

# 抗噪鲁棒性可分级的稀疏阵列 频率和到达角估计

黄翔东<sup>1,2</sup>, 杨琳<sup>1</sup>, 杨孟凯<sup>1</sup>, 黄光明<sup>2</sup>

(1. 天津大学电气自动化与信息工程学院, 天津 300072; 2. 电子信息控制重点实验室, 四川成都 610036)

**摘要:** 为提高空时域欠采样下的入射信号的频率和到达角估计器的抗噪鲁棒性, 本文提出从改善联合估计器的两个基本问题入手解决此难题. 在阵元排列与配置方面, 构造仅包含3个阵元的互素松弛阵列, 并且根据面向鲁棒性余数系统要求配置阵元间距; 在频率和到达角参数重构算法的设计方面, 本文用面向鲁棒性余数系统的重构方法替换了中国余数定理重构算法, 并对抗噪鲁棒性调节机理做了深入详细的分析. 仿真结果表明: 经过以上两方面根本性的改进, 本文提出的抗噪鲁棒性可分级的联合估计器, 在无需增加硬件复杂度和系统成本的前提下, 无论在频率估计还是到达角估计方面, 其抗噪鲁棒性的信噪比阈值改善均可达到9dB以上. 因而在雷达、遥感等被动感知领域具有较广阔的应用前景.

**关键词:** 信号处理; 欠采样; 到达角估计; 频率估计; 抗噪鲁棒性; 互素松弛阵列

**中图分类号:** TN911.72      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2019)01-0122-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2019.01.016

## Antinoise Robustness Scalable Joint Estimation of Frequency and DOA for Sparse Arrays

HUANG Xiang-dong<sup>1,2</sup>, YANG Lin<sup>1</sup>, YANG Meng-kai<sup>1</sup>, HUANG Guang-ming<sup>2</sup>

(1. School of Electrical and Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

2. Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, Chengdu, Sichuan 610036, China)

**Abstract:** To improve the antinoise robustness of frequency and direction of arrival in the temporal-spatial undersampling case, this paper presents two aspects of improvements. On one hand, in the configuration of sparse array arrangement, this paper constructs a relaxed coprime sparse array consisting of 3 sensors, whose element spacings are configured in terms of TRRNS (Towards Robustness in Residue Number System) reconstruction algorithm; On the other hand, in the design of recovery algorithm, the original CRT (Chinese Remainder Theorem) based algorithm is replaced by the TRRNS algorithm, from which the mechanism of the anti-noise robustness scalable adjustment will be derived and verified by numerical simulations. Compared to the original CRT based joint estimator, the proposed estimator at least achieves 9dB improvement of the SNR threshold without increasing the hardware complexity and system cost, which presents vast applications in radar, remote sensing and other passive sensing fields.

**Key words:** signal processing; undersampling; direction of arrival estimation; frequency estimation; antinoise robustness; relaxed coprime array

### 1 引言

频率和到达方位角 (direction of arrival, DOA) 是雷达<sup>[1]</sup>、无线通信<sup>[2,3]</sup>等被动目标感知领域<sup>[4,5]</sup>中两个重要物理量, 其估计难度随着频率升高加大. 这就导致了

两个突出问题: 第一, 空间域奈奎斯特采样定理要求天线阵元间距尺寸不大于信号半波长, 则该尺寸必将随频率升高而缩小, 这必然加重阵元间耦合效应; 第二, 时间域奈奎斯特采样定理要求采样速率不低于两倍信号最高频率, 故随着频段的升高, 现有的模数转换器 (ana-

log to digital converter, ADC) 的采样率和功耗均达不到要求。

基于时、空欠采样的频率和 DOA 联合估计方案是该问题的解决途径, 这需考虑两方面: 一是稀疏阵元排列与配置, 二是参数重构算法的设计。

在稀疏阵元排列与配置方面, 早期的最小空洞阵列<sup>[6]</sup>、最小协同阵列<sup>[7]</sup>因其阵列结构不具有闭合形式而难以工程应用。近年来, Vaidyanathan 提出了互素阵列(coprime array)<sup>[8-10]</sup>及其改进版本<sup>[11]</sup>和稀疏嵌套阵列<sup>[12-14]</sup>, 但仍无法从根本上消除阵元间耦合。基于互素阵列, 文献[15]、文献[6~11]仅涉及了 DOA 估计, 并没讨论频率估计; 而文献[16]的基于贝叶斯学习的 DOA 估计法, 仅仅是其估计算法涉及稀疏模型的转化, 但其阵列模型仍采用密集阵列。

在频率和 DOA 参数重构算法的设计方面, 文献[17]基于互素稀疏阵列, 首次将中国余数定理<sup>[18]</sup>(Chinese Remainder Theorem, CRT) 引入到时空欠采样下的频率与 DOA 联合估计中, 但是该算法耗费较多的快拍数据, 且处理效率不高; 为提高效率, 笔者在文献[19]提出单次空时域并行欠采样下的频率和到达角联合估计算法, 该算法用单次欠采样替代多次欠采样, 用闭式鲁棒 CRT<sup>[20]</sup>替代基于搜索的 CRT, 提高了数据处理效率, 但该估计算法仍存在抗噪鲁棒性不高的问题。实际应用中, 抗噪鲁棒性其实是比估计精度更重要的指标。因而迫切需要研发出可改善抗噪鲁棒性的算法。

文献[21]提出面向鲁棒性的余数系统(Towards Robustness in Residue Number System, TRRNS)。该重构与 CRT 区别在于: 仅需给定一对模值和一对余数(即重构通道数  $L=2$ ) 即可实现重构, 而且可根据需要“定制”出不同级的重构鲁棒性。从中可获得如下启发: 无需增加硬件成本, 仅根据 TRRNS 可分级鲁棒性要求, 对阵元间距、采样速率的配置做简单修改, 用 TRRNS 重构算法取代闭式 CRT 重构算法即可改善鲁棒性, 从而根本解决以上两方面问题, 本文将证明该结论。

## 2 松弛互素阵列

本文估计器采用松弛互素阵列如图 1 所示。

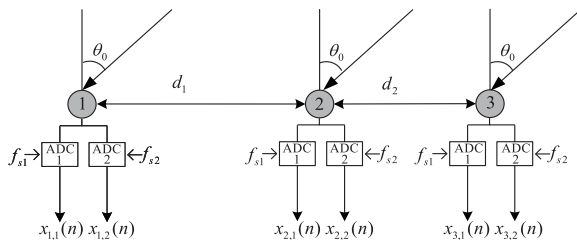


图1 松弛互素稀疏阵列结构

令入射信号  $f_0$  的最高频率为  $f_{\max}$ , 则单位波长  $\lambda = c/f_{\max}$  ( $c$  代表光速)。图 1 中的松弛互素阵列仅包括  $L=3$  个阵元, 其阵元间距  $d_l$  设置如下:

$$d_1 = \beta\Gamma_2\lambda, d_2 = \beta\Gamma_1\lambda \quad (1)$$

式(1)的  $\Gamma_1, \Gamma_2$  互为素数,  $\beta \in (0, 1]$ 。该式表明: 适当设定  $\beta, \Gamma_1, \Gamma_2$  值可使得  $d_1, d_2 \gg \lambda/2$ , 即保证该阵列稀疏度远高于文献[8~10]的互素阵列情况。

另外, 图 1 的每个阵元配有两个 ADC 采样器, 其采样率  $f_{s1}, f_{s2}$  设置如下:

$$f_{s1} = M_f\eta_1, f_{s2} = M_f\eta_2 \quad (2)$$

其中  $\eta_1, \eta_2$  是互素整数,  $M_f$  是快拍数。对其适度设置, 可使  $f_{s1}, f_{s2} \ll f_0$ , 从而保证时间域高度欠采样。

## 3 频率和 DOA 估计原理及重构流程

### 3.1 频率估计模型及 TRRNS 重构

不妨将第  $l$  个阵元上的接收信号表示为

$$x_l(t) = A_0 \exp(j2\pi f_0 t + j\varphi_l) + \xi_l(t), l=1, 2, 3 \quad (3)$$

其中  $\varphi_l$  表示到达阵元的信号相位,  $\xi_l(t)$  表示零均值高斯白噪。将  $t = n/f_{s1}, t = n/f_{s2}$  代入式(3), 可得两个长度均为  $M_f$  的序列

$$x_{l,1}(n) = A_0 e^{j(2\pi n \frac{f_0}{f_{s1}} + \varphi_l)} + \zeta_1(n) \\ x_{l,2}(n) = A_0 e^{j(2\pi n \frac{f_0}{f_{s2}} + \varphi_l)} + \zeta_2(n), n=0, \dots, M_f-1 \quad (4)$$

由于欠采样,  $f_0/f_{s1}$  和  $f_0/f_{s2}$  都远大于 1, 从而有

$$\begin{cases} f_0 = n_1 \tilde{M}_1 + \tilde{r}_1 = n_1 \tilde{M}_1 + \tilde{f}_{0,1} \tilde{M}_1 \\ f_0 = n_2 \tilde{M}_2 + \tilde{r}_2 = n_2 \tilde{M}_2 + \tilde{f}_{0,2} \tilde{M}_2 \end{cases}, 0 \leq \tilde{f}_{0,1}, \tilde{f}_{0,2} < 1 \quad (5)$$

式(5)完全符合 TRRNS 模型, 其中  $\tilde{M}_1, \tilde{M}_2$  为模值,  $\tilde{r}_1 = \tilde{f}_{0,1} \tilde{M}_1, \tilde{r}_2 = \tilde{f}_{0,2} \tilde{M}_2$  为余数,  $n_1, n_2$  为折叠整数。

借助 Tsui 校正器<sup>[19]</sup>可算出两个归一化频率估计值  $\tilde{f}'_{0,1}, \tilde{f}'_{0,2}$ , 进一步将模值  $\{\tilde{M}_1, \tilde{M}_2\}$ 、余数  $\{\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\}$  以及后面提及的鲁棒性分级参数  $j_f$  代入后面详列的 TRRNS 重构过程, 可确定折叠整数  $n_1, n_2$ , 从而该阵元上频率估计为

$$\hat{f}_0^l = [(n_1 + \tilde{f}'_{0,1}) \tilde{M}_1 + (n_2 + \tilde{f}'_{0,2}) \tilde{M}_2] / 2 \quad (6)$$

利用 Tsui 校正器的频率校正结果  $\tilde{f}'_{0,1}, \tilde{f}'_{0,2}$  和幅值和相位校正结果  $\{\hat{\varphi}_{l,1}, \hat{A}_{l,1}\}$  和  $\{\hat{\varphi}_{l,2}, \hat{A}_{l,2}\}$ , 按下式做平均可构造向量  $\hat{\mathbf{z}}_l$ , 取其相角可获得相位估计  $\hat{\varphi}_l$ , 即

$$\hat{\mathbf{z}}_l = (\hat{A}_{l,1} e^{j\hat{\varphi}_{l,1}} + \hat{A}_{l,2} e^{j\hat{\varphi}_{l,2}}) / 2, \hat{\varphi}_l = \text{ang}(\hat{\mathbf{z}}_l) \quad (7)$$

进一步对各阵元估出的  $\hat{f}_0^l$  做平均即可得最终频率估计  $\hat{f}_0$  (相应入射波长估计为  $\hat{\lambda}_0 = c/\hat{f}_0$ )。

### 3.2 DOA 估计模型及 TRRNS 重构

假设远场窄带信号  $s_0(t)$  以角度  $\theta_0$  入射到图 1 稀疏阵列天线上, 则相邻阵元理论相位差为

$$\Delta\bar{\varphi}_l = \varphi_l - \varphi_{l+1} = (2\pi d_l \sin\theta_0) / \lambda_0, l=1, 2 \quad (8)$$

高度稀疏阵元布置使得  $\Delta\bar{\varphi}_l$  包含  $2\pi$  整周模糊, 即

$$\Delta\bar{\varphi}_l = 2\pi n_l + \Delta\varphi_l, l=1, 2 \quad (9)$$

其中  $n_l$  表示未知整数,  $\Delta\hat{\varphi}_l$  由式(7)算出的观测相位  $\hat{\varphi}_l, \hat{\varphi}_{l+1}$  估计得到, 对其差值做模除  $2\pi$  后, 即可得到期望的处于  $(0, 2\pi]$  范围内的相位差, 即

$$\Delta\hat{\varphi}_l = (\hat{\varphi}_{l+1} - \hat{\varphi}_l) \bmod 2\pi \quad (10)$$

联立式(1)、式(8)、式(9)、式(10)有

$$\frac{\beta\lambda\Gamma_1\Gamma_2\sin\theta_0}{\lambda_0} = n_l \cdot \Gamma_l + \frac{\Delta\hat{\varphi}_l}{2\pi} \cdot \Gamma_l, l=1, 2 \quad (11)$$

进而令

$$\bar{d} = \beta\lambda\Gamma_1\Gamma_2M_\theta, \quad N = \frac{\bar{d}\sin\theta_0}{\lambda_0}, \quad (12)$$

$$M_l = M_\theta\Gamma_l, \quad \hat{r}_l = \frac{\Delta\hat{\varphi}_l}{2\pi} \cdot M_\theta\Gamma_l$$

式(12)中的  $M_\theta$  为待定整数, 用于确保 DOA 估计具有足够高的鲁棒性. 进而联立式(11)、式(12), 有

$$\begin{cases} N = n_1M_1 + \hat{r}_1 \\ N = n_2M_2 + \hat{r}_2 \end{cases} \quad (13)$$

式(13)也完全符合面向鲁棒性余数系统模型<sup>[21]</sup>, 其中  $\{M_1, M_2\}, \{\hat{r}_1, \hat{r}_2\}$  为余数, 将  $\{M_1, M_2\}, \{\hat{r}_1, \hat{r}_2\}$  以及后面要提及的鲁棒分级参数  $j_b$  代入 TRRNS 重构流程(详见第 5 节), 即可确定式(13)的折叠整数  $\{n_1, n_2\}$ , 从而获得重构值  $\hat{N}$ . 进而将  $\hat{N}$ 、波长估计值  $\hat{\lambda}_0$  代入式(12), 可得最终到达方位角估计

$$\hat{\theta}_0 = \sin^{-1}(\hat{N}\hat{\lambda}_0/\bar{d}) \quad (14)$$

### 3.3 联合估计器总流程

综上所述, 本文提出的空时欠采样下入射信号的频率和到达角联合估计器的流程如图 2 所示.

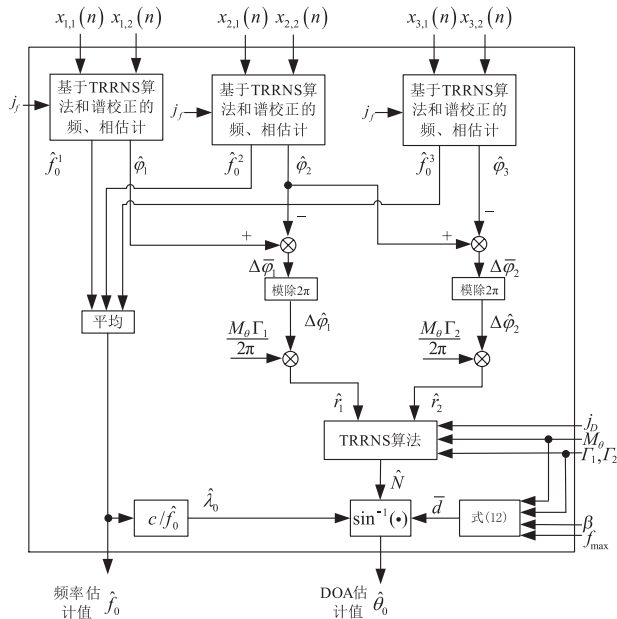


图2 抗噪鲁棒性可分级的频率和到达角联合估计流程图

需指出, 由于 TRRNS 算法<sup>[21]</sup>取代了 CRT 算法, 因

而图 2 增加了 3 个输入参数 ( $j_f, j_b$  和  $\beta$ ) 用于抗噪鲁棒性调节. 其中参数  $j_f$  与互素整数对  $\{\eta_1, \eta_2\}$  配合, 用于调节频率估计的抗噪鲁棒性; 而参数  $j_b$  与互素整数对  $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$  配合, 用于调节 DOA 估计的抗噪鲁棒性; 下面给出鲁棒性参数调节机理.

## 4 抗噪鲁棒性调节机理

### 4.1 TRRNS 重构的鲁棒性分级

注意到式(5)的频率重构模型和式(13)的 DOA 重构模型可统一写成如下形式

$$\begin{cases} N = n_1M_1 + r_1 \\ N = n_2M_2 + r_2 \end{cases} \quad (15)$$

其中  $M_1 = mY_1, M_2 = mY_2$  ( $Y_1, Y_2$  为互素整数对). TRRNS 重构的特点体现在: 允许通过降低  $N$  的重构上限, 来换取两个余数  $r_1, r_2$  的鲁棒性(经典 CRT 不具备该特点). 具体来说, 给定鲁棒性分级参数  $j$ , 允许实际余数  $\bar{r}_1, \bar{r}_2$  满足

$$|r_1 - \bar{r}_1| \leq \tau_j, \quad |r_2 - \bar{r}_2| \leq \tau_j \quad (16)$$

其误差容差  $\tau_j$  具有灵活性. 不妨令两素数满足  $Y_2 > Y_1$ , 文献[21]已证明余数误差容差  $\tau_j$  的值为

$$\tau_j = m\sigma_j/4 \quad (17)$$

令  $\sigma_{-1} = Y_2, \sigma_0 = Y_1$ , 其他  $\sigma_j$  值可按如下递推式算出

$$\sigma_j = \sigma_{j-2} \bmod \sigma_{j-1}, j=1, 2, \dots \quad (18)$$

$\sigma_j$  随参数  $j$ , 单调递减<sup>[21]</sup>, 且存在某整数  $J$  满足

$$\sigma_1 > \dots > \sigma_J = 1 \quad (19)$$

例如, 令  $m=2, Y_1=19, Y_2=31$ , 根据式(17), (18), (33) 则 TRRNS 重构的各鲁棒性分级参数  $j, \sigma_j$  值、余数误差容差  $\tau_j$  和重构上限  $N_{\max}^j$  如表 1 所示.

表 1 鲁棒边界和重构范围

鲁棒分级参数 $j$	$\sigma_j$	余数误差容差 $\tau_j$	重构范围 $[0, N_{\max}^j]$
$j=1$	12	6	$0 \leq N \leq 76$
$j=2$	7	3.5	$0 \leq N \leq 124$
$j=3$	5	2.5	$0 \leq N \leq 190$
$j=4$	2	1	$0 \leq N \leq 496$
$j=5$	1	0.5	$0 \leq N \leq 1178$

从表 1 可看出: 余数误差容差  $\tau_j$  越大, 重构范围就越小, 可通过设置  $j$  对两者做折中 (CRT 重构仅对应表 1 中  $j=J$  的情况, 即鲁棒性最差的情况).

### 4.2 频率估计的鲁棒性分级设置

用式(2)的快拍数  $M_f$ , 素数对  $\{\eta_1, \eta_2\}$  分别替换 TRRNS 的  $m$  值、 $\{Y_1, Y_2\}$ , 再将这些参数和给定的频率鲁棒性分级参数  $j_f$  代入式(17), (18), (33), 即可确定其余数误差容差  $\tau_j$  和频率重构上限  $f_{\max}^j$ .

### 4.3 DOA 估计的鲁棒性分级设置

与频率估计不同, DOA 估计并不是重构  $N$  值本身,

而是估算式(14)所示的有  $N$  值参与的反正弦结果. 考虑到工程应用中, 期望反正弦值域应尽量到达其上界  $\pi/2$ , 相应地则要求式(14)中的  $\hat{N}\hat{\lambda}_0/\bar{d}$  上限接近于 1. 当提高 TRRNS 重构的抗噪鲁棒性时(对应鲁棒分级参数  $j_D$  减小),  $N$  值重构上限  $N_{\max}^{j_D}$  将减小, 为维持  $\hat{N}\hat{\lambda}_0/\bar{d}$  取值接近 1, 客观上要求减小  $\bar{d}$  值, 结合式(12)可推知, 应减小  $\beta$  取值.

考虑到  $\beta \in (0, 1]$ , 因而  $\beta = 1$  对应鲁棒性最差情况(即参数  $j = J$  的情况), 这时 TRRNS 重构上限即为 CRT 上限, 从而有

$$N_{\max}^J = M_\theta \Gamma_1 \Gamma_2 \quad (20)$$

相应地, 当鲁棒性分级参数取  $j_D < J$  的整数时,  $\beta$  应取为与其重构上限  $N_{\max}^{j_D}$  成正比例的值, 即

$$\beta = \frac{N_{\max}^{j_D}}{N_{\max}^J} = \frac{N_{\max}^{j_D}}{M_\theta \Gamma_1 \Gamma_2} \quad (21)$$

例如: 令  $m = 2, Y_1 = 19, Y_2 = 31$ , 根据式(17), (18)可推知 DOA 重构共有  $J = 5$  个鲁棒级别, 其对应的 TRRNS 重构上限  $N_{\max}^{j_D}$  及  $\beta$  取值如表 2 所示.

表 2  $\beta$  取值与鲁棒级别参数  $j_D$  对应关系 ( $J = 5$ )

$j_D$	1	2	3	4	5
$\sigma_{j_D}$	12	7	5	2	1
$N_{\max}^{j_D}$	76	124	190	496	1178
$\beta$	76/1178	124/1178	190/1178	496/1178	1178/1178

从表 2 可发现:  $j_D$  越小(即抗噪鲁棒性越高),  $\beta$  取值就越小, 阵元间距  $d_1 = \beta \Gamma_2 \lambda, d_2 = \beta \Gamma_1 \lambda$  也越小(即 DOA 估计的抗噪鲁棒性与阵列稀疏度成反比).

## 5 面向鲁棒性余数系统 (TRRNS) 重构流程

基于式(15)模型, 给定余数  $\hat{r}_1, \hat{r}_2$  和鲁棒性分级参数  $j$ . 从文献[21]可总结如下流程以重构整数  $\hat{N}$ .

**初始化:** 确定鲁棒总分级数  $J$ : 令  $\sigma_{-1} = Y_2, \sigma_0 = Y_1$ . 令  $i = 1$ , 将  $i$  逐步加 1, 递推算出  $\sigma_i = \sigma_{i-2} \bmod \sigma_{i-1}$ , 直至满足  $\sigma_i = 1$  为止, 将该  $i$  赋给  $J$ , 并记录  $\sigma_1, \dots, \sigma_J$ .

**步骤 1** 计算  $\hat{n}_{2,j}, \hat{n}_{1,j}$

当  $J = 1$  时,  $\hat{n}_{1,1} = Y_2 - 1, \hat{n}_{2,1} = Y_1 - 1$ ;

当  $J \geq 2$  时, 若  $J = 1$ , 有  $\hat{n}_{2,J} = Y_1 - 1, \hat{n}_{1,J} = Y_2 - 1$ . 若  $1 \leq j \leq J - 1, \hat{n}_{2,j}$  计算如式(22)

$$\hat{n}_{2,j} = \begin{cases} \lfloor \frac{Y_1}{\sigma_1} \rfloor, & j = 1 \\ \lfloor \frac{Y_1}{\sigma_1} \rfloor \lfloor \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \rfloor, & j = 2 \\ \lfloor \frac{\sigma_{2p}}{\sigma_{2p+1}} \rfloor (\hat{n}_{2,2p} + 1) + \hat{n}_{2,2p-1}, & j = 2p + 1 \text{ 且 } p \geq 1 \\ \lfloor \frac{\sigma_{2p+1}}{\sigma_{2p+2}} \rfloor \hat{n}_{2,2p+1} + \hat{n}_{2,2p}, & j = 2p + 2 \text{ 且 } p \geq 1 \end{cases} \quad (22)$$

相应地,  $\hat{n}_{1,j}$  计算如式(23)

$$\hat{n}_{1,j} = \begin{cases} \lfloor \frac{Y_2}{Y_1} \rfloor \lfloor \frac{Y_1}{\sigma_1} \rfloor, & j = 1 \\ \lfloor \frac{Y_2}{Y_1} \rfloor \lfloor \frac{Y_1}{\sigma_1} \rfloor \lfloor \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \rfloor + \lfloor \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \rfloor + \lfloor \frac{Y_2}{Y_1} \rfloor, & j = 2 \\ \lfloor \frac{\sigma_{2p}}{\sigma_{2p+1}} \rfloor \hat{n}_{1,2p} + \hat{n}_{1,2p-1}, & j = 2p + 1 \text{ 且 } p \geq 1 \\ \lfloor \frac{\sigma_{2p+1}}{\sigma_{2p+2}} \rfloor (\hat{n}_{1,2p+1} + 1) + \hat{n}_{1,2p}, & j = 2p + 2 \text{ 且 } p \geq 1 \end{cases} \quad (23)$$

其中“ $\lfloor \cdot \rfloor$ ”表示向下取整.

**步骤 2** 利用  $\hat{n}_{1,j}, \hat{n}_{2,j}$  构造出如下两个集合

$$S_1 = \{tY_1 \bmod Y_2 : t = 0, \dots, \hat{n}_{1,j}\} \quad (24)$$

$$S_2 = \{tY_2 \bmod Y_1 : t = 0, \dots, \hat{n}_{2,j}\} \quad (25)$$

**步骤 3** 确定折叠整数  $\hat{n}_1, \hat{n}_2$ , 先计算  $q_{21} = (\hat{r}_1 - \hat{r}_2)/m$ , 对  $q_{21}$  展开如下讨论:

(1) 若  $q_{21} \geq \sigma_j/2$ , 在集合  $S_2$  中若能找到满足下列条件的元素  $x$

$$-\frac{\sigma_j}{2} \leq q_{21} - x \leq \frac{\sigma_j}{2}, \quad x \in S_2 \quad (26)$$

则令  $s_2 = x$ , 否则令  $s_2$  为集合  $S_2$  中与  $q_{21}$  距离最近的元素, 即  $s_2 = \arg \min_{x \in S_2} |q_{21} - x|$ . 进而确定  $\hat{n}_1, \hat{n}_2$

$$\hat{n}_2 \equiv s_2 \bar{Y}_{21} \bmod Y_1 \quad (27)$$

$$\hat{n}_1 = \left\lfloor \frac{\hat{n}_2 M_2 + \hat{r}_1 - \hat{r}_2}{M_1} \right\rfloor \quad (28)$$

其中  $\bar{Y}_{21}$  是  $Y_2$  模除  $Y_1$  的模逆, 即  $1 \equiv Y_2 \bar{Y}_{21} \bmod Y_1$ , 而“ $\lfloor \cdot \rfloor$ ”表示四舍五入取整运算.

(2) 若  $q_{21} < \sigma_j/2$ , 在集合  $S_1$  中若能找到满足下列条件的元素  $y$

$$-\frac{\sigma_j}{2} \leq q_{21} + y \leq \frac{\sigma_j}{2}, \quad y \in S_1 \quad (29)$$

则令  $s_1 = y$ . 否则令  $s_1$  为集合  $S_1$  中与  $q_{21}$  距离最近的元素, 即  $s_1 = \arg \min_{y \in S_1} |q_{21} - y|$ . 进而确定  $\hat{n}_1, \hat{n}_2$

$$\hat{n}_1 \equiv s_1 \bar{Y}_{12} \bmod Y_2 \quad (30)$$

$$\hat{n}_2 = \left\lfloor \frac{\hat{n}_1 M_1 + \hat{r}_1 - \hat{r}_2}{M_2} \right\rfloor \quad (31)$$

其中  $\bar{Y}_{12}$  是  $Y_1$  模除  $Y_2$  的模逆, 即  $1 \equiv Y_1 \bar{Y}_{12} \bmod Y_2$ .

(3) 若  $-\sigma_j/2 \leq q_{21} < \sigma_j/2$ , 则令  $\hat{n}_1 = \hat{n}_2 = 0$ .

**步骤 4** 根据折叠整数  $\hat{n}_1, \hat{n}_2$  算出最终的重构结果  $\hat{N}$

$$\hat{N} = \frac{1}{2} [(\hat{n}_1 M_1 + \hat{r}_1) + (\hat{n}_2 M_2 + \hat{r}_2)] \quad (32)$$

**注:** 给定鲁棒分级参数  $j$ , 其重建值  $\hat{N}$  的重构上限为

$$N_{\max}^j = \min(mY_2(1 + \hat{n}_{2,j}), mY_1(1 + \hat{n}_{1,j})) \quad (33)$$

## 6 数值仿真

### 6.1 不同抗噪鲁棒级的频率估计性能比较

将图 1 阵列时域欠采样参数设置如下: 每阵元 ADC 快拍数  $M_f = 1024$ , 素数对  $\{\eta_1, \eta_2\} = \{7101, 7106\}$  (即欠采样速率  $\{f_{s1}, f_{s2}\} = \{7.271424, 7.276544\}$  MHz), 将  $M_f, \{\eta_1, \eta_2\}$  替换 TRRNS 的  $m$  和  $\{Y_1, Y_2\}$ , 根据式(17)、(18)可算出总分级鲁棒数  $J=2$ . 令频率鲁棒性分级参数  $j_f=1$  和  $j_f=2$ , 根据式(33)算出频率重构上限为  $f_{\max}^1 = 10.33\text{GHz}$ ,  $f_{\max}^2 = 51.67\text{GHz}$ . 不妨令  $f_{\max} = 10\text{GHz}$ , 则单位波长  $\lambda = c/f_{\max} = 3\text{cm}$ .

将式(3)的参数设置为:  $f_0 = 8\text{GHz}$  (波长  $\lambda_0 = 3.75\text{cm}$ ),  $A_0 = 2$ ,  $\varphi_0 = 100^\circ$ ; 设置信噪比测试区间为  $\text{SNR} \in [-25, 5]\text{dB}$ , 对每种 SNR 条件进行 2000 次蒙特卡洛测试, 分别用基于闭式 CRT 的鲁棒性不可分级算法和本文方法估计频率. 若某次测量误差  $|\hat{f}_0 - f_0| < f_0/1000$ , 则视为检测成功, 否则视为失败. 图 3 给出两种频率估计器的检测成功率曲线.

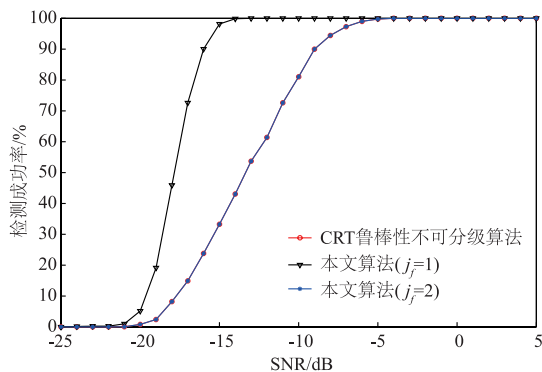


图3 频率检测成功率

如图 3 所示, 对于基于 CRT 的鲁棒性不可分级算法 ('○' 标记), 其检测成功率达到 100% 的信噪比阈值为  $\text{SNR} = -6\text{dB}$ ; 而该曲线与鲁棒性分级参数  $j_f=2$  的本文算法的测试曲线 ('\*' 标记) 完全重合 (因 CRT 重构即为特殊情况  $j=J$  时的 TRRNS 重构所致), 而鲁棒性分级参数  $j_f=1$  所对应的测试曲线 ('▽' 标记) 的信噪比阈值则为  $\text{SNR} = -15\text{dB}$ , 相比于  $j_f=2$  情况降低了约 9dB, 故改善了抗噪鲁棒性.

### 6.2 不同抗噪鲁棒级的 DOA 估计性能比较

令入射波到达角  $\theta_0 = 40^\circ$ , 在 5.1 节的时域欠采样参数设置的基础上, 对式(12)的空域欠采样参数做如下设置:  $M_\theta = 2$ , 互素整数对  $\{\Gamma_1, \Gamma_2\} = \{13, 22\}$ , 将  $M_\theta, \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$  替换 TRRNS 的  $m$  和  $\{Y_1, Y_2\}$ , 根据式(17)、(18)可算出总分级鲁棒数  $J=3$ . 令鲁棒分级参数  $j_D=1, 2, 3$ , 根据式(33), 即可算出 TRRNS 重构上限  $\{N_{\max}^1, N_{\max}^2, N_{\max}^3\} = \{52, 132, 572\}$ , 结合式(21)可算出  $\beta$  值分别为 0.10、

0.23、1, 进而可算出阵元间距  $\{d_1, d_2\} = \{\beta\Gamma_2\lambda, \beta\Gamma_1\lambda\}$  分别为  $[4.4, 2.6]\lambda/2, [10.1, 6.0]\lambda/2, [44, 26]\lambda/2$ .

仍在  $\text{SNR} \in [-25, 5]\text{dB}$  的测试区间内进行蒙特卡洛测试, 若某次测试的 DOA 测量误差满足  $|\hat{\theta}_0 - \theta_0| < 1.5^\circ$ , 则视为检测成功, 否则视为失败. 图 4 分别给出了两种估计器的检测成功率曲线.

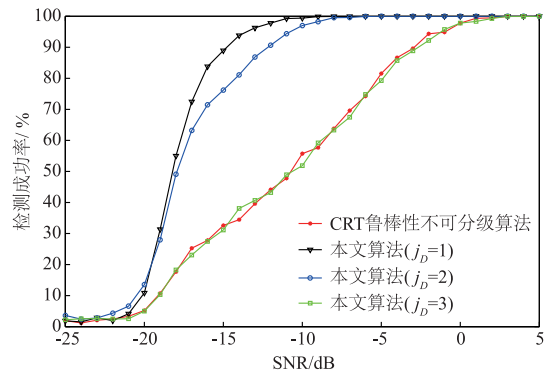


图4 到达角 (DOA) 检测成功率

如图 4 所示, 对于基于 CRT 的鲁棒性不可分级算法的测试曲线 ('\*' 标记), 其 DOA 检测成功的信噪比阈值为  $\text{SNR} = 0\text{dB}$ ; 而对于本文算法, 其鲁棒分级参数  $j_D=3$  所对应的测试曲线 ('□' 标记) 与 CRT 重构情况的曲线重合,  $j_D=2$  和  $j_D=1$  所对应的测试曲线 (分别以 '○'、'▽' 标记) 的信噪比阈值分别为  $\text{SNR} = -9\text{dB}$ 、 $\text{SNR} = -10\text{dB}$ , 即其抗噪鲁棒性相比于 CRT 不可分级情况分别提高了 9dB、10dB.

### 6.3 多种 DOA 估计器的精度、抗噪性比较

为联合揭示精度和抗噪性能, 将本文 DOA 估计器与文献[19]基于闭式 CRT 的 DOA 估计器的均方根误差 (root mean square error, RMSE) 做比较. 作为参考, 还与传统基于  $\lambda/2$  间距的均匀线性阵列 (uniform linear array, ULA) 的估计器比较 (其 DOA 估计采用经典的 MUSIC 分解方法得到). 3 种估计器的阵元个数同为  $L=3$ , 到达方位角同为  $\theta_0 = 45^\circ$ .

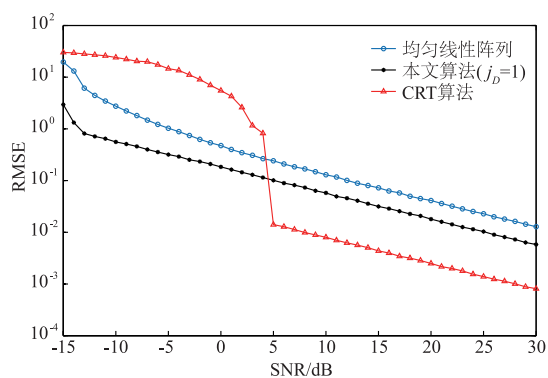
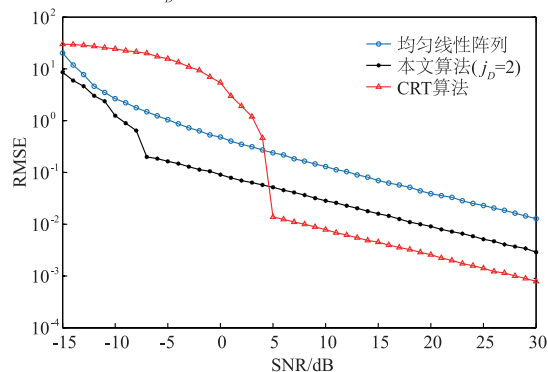
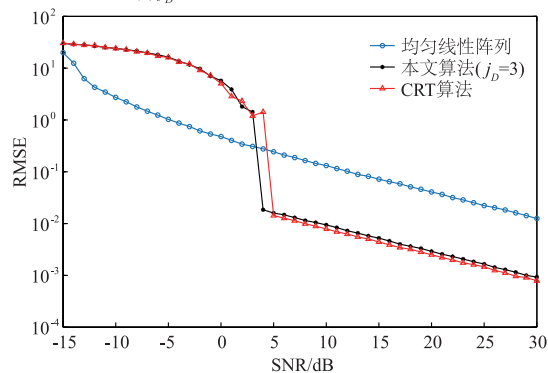
图 5(a)(b)(c) 给出鲁棒分级参数  $j_D=1, 2, 3$  时的各种 RMSE 曲线对比, 从中可得出如下结论.

(1) 对于本文估计器 ('\*' 标记), 鲁棒分级参数  $j_D=1, 2, 3$  所对应的 SNR 阈值分别为  $-13\text{dB}$ 、 $-7\text{dB}$ 、 $4\text{dB}$ , 均比 CRT 重构情况 ('△' 标记) 的 SNR 阈值 ( $5\text{dB}$ ) 要低, 故获得了更高的 DOA 抗噪鲁棒性.

(2) 本文估计器的 3 种鲁棒级别的 RMSE 曲线都高于 CRT 重构情况 (即前者的估计精度逊色于后者), 且  $j_D$  值越小, 精度降低的程度越明显. 这可看作是本文估计器获得鲁棒性改善所付出的代价.

(3) 尽管随着  $j_D$  值越小, 本文 DOA 估计器的精度会降低, 但即使是精度变成最恶劣的情况 ( $j_D=1$  情

况),其 RMSE 曲线仍低于基于传统 ULA 的 RMSE 曲线(‘○’标记).而且对于该情况,其信噪比阈值与传统 ULA 的 RMSE 曲线基本一致(同为  $\text{SNR} = -13\text{dB}$ ).这意味着本文提出的 DOA 估计器有较高应用价值:其精度比密集阵元间距的传统 ULA 估计器有所提高,但抗噪鲁棒性并没有降低,且由于采用了松弛互素稀疏阵列,相比于阵元密集放置的 ULA 情况,消除了阵元间的互耦.

(a)  $j_D=1$ 情况下的RMSE曲线对比(b)  $j_D=2$ 情况下的RMSE曲线对比(c)  $j_D=3$ 情况下的RMSE曲线对比图5 不同鲁棒分级参数  $j_D$  设置下的DOA估计对比

## 7 结论与展望

本文提出的抗噪鲁棒性可分级的稀疏阵列频率和 DOA 估计器具有两个优点:一是以  $L=3$  个阵元的松弛互素稀疏阵列作为接收装置,从而最大程度地降低了

硬件成本;二是将最新的面向鲁棒性余数系统(TR-RNS)的重构算法引入到频率和 DOA 估计中,从而大大提高了其抗噪鲁棒性和灵活性.因而具有较为广泛的应用前景.

## 参考文献

- [1] Xu L, Li J, Stoica P. Target detection and parameter estimation for MIMO radar systems [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2009, 44 (3): 927–939.
- [2] Rappaport T S. Wireless Communications: Principles and Practice [M]. Prentice Hall PTR New Jersey, 1996.
- [3] Li Y, Seshadri N, Ariyavisitakul S. Channel estimation for OFDM systems with transmitter diversity in mobile wireless channels [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1999, 17(3): 461–471.
- [4] Gustafsson F, Gunnarsson F. Positioning using time-difference of arrival measurements [A]. Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing [C]. Piscataway, NJ: IEEE, 2003. 553–556.
- [5] Poisel R. Electronic Warfare Target Location Methods [M]. Artech House, 2012.
- [6] Moffet A. Minimum-redundancy linear arrays [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2003, 16(2): 172–175.
- [7] Abajo F J, Garcia D. Colloquium: Light scattering by particle and hole arrays [J]. Review of Modern Physics, 2009, 79(4): 1267–1290.
- [8] Pal P, Vaidyanathan P P. Coprime sampling and the MUSIC algorithm [A]. Proceedings of the 2011 Digital Signal Processing and Signal Processing Education Meeting [C]. Piscataway, NJ: IEEE, 2011. 289–294.
- [9] Vaidyanathan P P, Pal P. Sparse sensing with co-prime samplers and arrays [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(2): 573–586.
- [10] Vaidyanathan P P, Pal P. Theory of sparse coprime sensing in multiple dimensions [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(8): 3592–3608.
- [11] Liu C L, Vaidyanathan P P. Remarks on the spatial smoothing step in coarray MUSIC [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(9): 1438–1442.
- [12] Pal P, Vaidyanathan P P. Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(8): 4167–4181.
- [13] Liu C L, Vaidyanathan P P. Super nested arrays: Linear sparse arrays with reduced mutual coupling-part I: Fundamentals [J]. IEEE Transactions on Signal Processing,

- 2016,64(15):3997-4012.
- [14] Liu C L, Vaidyanathan P P. Super nested arrays: Linear sparse arrays with reduced mutual coupling-part II: High-order extensions [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(16):4203-4217.
- [15] 刘亮,陶建武,黄家才. 基于稀疏对称阵列的近场源定位[J]. 电子学报, 2009, 37(6):1307-1312.  
LIU Liang, TAO Jian-wu, HUANG Jia-cai. Near-field source localization based on sparse symmetric array [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(6):1307-1312. (in Chinese)
- [16] 王彪,朱志慧,戴跃伟. 基于具有时序结构的稀疏贝叶斯学习的水声目标 DOA 估计研究[J]. 电子学报, 2016, 44(3):693-698.  
WANG Biao, ZHU Zhi-hui, DAI Yue-wei. Direction of arrival estimation research for underwater acoustic target based on sparse Bayesian learning with temporally correlated source vectors [J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(3):693-698. (in Chinese)
- [17] 梁红,张恒. 空时欠采样下多目标频率和方位联合估计新方法[J]. 西北工业大学学报, 2012, 30(5):694-698.  
LIANG Hong, ZHANG Heng. An effective method for joint estimation of frequency and DOA with sub-Nyquist spatial-temporal signals based on GRCRT for multiple numbers [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2012, 30(5):694-698. (in Chinese)
- [18] Li X, Liang H, Xia X G. A robust Chinese remainder theorem with its applications in frequency estimation from undersampled waveforms [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(11):4314-4322.
- [19] 黄翔东,刘明卓,等. 单次空时域并行欠采样下的频率和到达角联合估计[J]. 物理学报, 2017, 66(18):188401.  
HUANG Xiang-dong, LIU Ming-zhuo, et al. Joint estimation of frequency and direction of arrival under the single-parallel spatial-temporal undersampling condition [J]. Acta Physica Sinica, 2017, 66(18):188401. (in Chinese)
- [20] Wang W, Xia X G. A closed-form robust Chinese remainder theorem and its performance analysis [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(11):5655-5666.
- [21] Xiao L, Xia X G, Huo H. Towards robustness in residue number systems [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(6):1497-1510.
- [22] Qin S, Zhang Y D, Amin M G. Frequency diverse coprime arrays with coprime frequency offsets for multi-target localization [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2017, 11(2):321-335.

### 作者简介



**黄翔东** 男, 1979 年生于江西, 于 2007 年获得天津大学博士学位, 主要研究领域为滤波器设计、谱分析、信号处理算法应用等。  
E-mail: xduhuang@tju.edu.cn



**杨琳** 女, 1995 年出生于辽宁抚顺, 2017 级天津大学电气自动化与信息工程学院硕士研究生, 主要研究领域为雷达优化算法。



**杨孟凯** 男, 1992 年出生于河北沧州, 2016 级天津大学电气自动化与信息工程学院硕士研究生, 主要研究领域为谱分析、信号参数估计。