

基于 Tikhonov 正则化的 高分辨率群时延测量与计算方法

骆睿^{1,2}, 刘莉^{1,2}, 佟瑞¹, 李凌云¹

(1. 中国科学院上海微系统与信息技术研究所, 中科院太赫兹固态技术重点实验室, 上海 200050;
2. 中国科学院大学材料与光电研究中心, 北京 100049)

摘要: 在衡量传输网络对信号传输时间延迟和信号失真影响时, 群时延是非常重要的一项指标. 基于差分法计算群时延是目前测量仪器普遍使用的方法, 该方法存在着分辨率和精度之间的矛盾, 在提高频率分辨率的同时势必引起测量精度的下降. 本文在分析差分法误差来源的基础上, 基于 Tikhonov 正则化给出了一种新的群时延计算方法. 比较分析得出该方法能够在存在测量误差的情况下, 精确得到具有较高频率分辨率的群时延. 在实际给出的测量验证中, 通过与矢量网络分析仪得到的群时延数据对比, 验证了该方法的有效性.

关键词: 群时延; 差分法; Tikhonov 正则化

中图分类号: TN98

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2019)05-1044-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2019.05.010

High-Resolution Group Delay Measurement and Calculation Method Based on Tikhonov Regularization

LUO Rui^{1,2}, LIU Li^{1,2}, TONG Rui¹, LI Ling-yun¹

(1. Key Laboratory of Terahertz Solid-State Technology, Shanghai Institute of Microsystem and Information Technology,
Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200050, China;

2. Center of Materials Science and Optoelectronics Engineering, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Group delay is a very important indicator when measuring the impact of a transmission network on signal transmission time delay and signal distortion. The calculation of group delay based on the difference method is a commonly used in current measuring instruments, and there is a contradiction between frequency resolution and precision. It will inevitably lead to the decrease of measurement accuracy while improving the frequency resolution. Based on the analysis of the error source of the difference method, this paper presents a novel method of group delay measurement based on the Tikhonov regularization. The comparative analysis shows that the method can obtain the group delay value more precisely with higher frequency resolution when the measurement error is included. In the actual data calculation and verification, the validity of the method verified by comparison to the group delay data obtained by the vector network analyzer.

Key words: group delay; difference method; Tikhonov regularization

1 引言

在高稳定性系统的构建过程中, 如卫星导航, 国际原子时对比等领域, 对时间同步的精度要求越来越高^[1]. 系统中的放大器、混频器和射频电缆的群时延波动已成为时间同步的主要误差^[2], 如何精密地测量群时延已成为高稳定系统构建过程中亟需解决的问题.

现有的群时延计算方法是利用矢量网络分析仪测量的相位值对角频率微分^[3], 该方法存在着分辨率和精度之间的矛盾, 在相位测量误差一定的情况下, 提高频率分辨率减小频率步长会增大群时延的计算误差. 文献[4]中运用三次样条函数来拟合相位函数从而得到群时延的值, 其测量精度达到 0.1 ns, 然而该方法受样本点误差较大. 文献[5]中, 提出了基于三天线系统的新

型天线群时延测量方法,其测量精度达到 0.12ns,但该方法是从三天线系统端消除误差,只能用于天线测量不具有普适性.

本文在对传统的差分法群时延计算误差分析的基础上,得出频率步长和相位测量误差对计算结果产生的影响,在此基础上提出新的基于 Tikhonov 正则化的计算群时延方法,并将该方法用于探针测试校准件的群时延测量验证.用该方法得到的群时延结果与矢量网络分析仪测量的结果进行比较,在 100kHz 频率步长条件下,该方法的群时延计算精度优于 0.1ps.

2 群时延的定义和传统计算方法

群时延是线性系统的传输特性参数,在工程应用中,群时延被看作是信号的包络延迟.群时延定义为相位对频率的差分^[6]:

$$\tau_g = -\frac{d\varphi(f)}{2\pi df} \quad (1)$$

其中 τ_g 为群时延, $\varphi(f)$ 为相位, f 为频率. 目前广泛应用于测量设备的是传统的群时延计算方法,该方法是从式(1)出发,并获取测量频率步长 Δf , 其计算公式为^[3,7,8]:

$$\tau_g(f_{i-1}) = -\frac{\varphi(f_i) - \varphi(f_{i-1})}{2\pi\Delta f} \quad (2)$$

其中 $f_i (i=0,1,2,\dots,n-1)$ 和 $\varphi(f_i)$ 为各频率点和对应相位值, $\tau_g(f_{i-1})$ 为 f_{i-1} 点处的群时延值. 求解群时延的步骤为先设定测量范围和频率步长 Δf , 测量得到相位值 $\varphi(f_i)$, 然后通过式(2)求出群时延 $\tau_g(f_{i-1})$. 在实际测量中,会存在测量误差,在每个频率点测得的相位值 $\tilde{\varphi}(f_i)$ 为存在测量误差的离散样本点. 每个频率点的相位真值为 $\varphi(f_i)$. 其误差水平满足:

$$|\tilde{\varphi}(f_i) - \varphi(f_i)| \leq \delta \quad (3)$$

其中 δ 为测量误差.

3 差分法计算群时延误差分析

在差分法计算中,当 Δf 取值越小时,越能反映其群时延随频率的变化特性,即频率分辨率越高. 此时群时延的近似计算式为:

$$\tau_g(f_{i-1}) \approx -\frac{\tilde{\varphi}(f_i) - \tilde{\varphi}(f_{i-1})}{2\pi\Delta f} \quad (4)$$

不考虑测量误差时,存在截断误差的群时延计算式为:

$$\tau_g(f_{i-1}) = -\frac{\tilde{\varphi}(f_i) - \tilde{\varphi}(f_{i-1})}{2\pi\Delta f} + o(\Delta f) \quad (5)$$

其中 $o(\Delta f)$ 为截断误差, Δf 越大,截断误差也越大. 当考虑测量误差时,由于相位测量误差的存在,得到的群时延误差变大. 造成的舍入误差的群时延的计算误差表示为:

$$\left| -\frac{\tilde{\varphi}(f_i) - \tilde{\varphi}(f_{i-1})}{2\pi\Delta f} - \tau_g(f_{i-1}) \right| \leq o(\Delta f + \frac{\delta}{\Delta f}) \quad (6)$$

式(6)可以看出,差分法对测量误差非常敏感,当 Δf 较小时,误差会随频率步长的减小而增大.

在测量误差一定的情况下,要实现提高频率分辨率并精确求解群时延的值,本文基于 Tikhonov 正则化的计算方法可以实现.

4 Tikhonov 正则化方法计算群时延

4.1 Tikhonov 正则化方法基本原理

从式(5)和式(6)可以看出差分法的群时延计算方法存在着频率分辨率与精度之间的矛盾,由于微分运算由差分近似得到,当频率步长 Δf 趋近无穷小时,群时延计算数值误差会趋近于无穷大. 在此引入 Tikhonov 正则化方法来构造相位曲线的解析表达式从而解决问题,构造一个近似函数来逼近原相位函数,然后用构造函数求得群时延的值. 该方法无需经过第 3 节中的差分步骤,故不存在第 3 节的测量误差引起的数值稳定性问题^[9]. 在存在测量误差的情况下,该方法能够较好的拟合原函数的微分函数. 该方法计算群时延的流程图如图 1 所示,其中 DUT(Device Under Test)表示待测件. 测试步骤如下:

- (1) 连接 DUT 至测量设备,并设定测量范围和测量频率步长.
- (2) 测试得到相位数据.
- (3) 利用相位数据构造基于三次样条的相位函数.
- (4) 应用 Tikhonov 正则化条件于(3)中的三次样条函数.
- (5) 利用三次样条函数的性质和 Tikhonov 正则化约束条件求解三次样条函数的系数,得到群时延值.

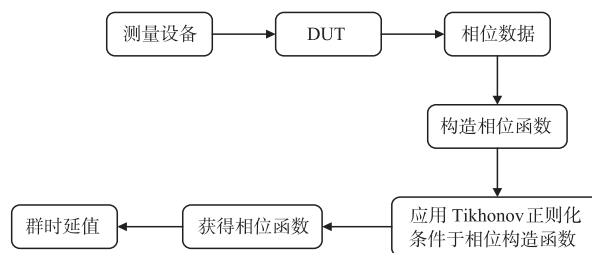


图1 Tikhonov正则化方法的群时延测量原理框图

Tikhonov 正则化方法的数学思想是构造一个函数尽可能平滑的逼近原函数,即各样本点处一阶导数尽可能的小,也就是各样本点的二阶导范数最小^[10]. 测量得到的 n 个频率值 $f_i (i=0,1,\dots,n-1)$ 和存在测量误差的相位值 $\tilde{\varphi}(f_i)$, 利用 Tikhonov 正则化方法构造近似函数 $g(f)$. 传统 Tikhonov 正则化方法要求构造函数在两端点处二阶导数必须为零^[11], 当构造函数 $g(f)$ 不满足该条件时,会导致构造函数的一阶导 $g'(f)$ 在两端存

在较大误差. 因此在本文中引入新的约束条件, 令构造函数 $g(f)$ 在两端点处二阶导数不必为零, 可以有效的解决构造函数 $g(f)$ 的一阶导在两端误差较大的问题. 最终使用 Tikhonov 正则化方法需满足的性质有:

(a) $g(f)$ 在两端两个区间 $[f_0, f_1]$ 和 $[f_{n-2}, f_{n-1}]$ 内为二次多项式, 在中间 $n-3$ 个区间内为三次多项式.

(b) 假设两端点 f_0, f_{n-1} 处测量误差为零, 即满足 $\tilde{\varphi}(f_0) = \varphi(f_0), \tilde{\varphi}(f_{n-1}) = \varphi(f_{n-1})$, 若不满足此条件则可以引入辅助函数.

$$\psi(f) = \varphi(f) + \tilde{\varphi}(f_0) - \varphi(f_0) + \frac{\tilde{\varphi}(f_{n-1}) - \varphi(f_{n-1}) + \varphi(f_0) - \tilde{\varphi}(f_0)}{f_{n-1} - f_0}(f - f_0) \quad (7)$$

来代替真值函数 $\varphi(f)$, 此时即可满足 $\psi(f_0) = \tilde{\varphi}(f_0), \psi(f_{n-1}) = \tilde{\varphi}(f_{n-1})$, 转化为求解函数 $\psi(f)$ 的问题.

(c) 考虑测量误差约束和各点处二阶导范数最小原则, 以及在两端点出二阶导数不必为零, 在所有子区间内满足如下目标泛函取得最小值:

$$J(g) = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} (\tilde{\varphi}(f_i) - g(f_i))^2 + \lambda \left\{ \int_{f_0}^{f_{n-1}} (g''(f))^2 df + \frac{1}{2} \Delta f [(g''(f_0))^2 + (g''(f_{n-1}))^2] \right\} \quad (8)$$

λ 为正则化系数, 其值的大小决定了最终的正则化效果. 为了简化计算, 正则化系数取为: $\lambda = \delta^2 [12]$. 构造函数的解为:

$$g = \arg \min J(g) \quad (9)$$

4.2 求解群时延的值

构造函数 $g(f)$ 的求解是在满足 4.1 节的约束条件下的方程的求解. 在每段子区间内, 构造函数 $g(f)$ 可以写为如下分段多项式:

$$g(f) = \begin{cases} \sum_{j=1}^3 a_j^{(i)} (f - f_i)^{j-1}, & i = 0, n-2, \\ f \in [f_i, f_{i+1}); \\ \sum_{j=1}^4 a_j^{(i)} (f - f_i)^{j-1}, & i = 1, \dots, n-3, \\ f \in [f_i, f_{i+1}). \end{cases} \quad (10)$$

Tikhonov 正则化方法的函数方程类似于三次样条函数的构造函数方程, 同样 $g(f)$ 在各离散点 (不包括两端点) 处满足二阶导数连续:

$$\begin{cases} g(f_i^+) = g(f_i^-), & i = 1, \dots, n-2 \\ g'(f_i^+) = g'(f_i^-), & i = 1, \dots, n-2 \\ g''(f_i^+) = g''(f_i^-), & i = 1, \dots, n-2 \end{cases} \quad (11)$$

其中 $f^+ = f + \lim_{\Delta f \rightarrow 0^+} \Delta f, f^- = f + \lim_{\Delta f \rightarrow 0^-} \Delta f$.

式(9)可以等效转化为如下方程:

$$[g(f_i) - \tilde{\varphi}(f_i)] \Delta f + \lambda [g^{(3)}(f_i^+) - \frac{g''(f_0)}{\Delta f}] = 0 \quad (12)$$

$$[g(f_i) - \tilde{\varphi}(f_i)] \Delta f + \lambda [g^{(3)}(f_i^+) - g^{(3)}(f_i^-)] = 0; \quad (13)$$

$$2 \leq i \leq n-3;$$

$$[g(f_{n-2}) - \tilde{\varphi}(f_{n-2})] \Delta f + \lambda [-g^{(3)}(f_{n-2}^-) - \frac{g''(f_{n-1})}{\Delta f}] = 0 \quad (14)$$

其中, $g^{(3)}(f)$ 为 $g(f)$ 的三阶导数.

将式(11) ~ (14) 代入式(10)中, 联立方程, 通过待定系数法来求解出式(10)的系数 $a_j^{(i)}$, 从而得到了构造函数 $g(f)$ 的具体表达式.

群时延的值可由 $g(f)$ 的一阶导数得到, 表达式为:

$$\tau_g = -\frac{1}{360} [a_2^{(0)}, a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(n-1)}] \quad (15)$$

其中 $a_2^{(i)} (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 为式(10)中各分段构造函数的一阶系数. 本文采用的 Tikhonov 正则化方法是在传统正则化方法的基础上修改部分约束条件, 解决了传统正则化方法在两端处构造函数微分误差较大的问题. Tikhonov 正则化方法与三次样条函数的表达式近似, 其误差分析与三次样条函数相似^[13]. 截断误差为:

$$\varphi'(f_i) - g'(f_i) = o(\Delta f^3) \quad (16)$$

两种方法的截断误差水平对比如表 1 所示:

表 1 截断误差水平分析

方法	截断误差	对样本点估计的影响
差分法	$o(\Delta f)$	大
Tikhonov 正则化	$o(\Delta f^3)$	小

由表 1 可以看出, 当频率步长较小时, Tikhonov 正则化方法能够有效的减小截断误差对计算结果的影响.

5 实例验证

为了验证本文提出的算法的有效性, 使用安捷伦矢量网络分析 N5245A 分别测量出探针测试配套的标准校准件的相位值和群时延结果. 采集到的相位数据使用 Tikhonov 正则化方法处理得到的群时延结果与测量到的群时延结果进行对比. 使用的校准件照片如图 2 所示, 图中标识了探针放置的位置, 校准件参数如表 2 所示^[14]:

表 2 校准件参数

长度 (μm)	群时延 (ps)
5250	40

采用如下标准差计算公式来验证两种方法的计算误差:

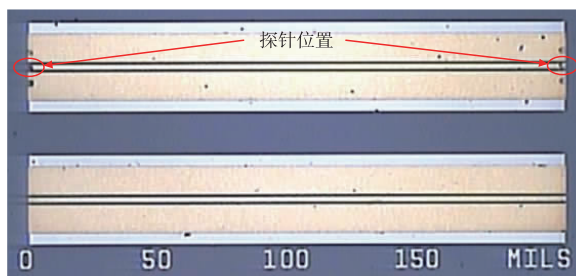
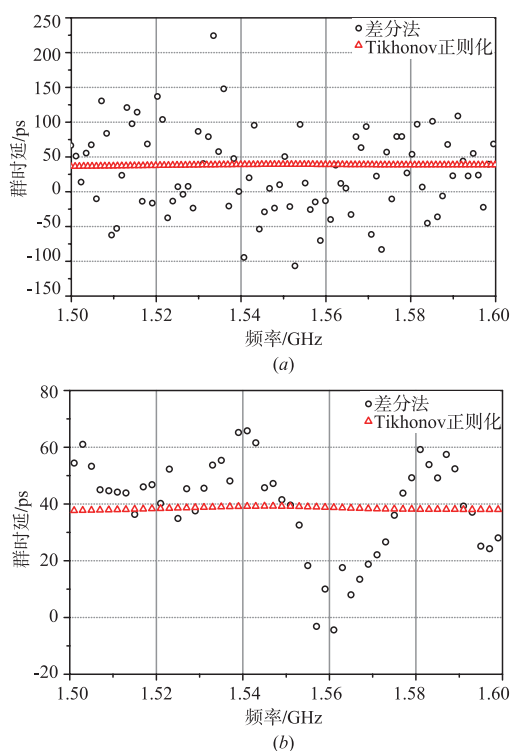


图2 在片探针测试校准件照片

$$SD = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\tau_g(f_i) - \bar{\tau}_g)^2} \quad (17)$$

其中 SD 为标准差, $\tau_g(f_i)$ 为某一种方法计算得到的群时延值, $\bar{\tau}_g$ 为该方法计算得到的群时延平均值。

矢量网络分析仪的测量精度为 0.1° , 测试频率范围为 $1.5 \sim 1.6\text{GHz}$, 实验温度为 25°C . 测试中分别选取 $\Delta f = 100\text{kHz}, 1\text{MHz}$ 两组相位测量值. 计算得到的结果如图 3 所示, 测试结果的对比如表 3 所示. 得到的标准差越小, 说明该方法受步长的影响就越小, 群时延计算误差越小.

图3 差分法与Tikhonov正则化求得群时延结果比较
(a) $\Delta f = 100\text{kHz}$; (b) $\Delta f = 1\text{MHz}$

由于探针会占据部分线长, 实际的群时延计算值会低于标准值. 对比可以看出, Tikhonov 正则化方法在 $\Delta f = 100\text{kHz}, 1\text{MHz}$ 的两组群时延计算结果均比差分法计算得到的结果离散度小, 测量精度优于 0.1ps , 受步长影响小, 频率分辨率高.

表 3 群时延结果对比

频率步长	矢量网络分析仪 测量群时延值		Tikhonov 正则化方法得到的 群时延值	
	平均值	SD	平均值	SD
100kHz	39.459	64.946	39.464	0.0003
1MHz	38.319	33.628	38.321	0.0024

6 结语

本文从传统的差分法计算群时延出发, 讨论了差分法在计算群时延过程中频率分辨率与精度之间的矛盾, 然后提出新的基于 Tikhonov 正则化方法的群时延计算方法. 该方法通过改进传统 Tikhonov 正则化方法约束条件的方式构造了相位曲线的解析表达式, 避免了差分数值运算过程, 相比与传统的差分法能够减小步长选取和测量误差对结果产生的影响, 有效地提高了频率分辨率和测量精度. 但与差分法相比, 本文的方法需要在获得整体的相位数据后再进行构造函数的计算, 无法和差分法一样随着频率扫描过程即时给出群时延值, 相比之下实时性有局限. 最后用矢量网络分析仪对标准校准件进行了结果验证, 结果表明稳定性好, 分辨率高, 该方法能够改进当前的群时延测量方法.

参考文献

- [1] Li Y, Hua Y, Yan B R, et al. A method of obtaining high precision propagation delay for BPL timing signal [A]. 2018 IEEE International Frequency Control Symposium [C]. USA: IEEE Press, 2018. 1-5.
- [2] Ascarrunz F G. Timing errors in two-way satellite time and frequency transfer using spread spectrum modulation [D]. Boulder: University of Colorado, 1999. 40-56.
- [3] Agilent Technologies. Agilent PNA series network analyzer printed version of PNA help user's and programming guide [DB/OL]. http://nasupportkeysightcom/pna/help/PNA-Help9_42.pdf, 2011-09-16/2019-02-22.
- [4] 朱祥维, 李垣陵, 雍少为, 等. 群时延的新概念, 测量方法及其应用 [J]. 电子学报, 2008, 36(9): 1819-1823. Zhu Xiang-wei, Li Yuan-ling, Yong Shao-wei, et al, A new definition, measurement method of group delay and its application [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(9): 1819-1823. (in Chinese)
- [5] Lin H Y, Song Z F, Wang X T, et al. An improved antenna group delay measurement method using a three-antenna extrapolation technique [J]. Radioengineering, 2017, 26(3): 675-681.
- [6] Wang J W, Feng Z H. Time-domain nature of group delay [J]. Chinese Physics B, 2015, 24(10): 100301-1-100301-5.
- [7] Keysight Technologies. Understanding the Fundamental Prin-

- principles of Vector Network Analysis[DB/OL]. <https://literaturecdnkeysightcom/litweb/pdf/5965-7707E.pdf>, 2019 - 02 - 22.
- [8] Ostwald O. Group and phase delay measurements with vector network analyzer ZVR [DB/OL]. https://scdn.rohde-schwarz.com/ur/pws/dl_downloads/dl_application/application_notes/1ez35/1ez35_1e.pdf, 1997-07-28/2019-02-22.
- [9] 王希云, 黄建国, 陈宇. 基于正则化方法的一个新型数值微分算法[J]. 高等学校计算数学学报, 2009, 31(03): 246 - 256.
Wang Xi-yun, Huang Jian-guo, Chen Yu, et al. A new numerical differentiation algorithm with regularization [J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2009, 31(03): 246 - 256. (in Chinese)
- [10] Whitney M L. Theoretical and numerical study of Tikhonov's regularization and morozov's discrepancy principle[D]. Georgia State: Georgia State University, 2009. 15 - 19.
- [11] 王彦博. 数值微分及其应用[D]. 上海: 复旦大学, 2005. 8 - 21.
Wang Yan-bo. Numerical differentiation and its application [D]. Shanghai: Fudan University, 2005. 8 - 21 (in Chinese)
- [12] Cheng J, Yamamoto M. One new strategy for a priori choice of regularizing parameters in Tikhonov's regularization[J]. Inverse Problems, 2000, 16(4): L31 - L38 (8).
- [13] 朱立勋. 三次样条插值的收敛性及一类三次广义样条插值的误差估计[D]. 吉林: 吉林大学, 2006. 11 - 17.
- Zhu Li-xun. The convergence of cubic spline interpolation and the error estimations of certain generalized cubic spline interpolation[D]. Jilin: Jilin University, 2006. 11 - 17. (in Chinese)
- [14] Formfactor. Cascade Impedance Standard Substrate Map [DB/OL]. <https://www.formfactor.com/download/iss-map-101-190/?wpdmml=3159&refresh=5c6fa8a5a88be1550821541>, 2019 - 02 - 22.

作者简介



骆睿男, 1994年出生于湖北黄冈. 中国科学院上海微系统与信息技术研究所中科院太赫兹固态技术重点实验室硕士生, 主要研究方向为微电子学与微波测量技术.

E-mail: rui.luo@mail.sim.ac.cn



刘莉女, 汉族, 1994年出生于宁夏回族自治区. 现为中国科学院上海微系统与信息技术研究所太赫兹固态技术重点实验室硕士研究生. 主要研究方向为微电子学与微波技术, 毫米波器件与电路.

E-mail: maolili@mail.sim.ac.cn



李凌云(通信作者)男, 1978年生于上海. 中国科学院上海微系统与信息技术研究所中科院太赫兹固态技术重点实验室研究员, 硕士研究生导师, 研究方向为射频毫米波单片集成电路设计与测试技术.

E-mail: lilingyun@mail.sim.ac.cn