\tau_C(\varphi\wedge\psi)\\&=\frac{1}{3^m}(|(\varphi\vee\psi)^{-1}(1)|+\frac{2}{3}|(\varphi\vee\psi)^{-1}(\tfrac{1}{2})|)\\&\quad-\frac{1}{3^m}(|(\varphi\wedge\psi)^{-1}(1)|+\frac{2}{3}|(\varphi\wedge\psi)^{-1}(\tfrac{1}{2})|)\\&=\rho_C(\varphi,\psi)-\frac{1}{3}(|\varphi^{-1}(\tfrac{1}{2})\cap\psi^{-1}(0)|\\&\quad+|\varphi^{-1}(0)\cap\psi^{-1}(\tfrac{1}{2})|).\end{aligned}$$

结合以上两点命题得证.

定理4 设 $\varphi\in F(S)$,

(ⅰ)如果 $\Gamma=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}\subseteq F(S)$,则

$$\rho_C(\varphi,D(\Gamma))=\rho_C(\varphi,\varphi_1^n\otimes\varphi_2^n\otimes\cdots\otimes\varphi_m^n\vee\varphi);$$

(ⅱ)如果 $\Gamma=\{\varphi_1,\cdots\}\subseteq F(S)$,则

$$\rho_C(\varphi,D(\Gamma))=\lim_{t\to\infty}\rho_C(\varphi,\varphi_1^n\otimes\varphi_2^n\otimes\cdots\otimes\varphi_t^n\vee\varphi).$$

这里 $\rho_C(\varphi,D(\Gamma))=\inf\{\rho_C(\varphi,\psi)\mid\psi\in D(\Gamma)\}$,$\varphi^n=\varphi^{n-1}\otimes\varphi$,$\varphi\otimes\psi=\neg(\varphi\to\neg\psi)$.

证明

(ⅰ)由 Łukasiewicz 多值逻辑系统中的广义演绎定理可知当 Γ 是有限集时,$\forall\psi\in D(\Gamma)$,$\vdash\varphi_1^n\otimes\varphi_2^n\otimes\cdots\otimes\varphi_m^n\to\psi$,且 $\varphi_1^n\otimes\varphi_2^n\otimes\cdots\otimes\varphi_m^n$,$\varphi_1^n\otimes\varphi_2^n\otimes\cdots\otimes\varphi_m^n\vee\varphi\in D(\Gamma)$. 由命题1(ⅵ)可知,$\forall\psi\in D(\Gamma)$,$\rho_C(\varphi,\psi)\geq\rho_C(\varphi,\varphi_1^n\otimes\cdots\otimes\varphi_m^n\vee\varphi)$,所以 $\rho_C(\varphi,D(\Gamma))=\rho_C(\varphi,\varphi_1^n\otimes\varphi_2^n\otimes\cdots\otimes\varphi_t^n\vee\varphi)$.

(ⅱ)由 $\vdash\varphi_1^n\otimes\cdots\otimes\varphi_{m+1}^n\vee\varphi\to\varphi_1^n\otimes\cdots\otimes\varphi_m^n\vee\varphi$ 与命题1(ⅴ)可知 $\rho_C(\varphi,\varphi_1^n\otimes\cdots\otimes\varphi_m^n\vee\varphi)$关于 m 单调下降. 并且 $\forall\psi\in D(\Gamma)$,$\exists M$ 使得$\{\varphi_1,\cdots,\varphi_M\}\vdash\psi$. 所以有 $\rho_C(\varphi,\psi)\geq\rho_C(\varphi,\varphi_1^n\otimes\cdots\otimes\varphi_M^n\vee\varphi)$. 进一步 $\rho_C(\varphi,D(\Gamma))=\lim_{t\to\infty}\rho_C(\varphi,\varphi_1^n\otimes\varphi_2^n\otimes\cdots\otimes\varphi_t^n\vee\varphi)$.

引理2 在 $Ł_3$ 中,设 $F(p)$是由单原子公式 p 生成的公式集,则

(ⅰ)公式$\neg(\neg p\to p)$对应的三值模糊集为$(1,0,0)$;

(ⅱ)公式$(\neg p\to p)\wedge(p\to\neg p)$对应的三值模糊集为$(0,1,0)$;

(ⅲ)公式$\neg(p\to\neg p)$对应的三值模糊集为$(0,0,1)$;

(ⅳ)公式 $p\wedge\neg p$ 对应的三值模糊集为$(0,\frac{1}{2},0)$.

引理3[19,20] 在 $Ł_3$ 中,$F(S_m)$是由 m 个原子公式生成的公式集,任取 $x_0\in U_m$,则存在公式 $\varphi\in F(S_m)$,使得

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x=x_0\\0, & x\neq x_0,x\in U_m\end{cases}$$

为下文叙述方便,引入如下记号:$U_m^{0,1}=\{x\in U_m \mid x$ 的分量只包含 0 或者 1$\}$,$U_m^{\frac{1}{2}}=\{x\in U_m \mid x$ 的分量中出现 $\frac{1}{2}\}$.

引理 4　在 $Ł_3$ 中,$F(S_m)$ 是由 m 个原子公式生成的公式集,任取 $x_0\in U_m^{\frac{1}{2}}$,则存在公式 $\varphi\in F(S_m)$,使得

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=x_0\\ 0, & x\neq x_0, x\in U_m\end{cases}$$

证明　取 $x_0\in U_m^{\frac{1}{2}}$,由引理 2 可知存在公式 $\psi\in F(S_m)$,使得

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & x=x_0\\ 0, & x\neq x_0, x\in U_m\end{cases}$$

现在假设 x_0 的第 t 个分量为 $\frac{1}{2}$,令 $\varphi=\psi\wedge p_t\wedge\neg p_t$,则由引理 2(ⅳ)可知,$\varphi$ 满足条件

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=x_0\\ 0, & x\neq x_0, x\in U_m\end{cases}$$

定理 5　在命题逻辑系统 $Ł_3$ 中,公式的真度之集

$$H=\left\{\begin{array}{l}\frac{3k+2l}{3^{m+1}} \mid k=0,1,\cdots,3^m,\\ l=0,1,\cdots,3^m-2^m,\\ k+l\leq 3^m, m=1,2,\cdots\end{array}\right\}$$

证明　只需证明 $\forall\frac{3k+2l}{3^{m+1}}\in H$,存在一个公式 φ,满足 $\tau_C(\varphi)=\frac{3k+2l}{3^{m+1}}$.

首先说明为什么限制 $l\leq 3^m-2^m$. 设公式 φ 含有 m 个原子公式,则 φ 对应的模糊集长度为 3^m,任取 $x\in U_m$ 做如下分析,由于 0 和 1 经过 $\neg,\vee,\rightarrow$ 算子运算以后,只能取值为 0 或 1,为使模糊集 φ 在向量 x 下的值为 $\frac{1}{2}$,需要 x 的分量中至少有一个取值为 $\frac{1}{2}$,这样的取值方法共有 $C_m^1 2^{m-1}+C_m^2 2^{m-2}+\cdots+C_m^m=3^m-2^m$ 种,所以 l 的最大取值为 3^m-2^m.

下面证明存在一个公式 $\varphi\in F(S_m)$,满足 $\tau_C(\varphi)=\frac{3k+2l}{3^{m+1}}$.

在 $U_m^{0,1}$ 中任意选取 k 个不同的向量 $x_{i1},\cdots,x_{ik}$,由引理 3 可知存在 k 个公式 $\psi_{it}(t=1,2,\cdots,k)$ 满足

$$\psi_{it}(x)=\begin{cases}1, & x=x_{it}\\ 0, & x\neq x_{it}\end{cases}$$

同时在 $U_m^{\frac{1}{2}}$ 中任意选取 l 个不同的向量 $x_{j1},\cdots,x_{jl}$,则由引理 4 可知存在 l 个公式 $\varphi_{jt}(t=1,2,\cdots,l)$ 满足

$$\varphi_{jt}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=x_{jt}\\ 0, & x\neq x_{jt}\end{cases}$$

最后,令

$$\varphi=(\bigvee_{t=1}^{k}\psi_{it})\vee(\bigvee_{t=1}^{l}\varphi_{jt})$$

则公式 φ 满足

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x=x_{it}\\ \frac{1}{2}, & x=y_{jt}\\ 0, & x\neq x_{it}, x\neq y_{jt}\end{cases}$$

公式 φ 对应的模糊集中有 k 个分量取值为 1,l 个分量取值为 $\frac{1}{2}$,$\tau_C(\varphi)=\frac{3k+2l}{3^{m+1}}$.

定理 6　在命题逻辑系统 $Ł_3$ 中,公式 $\varphi\in F(S_m)$,则存在公式集 $\Gamma_m\subseteq F(S_m)$,使得

$$\tau_C(\varphi)=\sum_{\varphi_i\in\Gamma_m}\tau_C(\varphi_i).$$

其中 $\varphi_i,\varphi_j\in\Gamma_m$,$\varphi_i\wedge\varphi_j\approx\bar{0}$(矛盾式),并且 $\varphi=\bigvee_{i\in\Gamma_m}\varphi_i$.

证明　设 $\tau_C(\varphi)=\frac{3k+2l}{3^{m+1}}$,$U_m^1=\{x\in U_m \mid \varphi(x)=1\}$,$U_m^{\frac{1}{2}}=\{x\in U_m \mid \varphi(x)=\frac{1}{2}\}$,则 $|U_m^1|=k$,$|U_m^{\frac{1}{2}}|=l$. 依次将 $U_m^1,U_m^{\frac{1}{2}}$ 中的向量记为 x_t 与 x_j,显然 $t=1,2,\cdots,k$,$j=1,2,\cdots,l$. 由引理 3 可知存在公式列 ψ_t 满足

$$\psi_t(x)=\begin{cases}1, & x=x_t\\ 0, & x\neq x_t\end{cases}$$

由引理 4 可知存在公式列 χ_j 满足

$$\chi_j(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=x_j\\ 0, & x\neq x_j\end{cases}$$

令 $\Gamma_m=\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k,\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_l\}$. 显然,任取 $\varphi_i,\varphi_j\in\Gamma_m$,$\varphi_i\wedge\varphi_j\approx\bar{0}$,并且 $\tau_C(\varphi)=\sum_{\varphi_i\in\Gamma_m}\tau_C(\varphi_i)$,$\varphi\approx\bigvee_{i\in\Gamma_m}\varphi_i$.

4　基于 Camberra-真度的近似推理

本节中,我们将利用公式的 Camberra-真度讨论三方面的问题:(1)逻辑度量空间 $(F(S),\rho_C)$ 中是否有孤立点的问题;(2)公式集 $F(S)$,上一些特殊命题集的相容性问题;(3)基于 Camberra-真度的程度化推理问题.

首先,我们探讨一下为什么要在逻辑度量空间中讨论孤立点的问题. 这是由于在近似推理中,我们可能会遇到如下推理模式,如果 φ 靠近 ψ,则 χ 靠近 ω. 此时如果 $(F(S),\rho_C)$ 中含有孤立点 φ,则上述推理模式便无从谈起,这是因为在 φ 周围是没有任何点存在的,所以我们需要讨论逻辑度量空间中的孤立点问题. 在本文

的框架下,我们有如下结论.

定理 7 逻辑度量空间$(F(S),\rho_C)$中没有孤立点.

证明 任取公式$\varphi\in F(S)$. 不妨设φ含有m个原子公式且$\tau_C(\varphi)=\frac{3k+2l}{3^{m+1}}$. $\forall\varepsilon>0$.

情形 1:$\tau_C(\varphi)\neq 0$. 此时$\exists x_0\in U_m$,使得$\varphi(x_0)=1$或者$\varphi(x_0)=\frac{1}{2}$,记$x_0=(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0m})$. 将$U_m$扩充到$U_{m+n}$以后,$(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0m})$扩充为$(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0m},y_1,y_2,\cdots,y_n)$,其中$y_i\in\{0,\frac{1}{2},1\}$. 显然这样的向量共有$3^{m+n}$个,任取一个扩充后的向量$\bar{x}_0=(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0m},y_1,y_2,\cdots,y_n)$. 根据引理 3,存在公式$\chi$满足

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x=\bar{x}_0\\ 0, & x\neq\bar{x}_0\end{cases}$$

令
$$\begin{aligned}\psi&=\varphi\wedge\neg\chi\wedge(\mathop{\wedge}_{t=1}^{n}(p_{m+t}\to p_{m+t})),\\ \bar{\varphi}&=\varphi\wedge(\mathop{\wedge}_{t=1}^{n}(p_{m+t}\to p_{m+t}))\end{aligned}.$$

则φ逻辑等价于$\bar{\varphi}$,且$\psi(\bar{x}_0)=0,\bar{\varphi}(\bar{x}_0)=1$或者$\bar{\varphi}(\bar{x}_0)=\frac{1}{2}$. $x\in U_{m+n}-\{\bar{x}_0\}$时,$\psi(x)=\bar{\varphi}(x)=\varphi(x)$.

所以有

$$\rho_C(\varphi,\psi)=\rho_C(\bar{\varphi},\psi)=\frac{1}{3^{m+n}}\frac{|\bar{\varphi}(\bar{x}_0)-\psi(\bar{x}_0)|}{\bar{\varphi}(\bar{x}_0)+\psi(\bar{x}_0)}=\frac{1}{3^{m+n}}.$$

取$N=[\log_3^{\frac{1}{3^m\varepsilon}}]$,则$n>N$时,$\rho_C(\varphi,\psi)=\frac{1}{3^{m+n}}<\varepsilon$,$\varphi$不是孤立点.

情形 2:$\tau_C(\varphi)=0$. 由命题 4(ⅲ),φ是矛盾式,选取足够大的N,使得$n>N$时,$\frac{1}{3^n}<\varepsilon$. 取$y_i\in\{0,\frac{1}{2},1\}^n$中$n$维向量$x_0=(1,0,\cdots,0)$,由引理 3 存在公式$\psi\in F(S_n)$,使得

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & x=x_0\\ 0, & x\neq x_0\end{cases}$$

则$\rho_C(\varphi,\psi)=\frac{1}{3^{n+1}}<\frac{1}{3^n}<\varepsilon$,$\varphi$不是孤立点.

下面我们讨论公式集$F(S)$上一些特殊命题集的相容性问题.

定理 8 逻辑系统$Ł_3$生成的逻辑度量空间$(F(S),\rho_C)$中任意非空开球作为逻辑理论不相容.

证明 设$\varphi\in F(S),\varepsilon>0,\psi(\varphi,\varepsilon)$是以$\varphi$为中心$\varepsilon$为半径的开球. 假设公式$\varphi$含有$m$个原子公式且$\tau_C(\varphi)=\frac{3k+2l}{3^{m+1}}\in H$. 取$n$足够大使得$\frac{1}{3^n}<\varepsilon$,并且令$\tilde{\varphi}=\varphi\wedge(\mathop{\wedge}_{t=1}^{n}(p_t\to p_t))$,$U_m^1=\{x\in U_m|\tilde{\varphi}(x)=1\}$,$U_m^{\frac{1}{2}}=\{x\in U_m|\tilde{\varphi}(x)=\frac{1}{2}\}$,则$|U_m^1|=3^{n-m}k$,$|U_m^{\frac{1}{2}}|=3^{n-m}l$. 依次将$U_m^1$,$U_m^{\frac{1}{2}}$中的向量记为$x_t$,显然$t=1,2,\cdots,3^{n-m}(k+l)$.

应用引理 4,定理 6,定理 7 中构造公式序列的方法构造公式序列$\{\psi_t\}$满足条件

$$\psi_t(x)=\begin{cases}0, & x=x_t\\ \tilde{\varphi}(x), & x\neq x_t\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\rho_C(\tilde{\varphi},\psi_t)&=\frac{1}{3^n}\left(\left(\sum_{x\in U_n-\{x_t\}}\frac{\tilde{\varphi}(x)-\psi_t(x)}{\tilde{\varphi}(x)+\psi_t(x)}\right)+\frac{\tilde{\varphi}(x_t)-\psi_t(x_t)}{\tilde{\varphi}(x_t)+\psi_t(x_t)}\right)\\&=\frac{1}{3^n}<\varepsilon.\end{aligned}$$

$\psi_t\in\psi(\varphi,\varepsilon)$,并且由$\psi_t$的构造可知$\mathop{\wedge}_{t=1}^{k+l}\psi_t\approx\bar{0}$,$\psi(\varphi,\varepsilon)$是不相容的命题集. $(F(S),\rho_C)$中任意非空开球不相容.

定理 9 逻辑系统$Ł_3$中,$\Delta_\alpha=\{\varphi\in F(S_m)|\tau_C(\varphi)=\alpha,\alpha\in H\}$,则$\Delta_\alpha$具有如下相容性

(ⅰ)$\alpha=1-\frac{1}{3^{m+1}},1-\frac{2}{3^{m+1}}$时,公式集$\Delta_\alpha$是相容命题集;

(ⅱ)$\alpha<1-\frac{2}{3^{m+1}}$时,公式集$\Delta_\alpha$是不相容命题集.

证明

(ⅰ)若$\alpha=1-\frac{1}{3^{m+1}}$,任取$x_0\in U_m^{\frac{1}{2}}$,构造公式$\varphi_i$满足条件

$$\varphi_i(x_0)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=x_0\\ 1, & x\neq x_0\end{cases}$$

则$\tau_C(\varphi_i)=\frac{3\times(3^m-1)+2}{3^{m+1}}=1-\frac{1}{3^{m+1}}$,$\varphi_i\in\Delta_\alpha$. 这样的$\varphi_i$显然有$3^m-2^m$个,并且每一个$\varphi_i$在向量$x_0=(0,\cdots,0)$,$x_1=(1,\cdots,1)$的取值为 1. 任取$\varphi_i,\varphi_j\in\Delta_\alpha$,则$\varphi_i^n\otimes\varphi_j^n(x_0)=1$,$\varphi_i^n\otimes\varphi_j^n(x_1)=1(n\geq 3)$. 由$\Delta_\alpha$推不出矛盾式,$\Delta_\alpha$是相容命题集.

若$\alpha=1-\frac{2}{3^{m+1}}$,则$k=3^m-2,l=2$. 这说明在$U_m^{\frac{1}{2}}$有且只存在两个向量使得公式$\varphi$在此向量处取值为$\frac{1}{2}$,并且不存在其它情形. 同$\alpha=1-\frac{1}{3^{m+1}}$一样,$\varphi_i$在向量$x_0=(0,\cdots,0)$,$x_1=(1,\cdots,1)$的取值为 1,并且任意的$\varphi_i$,$\varphi_j\in\Delta_\alpha$,则$\varphi_i^n\otimes\varphi_j^n(x_0)=1$,$\varphi_i^n\otimes\varphi_j^n(x_1)=1$. 由$\Delta_\alpha$不能推出矛盾式,$\Delta_\alpha$是相容命题集.

(ⅱ)若$\alpha<1-\frac{2}{3^{m+1}}$,分 3 种情形讨论

情形 1: $k=3^m-1$. 此时 l 只能等于 0,否则 $\alpha=1-\frac{1}{3^{m+1}}$. 也就是说在 U_m 中只存在一个向量 x 使得 $\varphi(x)=0$. 构造公式列$\{\varphi_i\}(i=1,2,\cdots,3^m)$满足条件

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}0, & x=x_i\\ 1, & x\neq x_i\end{cases}$$

则 $\tau_C(\varphi_i)=1-\frac{1}{3^m}$,且$\bigwedge_{t=1}^{3^m}\psi_t\approx\bar{0}$,$\Delta_\alpha$ 是不相容命题集.

情形 2:$k=3^m-2$. 此时 l 最大只能取 1,否则 $\alpha=1-\frac{2}{3^{m+1}}$. 若 $l=0$,则仿照情形 1 构造 3^m-2 个公式,使得它们的真度都等于 α,而自身的交等价于矛盾式,Δ_α 不相容.

若 $l=1$,则 $\alpha=1-\frac{4}{3^{m+1}}$,取 $y_i\in U_m^{\frac{1}{2}}$,$x_t\in U_m-\{y_i\}$. 由引理(4)及定理 5,可以构造公式 $\psi_{tj}(j=1,\cdots,3^m-2^m)$满足

$$\psi_{tj}(x)=\begin{cases}0, & x=x_t\\ \frac{1}{2}, & x=y_j\\ 1, & x\neq x_t,x\neq y_j\end{cases}$$

则 $\tau_C(\psi_{tj})=1-\frac{4}{3^{m+1}}$,$\psi_{tj}\in\Delta_\alpha$. 并且 $\psi_{tj}\wedge\psi_{t'j}(x_t)=\psi_{tj}\wedge\psi_{t'j}(x_{t'})=0$,$\psi_{tj}\wedge\psi_{tj'}(x_j)=0$ 或者 $\psi_{tj}\wedge\psi_{tj'}(x_j)=\frac{1}{2}$,$\psi_{tj}\wedge\psi_{tj'}(x_{j'})=0$ 或者 $\psi_{tj}\wedge\psi_{tj'}(x_{j'})=\frac{1}{2}$. 进一步 $\otimes\psi_{tj}^3\approx\bar{0}$. Δ_α 不相容.

情形 3:

(1)$k<3^m-2$,$k+l<3^m$. 此时可以在 $U_m^{\frac{1}{2}}$ 中任意选取一个包含 l 个向量的子集 Λ_i. 令 $\overline{\Lambda}_i=U_m-\Lambda_i$,然后在 $\overline{\Lambda}_i$ 中任意选取一个包含 k 个向量的子集 $\widetilde{\Lambda}_i$,构造公式列$\{\varphi_t\}$满足条件

$$\varphi_t(x)=\begin{cases}1, & x\in\widetilde{\Lambda}_i\\ \frac{1}{2}, & x\in\Lambda_i\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

由选取的任意性,以及 $k+l<3^m$ 可知上述构造的公式满足 $\tau_C(\varphi_t)=\alpha$,且$\otimes\psi_{tj}^3\approx\bar{0}$,$\Delta_\alpha$ 不相容.

(2)$k<3^m-2$,$k+l=3^m$. 此时公式集 Δ_α 中的公式分为两类,一类是使得 $\varphi(x)=\frac{1}{2}$个数为 l,此时的 $l\geq3$,另一类是使 $\varphi(x)=\frac{1}{2}$的个数严格小于 l. 选取第一类公式 ψ 进行考察. 在使得 ψ 赋值为$\frac{1}{2}$的向量中,任意选取一个集合 $\Lambda_i=\{x_{i1},x_{i2},x_{i3}\}$,通过公式 ψ 可以构造新的公式χ 满足条件:①$\chi\notin\Lambda_i$ 时,$\chi(x)=\psi(x)$;②任意选取两个向量 $x_j,x_t\in\Lambda_i$ 使得χ 取值为 1;③在 Λ_i 剩余的一个向量处取值为 0. 显然 $\tau_C(\chi)=\frac{3(k+2)+2(l-3)}{3^{m+1}}=\frac{3k+2l}{3^{m+1}}$,这时又回到了(1)的情形,$\Delta_\alpha$ 不相容.

最后,我们讨论基于 Camberra-真度的程度化推理问题.

定义 10　在 n 值 Łukasiewicz 逻辑系统 $Ł_n$ 中,设$\chi\in F(S)$,$\Gamma=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}\subseteq F(S)$,令

$$gr_C(\Gamma|\sim\chi)=\tau_C(\varphi_1^n\otimes\cdots\otimes\varphi_m^n\to\chi),$$

则称 $gr_C(\Gamma|\sim\chi)$为公式集 Γ 推出公式χ 的程度.

命题 6　在 $Ł_n$ 中,设 $\varphi,\psi,\chi\in F(S)$,$\Gamma,\Sigma$ 是 $F(S)$中的有限理论,则

(ⅰ)若$\chi\in\Gamma$,则 $gr_C(\Gamma|\sim\chi)=1$;

(ⅱ)若 $\Sigma\subseteq\Gamma$,则 $gr_C(\Sigma|\sim\chi)\leq gr_C(\Gamma|\sim\chi)$;

(ⅲ)若 $gr_C(\Gamma|\sim\varphi)\geq\alpha$,$gr_C(\Gamma|\sim\psi)\geq\beta$,则 $gr_C(\Gamma|\sim\varphi\wedge\psi)\geq\alpha+\beta-1$;

(ⅳ)若 $gr_C(\Gamma|\sim\varphi)\geq\alpha$,$gr_C(\Gamma|\sim\psi)\geq\beta$,则 $gr_C(\Gamma|\sim\varphi\vee\psi)\geq\max(\alpha+\beta-1,\alpha\vee\beta)$;

(ⅴ)若 $gr_C(\Sigma|\sim\chi)\geq\alpha$,$gr_C(\Gamma|\sim\chi)\geq\beta$,则 $gr_C(\Sigma\cup\Gamma|\sim\varphi)\geq\alpha\vee\beta$;

(ⅵ)若 $gr_C(\Gamma|\sim\bar{0})=1$,则 Γ 是不相容命题集,否则 Γ 是相容命题集.

证明　(ⅰ)(ⅱ)可由定义 10 及 $Ł_n$ 中的广义演绎定理可得.

(ⅲ)因为在 $Ł_n$ 中

$$\otimes\Gamma^n\to\varphi\wedge\psi=(\otimes\Gamma^n\to\varphi)\wedge(\otimes\Gamma^n\to\psi)$$

所以有

$$\begin{aligned}&gr_C(\Gamma|\sim\varphi\wedge\psi)\\&=\tau_C(\otimes\Gamma^n\to\varphi\wedge\psi)\\&=\tau_C((\otimes\Gamma^n\to\varphi)\wedge(\otimes\Gamma^n\to\psi))\\&=\tau_C(\otimes\Gamma^n\to\varphi)+\tau_C(\otimes\Gamma^n\to\psi)-\tau_C((\otimes\Gamma^n\to\varphi)\\&\quad\vee(\otimes\Gamma^n\to\psi))\\&\geq\alpha+\beta-1\end{aligned}$$

(ⅳ)一方面,由$(\otimes\Gamma^n\to\varphi)\to(\otimes\Gamma^n\to\varphi\vee\psi)$,$(\otimes\Gamma^n\to\psi)\to(\otimes\Gamma^n\to\varphi\vee\psi)$是 $Ł_n$ 中的定理及命题 4(ⅴ)可知,$gr_C(\Gamma|\sim\varphi\vee\psi)\geq gr_C(\Gamma|\sim\varphi)$以及 $gr_C(\Gamma|\sim\varphi\vee\psi)\geq gr_C(\Gamma|\sim\psi)$. 所以 $gr_C(\Gamma|\sim\varphi\vee\psi)\geq\alpha\vee\beta$.

另一方面,由$(\otimes\Gamma^n\to\varphi)\vee(\otimes\Gamma^n\to\psi)\to(\otimes\Gamma^n\to\varphi\vee\psi)$是 $Ł_n$ 中的定理以及命题 4(ⅵ)可知,$gr_C(\Gamma|\sim\varphi\vee\psi)\geq\alpha+\beta-1$. 所以 $gr_C(\Gamma|\sim\varphi\vee\psi)\geq\max(\alpha+\beta-1,\alpha\vee\beta)$.

(ⅴ)可由$(\otimes\Gamma^n\to\psi)\to((\otimes\Gamma^n)\otimes(\otimes\Sigma^n)\to\psi)$及

$(\otimes\Sigma^n\to\psi)\to((\otimes\Gamma^m)\otimes(\otimes\Sigma^n)\to\psi)$ 是 $Ł_n$ 中的定理及命题4(ⅴ)可得.

(ⅵ)若 $gr_C(\Gamma\mid\sim\bar{0})=1$,则由命题4(ⅱ)可知. $\otimes\Gamma^m\to\bar{0}$ 是 $Ł_n$ 中的重言式,由广义演绎定理可知 $\Gamma\mid-\bar{0}$, Γ 是不相容命题集. 若 $gr_C(\Gamma\mid\sim\bar{0})\neq1$,则 $\bar{0}$ 不是 Γ 的结论,Γ 是相容命题集.

5 总结

本文将模糊集间的 Camberra 距离引入到了多值 Łukasiewicz 逻辑系统的研究中,通过模糊集间 Camberra-距离定义了公式间的 Camberra-距离、Camberra-相似度与 Camberra-真度的概念,给出了 Camberra-距离、Camberra-真度的一些基本性质. 证明了在三值 Łukasiewicz 逻辑度量空间 $(F(S),\rho_C)$ 中没有孤立点,并且每一个球形领域都是不相容理论等结果. 那么在更为复杂的 n 值逻辑系统中这些性质是否还成立,以及在其它逻辑系统中如何开展类似于本文的论述都是值得去探讨的一个问题.

参考文献

[1] 周红军,王国俊. Borel 型概率计量逻辑[J]. 中国科学:信息科学,2011,41(11):1328-1342.
ZHOU Hong-jun, WANG Guo-jun. Borel probabilistic quantitative logic[J]. Science China:Information Science, 2011,41(11):1328-1342. (in Chinese)

[2] 周红军,折延宏. Łukasiewicz 命题逻辑中命题的 choquet 积分真度理论[J]. 电子学报,2013,42(12):2327-2333.
ZHOU Hong-jun, SHE Yan-hong. Theory of choquet integral truth degrees of propositions in Łukasiewicz propositional logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 42(12): 2327-2333. (in Chinese)

[3] WANG Guo-jun, FU Li, SONG Jian-she. Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic[J]. Science in China (Series A), 2002, 45(9):1106-1116.

[4] LI Bi-jing, WANG Guo-jun. Theory of truth degrees of formulas in Łukasiewicz n-valued propositional logic and a limit theorem[J]. Science in China (Series F), 2005, 48(6):727-738.

[5] 李俊,王国俊. 逻辑系统 L_n^* 中命题的真度理论[J]. 中国科学(E辑),2006,36(6):631-643.
LI Jun, WANG Guo-jun. Theory of truth degrees of proposition in logic sysem L_n^*[J]. Sciencein China (E), 2006, 36(6):631-643. (in Chinese)

[6] 时慧娴,王国俊. 多值模态逻辑的计量化方法[J]. 软件学报,2012,23(12):3083-3087.
SHI Hui-xian, WANG Guo-jun. Quantitative method for multi-value modal logics[J]. Journal of Software, 2012, 23(12):3083-3087. (in Chinese)

[7] 王国俊. 一类一阶逻辑公式中的公理化真度理论及其应用[J]. 中国科学(F),2012,42(5):648-662.
WANG Guo-jun. Axiomatic theory of truth degree for a class of first-order formulas and its application[J]. Science in China (F), 2012, 42(5):648-662. (in Chinese)

[8] WANG Guo-jun, ZHOU Hong-jun. Quantitative logic[J]. Information Science, 2009, 179(3):226-247.

[9] 李骏,邓富喜. n 值 S-MTL 命题逻辑系统中公式真度的统一理论[J]. 电子学报,2011,39(8):1864-1868.
LI Jun, DENG Fu-gui. Unified theory of truth degrees in n-valueds-MTL propositional logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(8):1864-1868. (in Chinese)

[10] 李骏,姚锦涛. 命题逻辑系统 SMTL 中公式的积分真度理论[J]. 电子学报,2013,41(5):878-883.
LI Jun, YAO Jin-tao. Theory of integral truth degrees of formula in SMTL propositional logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(5):878-883. (in Chinese)

[11] 周红军. 概率计量逻辑及其应用[M]. 北京:科学出版社,2015.

[12] 雷英杰,赵杰,等. 直觉模糊集理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2014.

[13] 陈水利,李敬功,王向公. 模糊集理论及其应用[M]. 北京:科学出版社,2005.

[14] Roser J B, Turquette A R. Many-Valued Logic[M]. Amsterdam: North-Holland, 1952.

[15] Pavelka J. logic: I-III[J]. On Fuzzy Zeitschrift Für Mathematische Logic and Grundlagen Mathematik, 1979, 25(2):45-52;119-134;447-464.

[16] Adams E W. A Prime of Probability Logic[M]. Stanford: CSLIPublications, 1998.

[17] Dubois D, Prade H. Possibility theory, probability theory and multiple-valued logics: a clarification[J]. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 2001, 32(1-4): 35-66.

[18] 王国俊. 修正的 KLeene 系统中的 $\sum$-α-重言式理论[J]. 中国科学(E辑),1998,28(2):146-152.
WANG Guo-jun. The theory of $\sum$-α-tautologies in the revised Kleene system[J]. Science in China (Series E), 1998, 28(2):146-152. (in Chinese)

[19] 王庆平,王国俊. 多值 Łukasiewicz 逻辑公式的范数表示和计数问题[J]. 软件学报,2013,24(3):433-453.
WANG Qing-ping, WANG Guo-jun. Normal form of Łukasiewicz logic formula and related counting problems[J]. Journal of Software, 2013, 24(3): 433-453. (in Chinese)

[20] 折延宏,王国俊. 三值命题逻辑系统 L_3^* 逻辑理论性态的拓扑刻画[J]. 数学学报,2009,52(6):1225-1235.
SHE Yan-hong, WANG Guo-jun. Topological characterizations of properties of logic theories in three-valued

propositional logic system L_3^* [J]. 2009, 52(6): 1225 - 1235. (in Chinese)

作者简介

赵　彬　男. 1965 年 10 月出生,陕西宝鸡人. 1993 年在四川大学获理学博士学位. 现为陕西师范大学教授、博士生导师. 主要从事格上拓扑、非经典数理逻辑等方面的研究.

E-mail:zhaobin@ snnu. edu. cn

于　鹏(通讯作者)　男. 1981 年 7 月出生,宁夏永宁人. 2007 年毕业于陕西师范大学数学与信息科学学院,进入陕西科技大学工作. 现为陕西师范大学博士研究生,主要从事计量逻辑与非经典数理逻辑等方面的研究.

E-mail:yupeng@ sust. edu. cn