第2期 电 子 学 报 Vol. 47 No. 2
2019年2月 ACTA ELECTRONICA SINICA Feb. 2019

泛延拓矩阵的QR分解

袁晖坪
（重庆工商大学数学与统计学院，重庆，400067；经济社会应用统计重庆市重点实验室，重庆 400067；
电子商务及供应链系统重庆市重点实验室，重庆 400067）

摘 要： 考虑泛延拓矩阵的QR分解与广义逆，导出了泛延拓矩阵的QR分解与广义逆的公式，讨论了系统参数估计问题. 结果显示所给方法既减少了计算量与存储量，又不会降低数值精度. 同时推广和优化了文献[8,9]的研究结果，拓宽了实际应用领域的范围.

关键词： 泛延拓矩阵；QR分解；广义逆；信号处理；参数估计
中图分类号： TN911.7 **文献标识码：** A **文章编号：** 0372-2112（2019）02-0308-06
电子学报URL： http://www.ejournal.org.cn **DOI：** 10.3969/j.issn.0372-2112.2019.02.008

QR Factorization for Universal Extended Matrix

YUAN Hui-ping
(*College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing* 400067, *China*;
Chongqing key Laboratory of Social Economy and Applied Statistics, Chongqing 400067, *China*;
Chongqing Key Laboratory of Electronic Commerce & Supply Chain System, Chongqing 400067, *China*)

Abstract: The author studied the QR factorization and generalized inverse of universal extended matrix. and the system parameter estimate is discussed. In addition, the formula of the QR factorization and generalized inverse of universal extended matrix were given. The results show that the algorithm is simple and fast, and it does not reduce the numerical accuracy. Another some results of paper[8,9] are generalized.

Key words: universal extended matrix; QR factorization; generalized inverse; signal processing; parameter estimate

1 引言

矩阵的QR分解是现代数值分析中最重要的工具之一，它在信号与图像处理、模式识别、控制理论、高质量统计计算、线性方程组与特征值问题、最优化问题、参数估计、商务智能、网络安全、基因及细胞分析、大数据处理等领域不仅有广泛的实际应用，而且也有重要的理论研究价值[1~11]. 矩阵的广义逆不仅在数学理论上有广泛研究，而且在信号处理、自动化、系统控制、测量学、经济学、预测理论、概率统计、数学规划等领域有着广泛的实际应用背景，尤其是在最小二乘问题，随机规划问题，回归、分布估计、马尔可夫链等问题，控制论和系统识别问题、网络问题等研究中广义逆更是发挥着重要的作用. [11,12]许多实际问题的数学模型，都可转化成线性问题，进而用矩阵解决之；很多当对高阶数据矩阵进行分解时，若用计算机直接分解，计算量大，效率低. 若能找到矩阵中某一部分与其它部分之间的定量关系，尤其是当矩阵具有某种行或列对称性时，那么问题便很容易解决，可以大量节省存储量和计算量[8,9,13,14]，因此寻找矩阵中某一部分和其它部分之间的结构关系就非常重要. 文献[8,9,13,14]对行（或列）对称矩阵的QR分解或奇异值分解作了研究，获得了深刻而应用广泛的结果. 但文献[8,9,13]的变换矩阵是单位反对角阵 $\boldsymbol{J}$、置换矩阵、酉变换矩阵，在实际应用领域中变换矩阵一般为正交矩阵，故文献[14]将变换矩阵推广到正交矩阵，提出了泛延拓矩阵的概念，研究了他们的性质与奇异值分解，本文进一步研究泛延拓矩阵的QR分解，得到了一系列新结果，给出了泛延拓矩阵的QR分解、广义逆及酉相抵的公式和快速算法，极大地减少了它们的计算量与存储量，推广和优化了文献[8,9]的研究结果，拓宽了实际应用领域的范围，探讨了系统参数估计问题及多载波系统中信道矩阵的

收稿日期：2017-10-09；修回日期：2018-06-11；责任编辑：马兰英
基金项目：国家自然科学基金（No. 11271388）；重庆市自然科学基金（No. cstc 2015jcyjA00009）

QR 分解问题. 这无论是对于矩阵理论或应用(如数理统计、航空计算、神经网络、对称性检测、信号处理、生物医学工程、系统辨识、控制论、声源分类、基因组关联研究、物理学、量子化学、经济学、商务智能与大数据处理等等)都是很有意义的. 本文用 $\boldsymbol{A}^H$ 与 $\boldsymbol{A}^+$ 分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置阵与 Moore-Penrose 逆, $\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 复矩阵集.

定义 1[14]　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$ 均为 m 阶正交矩阵,则称:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{k-1}\end{pmatrix}$$

(其中 $\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{A}, i=1,2,\cdots,k-1$)

为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次泛行延拓矩阵, $\boldsymbol{A}$ 称为它的母矩阵.

定义 2[14]　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$ 均为 n 阶正交矩阵,则称:

$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=(\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}_2,\quad \cdots.\quad \boldsymbol{A}_{k-1})$(其中 $\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_i, i=1,2,\cdots,k-1$)

为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次泛列延拓矩阵, $\boldsymbol{A}$ 称为它的母矩阵.

由文[14]可知:泛行(列)延拓矩阵是行(列)对称矩阵[8]、行(列)酉对称矩阵[9]与行(列)延拓矩阵[13]的进一步推广.

由定义 1 与定义 2 易得以下性质:

(1) $rank\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=rank\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=rank\boldsymbol{A}$.

(2) $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}};\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}},\cdots,\boldsymbol{A}_{k-1}^{\mathrm{H}})$,

$[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}};\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}},\cdots,\boldsymbol{A}_{k-1}^{\mathrm{H}})$.

(3) 设 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{C}^{m\times m}, Y\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$,则

$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\boldsymbol{Y}$,

$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{X}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})$.

命题 1[11]　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$,则对任何酉矩阵 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{C}^{m\times m}$, $\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 有 $\boldsymbol{UAV}$ 的 Moore-Penrose 逆:

$$(\boldsymbol{UAV})^+=\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$$

2　泛延拓矩阵的 QR 分解

2.1　泛行延拓矩阵的 QR 分解

定理 1　设 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$ 均为 m 阶正交矩阵, $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}(m\geq n)$ 的 k 次泛行延拓矩阵为 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\in\boldsymbol{C}^{km\times n}$,若有酉阵 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{C}^{m\times m}$ 使 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,其中 R 为 $n\times n$ 上三角阵,则存在酉矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{k}} & \frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{2}} & \frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{k(k-1)}}\\ \frac{\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}}{\sqrt{k}} & \frac{-\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}}{\sqrt{2}} & \frac{\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}}{\sqrt{k(k-1)}}\\ \frac{\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{U}}{\sqrt{k}} & \boldsymbol{O} & \frac{-2\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{U}}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{U}}{\sqrt{k(k-1)}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\boldsymbol{Q}_{k=1}\boldsymbol{U}}{\sqrt{k}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \frac{(1-k)\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{U}}{\sqrt{k(k-1)}}\end{pmatrix}$$

使 (1) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$;

(2) $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^+=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\boldsymbol{R}^+ & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}$.

证明　(1)由条件容易验证, $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}$,即 $\boldsymbol{P}$ 为酉阵,又

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O}\\ \vdots\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

(2)由(1)、命题 1 及文[11]知,

$$[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^+$$

$$=\left[\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\right]^+=\boldsymbol{I}^{\mathrm{H}}\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^+\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\boldsymbol{R}^+ & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}.$$

在定理 1 中,若取 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}=\boldsymbol{J}_{k-1}$,则可得文[8]定理 1,并且本文定理 1 中的酉矩阵 $\boldsymbol{P}$ 比文[8]定理 1 中的酉矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 更加具体简洁;若取 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$ 均为酉变换矩阵,则可得文[9]定理 1;因此,定理 1 推广了文献[8,9]的结果.

定理 2　设 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$ 均为 m 阶正交矩阵, $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}(n\geq m)$ 的 k 次泛行延拓矩阵为 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\in\boldsymbol{C}^{km\times n}$,若有酉阵 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 使 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,即 $\boldsymbol{AU}=(\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}\quad O)$,其中 $\boldsymbol{R}$ 为 $m\times m$ 上三角阵,则:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\boldsymbol{U}=\boldsymbol{R}((\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}\quad \boldsymbol{O});\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}).$$

证明　$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{AU}\\ \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{AU}\\ \vdots\\ \boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{AU}\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} \quad \boldsymbol{O}) \\ \boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} \quad \boldsymbol{O}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{Q}_{k-1}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} \quad \boldsymbol{O}) \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}\big((\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} \quad \boldsymbol{O}), \quad \boldsymbol{Q}_1, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{Q}_{k-1}\big).$$

定理3 设 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$ 均为 m 阶正交矩阵,$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}(n\geq m)$ 的 k 次泛行延拓矩阵为 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\in\boldsymbol{C}^{km\times n}$,若有酉阵 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 使 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,即 $\boldsymbol{AU}=(\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} \quad \boldsymbol{O})$,其中 $\boldsymbol{R}$ 为 $m\times m$ 上三角阵,则存在酉阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{I}_m}{\sqrt{k}} & \frac{\boldsymbol{I}_m}{\sqrt{2}} & \frac{\boldsymbol{I}_m}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{I}_m}{\sqrt{k(k-1)}} \\ \frac{\boldsymbol{Q}_1}{\sqrt{k}} & \frac{-\boldsymbol{Q}_1}{\sqrt{2}} & \frac{\boldsymbol{Q}_1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{Q}_1}{\sqrt{k(k-1)}} \\ \frac{\boldsymbol{Q}_2}{\sqrt{k}} & \boldsymbol{O} & \frac{-2\boldsymbol{Q}_2}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{Q}_2}{\sqrt{k(k-1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\boldsymbol{Q}_{k=1}}{\sqrt{k}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \frac{(1-k)\boldsymbol{Q}_{k-1}}{\sqrt{k(k-1)}} \end{pmatrix}$$

使 (1) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$;(2) $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^{+}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\boldsymbol{R}^{+} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}$.

证明 (1)由条件容易验证,$\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}$,即 $\boldsymbol{P}$ 为酉阵,又

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})$$

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{AU}\\ \boldsymbol{O}\\ \vdots\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

(2)由(1)、命题1及文献[11]知,

$$[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^{+}=\left[\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\right]^{+}$$

$$=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\boldsymbol{R}^{+} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}.$$

2.2 泛列延拓矩阵的QR分解

定理4 设 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$ 均为 n 阶正交矩阵,已知 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}(m\geq n)$ 的 k 次泛列延拓矩阵为 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\in\boldsymbol{C}^{m\times kn}$,若有酉阵 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{C}^{m\times m}$ 使 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{R}$ 为 $n\times n$ 上三角阵,则

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{C}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}\right)$$

证明
$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\\ &=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{AQ}_1, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{AQ}_{k-1})\\ &=(\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AQ}_1, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{AQ}_{k-1})\\ &=\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1, \quad \cdots \quad \begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}_{k-1}\right)\\ &=\boldsymbol{C}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}\right).\end{aligned}$$

在定理4中,若取 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}=\boldsymbol{J}_{k-1}$ 或为酉变换矩阵,则可得文[8]与文[9]中的定理2,因此,定理4推广了文[8,9]的结果.

定理5 设 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$ 均为 n 阶正交矩阵,已知 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}(n\geq m)$ 的 k 次泛列延拓矩阵为 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\in\boldsymbol{C}^{m\times kn}$,若有酉阵 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 使 $\boldsymbol{UA}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,即 $\boldsymbol{AU}^{\mathrm{H}}=(\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} \quad \boldsymbol{O})$,其中 $\boldsymbol{R}$ 为 $m\times m$ 上三角阵,则存在酉阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{k}} & \frac{\boldsymbol{UQ}_1}{\sqrt{k}} & \frac{\boldsymbol{UQ}_2}{\sqrt{k}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{UQ}_{k-1}}{\sqrt{k}} \\ \frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{2}} & \frac{-\boldsymbol{UQ}_1}{\sqrt{2}} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{6}} & \frac{\boldsymbol{UQ}_1}{\sqrt{6}} & \frac{-2\boldsymbol{UQ}_2}{\sqrt{6}} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{U}{\sqrt{k(k-1)}} & \frac{\boldsymbol{UQ}_1}{\sqrt{k(k-1)}} & \frac{\boldsymbol{UQ}_2}{\sqrt{k(k-1)}} & \cdots & \frac{(1-k)\boldsymbol{UQ}_{k-1}}{\sqrt{k(k-1)}} \end{pmatrix}$$

使 (1) $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,即 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}=(\sqrt{k}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} \quad \boldsymbol{O})$;

(2) $[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^{+}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{H}})^{+}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

证明 由条件容易验证,$\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}$,即 $\boldsymbol{P}$ 为酉阵,又

$$\boldsymbol{P}[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{k-1}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{UA}^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{O}\\ \vdots\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

由(1)、命题1及文[11]知,

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^{+}&=[(\sqrt{k}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} \quad \boldsymbol{O})\boldsymbol{P}]^{+}\\ &=\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}(\sqrt{k}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} \quad \boldsymbol{O})^{+}\boldsymbol{I}^{\mathrm{H}}\\ &=\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}(\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}})^{+}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

定理6 设 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$ 均为 n 阶正交矩阵,已

知 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}(m\geq n)$ 的 k 次泛列延拓矩阵为 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,Q_{k-1})\in\boldsymbol{C}^{m\times kn}$,若有酉阵 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{C}^{m\times m}$ 使 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{R}$ 为 $n\times n$ 上三角阵,则存在

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{I}_n}{\sqrt{k}} & \frac{\boldsymbol{I}_n}{\sqrt{2}} & \frac{\boldsymbol{I}_n}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{I}_n}{\sqrt{k(k-1)}}\\ \frac{\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}}{\sqrt{k}} & \frac{-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}}{\sqrt{2}} & \frac{\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}}{\sqrt{k(k-1)}}\\ \frac{\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{H}}}{\sqrt{k}} & \boldsymbol{O} & \frac{-2\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{H}}}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{H}}}{\sqrt{k(k-1)}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\boldsymbol{A}_{k-1}^{\mathrm{H}}}{\sqrt{k}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \frac{(1-k)\boldsymbol{A}_{k-1}^{\mathrm{H}}}{\sqrt{k(k-1)}}\end{pmatrix}$$

使(1)$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$;

(2)$[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^{+}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\boldsymbol{R}^{+} & \boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}$.

证明　(1)由条件容易验证,$\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}$,即 $\boldsymbol{P}$ 为酉阵,又

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\quad\cdots\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{k-1})$$
$$\boldsymbol{P}=(\sqrt{k}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{O}\quad\cdots\quad\boldsymbol{O})=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

(2)与定理3(2)的证明类似,此处从略..

3　泛延拓矩阵的 QR 分解的算法

由以上讨论,可得以下算法:

算法1　$A\in\boldsymbol{C}^{m\times n}(m\geq n)$的泛行延拓矩阵 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})$ 的 **QR** 分解算法

步骤1　求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解:$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$;

步骤2　计算定理1中的酉矩阵 $\boldsymbol{P}$;

步骤3　写出 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R}\\0\end{pmatrix}$.

算法2　$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}(n\geq m)$的泛列延拓矩阵 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})$ 的 **QR** 分解算法

步骤1　求矩阵的 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 的 QR 分解;$\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$;

步骤2　计算定理5中的酉矩阵 $\boldsymbol{P}$;

步骤3　写出 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}=(\sqrt{k}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}}\quad\boldsymbol{O})$.

类似地,可得出与定理2、定理3、定理4,定理6的相应分解的算法,此处从略.

一般地 求矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 的泛行(列)延拓阵的 QR 分解,当 $m\geq n$ 时,算法1较好;当 $n\geq m$ 时,算法2较好.

例1　在多载波系统中,求以下信道矩阵

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{J})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\\1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\left(\text{其中 }\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right)$$

的 QR 分解.

解　容易求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解为:$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}$,其中

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{3}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&0&-\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

于是按定理1的公式计算泛行延拓矩阵 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{J})$ 的 QR 分解,得

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}&\boldsymbol{U}\\\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}&-\boldsymbol{J}\boldsymbol{U}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\boldsymbol{R}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&\sqrt{3}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&0&-\frac{4}{\sqrt{6}}\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}R(A;J)=R_1$,即 $R(A;J)=P\,R_1$.

显然:这比直接对信道矩阵 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{J})$ 进行 QR 分解简单得多,可减少 MIMO 检测器信号检测的复杂度.

在工程技术领域中,通常 $\boldsymbol{R}$ 矩阵的数值及性态较

之 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵更具应用价值. 若只考虑 $\boldsymbol{R}$ 矩阵$\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R}\\0\end{pmatrix}$运算量,则算法 1 的运算量为 $\boldsymbol{O}[n^2(m-n/3)+n(n+1)/2]$;而直接计算整个 k 次泛行延拓矩阵 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})$的 R 矩阵$\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R}\\0\end{pmatrix}$运算量 则达到 $\boldsymbol{O}[n^2(km-n/3)]$. 由此可见:当待分析 k 次泛行延拓矩阵的维数较大,特别当 k 较高时,计算量和存储量的减少非常明显.

4 泛延拓矩阵 QR 分解的应用

4.1 泛延拓矩阵的酉相抵性

作为泛延拓矩阵 QR 分解的直接应用,下面讨论泛延拓矩阵的酉相抵性.

定理 7 设 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$均为 m 阶正交矩阵,已知 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$的 k 次泛行延拓矩阵为 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\in\boldsymbol{C}^{km\times n}$,则存在酉阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{I}_m}{\sqrt{k}} & \frac{\boldsymbol{I}_m}{\sqrt{2}} & \frac{\boldsymbol{I}_m}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{I}_m}{\sqrt{k(k-1)}}\\ \frac{\boldsymbol{Q}_1}{\sqrt{k}} & \frac{-\boldsymbol{Q}_1}{\sqrt{2}} & \frac{\boldsymbol{Q}_1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{Q}_1}{\sqrt{k(k-1)}}\\ \frac{\boldsymbol{Q}_2}{\sqrt{k}} & \boldsymbol{O} & \frac{-2\boldsymbol{Q}_2}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{Q}_2}{\sqrt{k(k-1)}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\boldsymbol{Q}_{k=1}}{\sqrt{k}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \frac{(1-k)\boldsymbol{Q}_{k-1}}{\sqrt{k(k-1)}}\end{pmatrix}$$

使 (1) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$; (2) $[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^{+}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\boldsymbol{A}^{+} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}$. (3) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})$与$\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{km\times n}$ 酉相抵.

证明 (1) 由条件容易验证,$\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}$,即 $\boldsymbol{P}$ 为酉阵,又

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{A}\\\vdots\\\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}\\\vdots\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

(2) 与定理 1(2) 的证明类似,此处从略.

(3) 由(1)知:存在酉阵 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}},\boldsymbol{I}_n$ 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\boldsymbol{I}_n=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{km\times n}$,故 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})$与$\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{km\times n}$ 酉相抵.

定理 8 设 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$均为 n 阶酉矩阵,已知 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$的 k 次泛列延拓矩阵为 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\in\boldsymbol{C}^{m\times kn}$,则存在酉阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{I}_n}{\sqrt{k}} & \frac{\boldsymbol{I}_n}{\sqrt{2}} & \frac{\boldsymbol{I}_n}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{I}_n}{\sqrt{k(k-1)}}\\ \frac{\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}}{\sqrt{k}} & \frac{-\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}}{\sqrt{2}} & \frac{\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{H}}}{\sqrt{k(k-1)}}\\ \frac{\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{H}}}{\sqrt{k}} & \boldsymbol{O} & \frac{-2\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{H}}}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{H}}}{\sqrt{k(k-1)}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\boldsymbol{A}_{k-1}^{\mathrm{H}}}{\sqrt{k}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \frac{(1-k)\boldsymbol{A}_{k-1}^{\mathrm{H}}}{\sqrt{k(k-1)}}\end{pmatrix}$$

使 (1) $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\boldsymbol{P}=(\sqrt{k}\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{O})$; (2) $[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^{+}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\boldsymbol{A}^{+}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})$与$(\sqrt{k}\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{O})_{m\times kn}$酉相抵.

证明 (1) 由条件容易验证,$\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}$,即 $\boldsymbol{P}$ 为酉阵,又

$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{k-1})$

$\boldsymbol{P}=(\sqrt{k}\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{O}\quad\cdots\quad\boldsymbol{O})=(\sqrt{k}\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{O})$.

(2) 与定理 5(2) 的证明类似,此处从略.

(3) 由(1)知:存在酉阵 $\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\boldsymbol{P}=(\sqrt{k}\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{O})_{m\times kn}$,故 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})$与$(\sqrt{k}\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{O})_{m\times kn}$酉相抵.

4.2 用泛延拓矩阵的 QR 分解估计系统参数

在系统辨识问题中,如何估计系统参数,已有的协方差方法、最小二乘(RLS)法和 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}$ 分解法都存在条件数变大的毛病[11];由于酉变换保持被变换向量的 Euclidean 范数不变,因而相对来说估计系统参数的 QR 分解法较好.

系统辨识问题是:已知在 i 时刻系统输入值 $x(i)$和输出观测值 $y(i)$,其中 $i=1,2,\cdots,kn$,估计系统参数向量 $\boldsymbol{z}_{p+1}$,这可转化为求解以下最小二乘问题:$\min\limits_{\boldsymbol{z}_{p+1}}\|\boldsymbol{B}_{kn\times(p+1)}\boldsymbol{z}_{p+1}-\boldsymbol{y}_{kn}\|_2^2$, 其中, $\boldsymbol{B}_{kn\times(p+1)}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{kn})^{\mathrm{H}}$, $\boldsymbol{x}_i=(x(i),x(i-1),\cdots,x(i-p))^{\mathrm{H}}$, $\boldsymbol{y}_{kn}=(y(1),y(2),\cdots,y(kn))^{\mathrm{H}}$.

若 $\boldsymbol{B}_{kn\times(p+1)}$正好是一个 $n\times(p+1)$矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次泛行延拓矩阵 $\boldsymbol{B}_{kn\times(p+1)}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})$(其中 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$均为 n 阶正交矩阵),$\boldsymbol{A}$ 的 QR 分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{U}$ 为 n 阶酉矩阵,$\boldsymbol{R}$ 为 $p+1$ 阶上三角阵,则由定理 1 知,存在 kn 阶酉矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\text{即 }\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}_{kn\times(p+1)}=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{R}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

所以,上述最小二乘问题便化为:

$$\min_{z_{p+1}} \| \boldsymbol{B}_{kn\times(p+1)} \boldsymbol{z}_{p+1} - \boldsymbol{y}_{kn} \|_2^2 =$$
$$\min_{z_{p+1}} \| \boldsymbol{P}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{B}_{kn\times(p+1)} \boldsymbol{z}_{p+1} - \boldsymbol{P}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{y}_{kn} \|_2^2 =$$
$$\min_{z_{p+1}} \| \sqrt{k} R \boldsymbol{z}_{p+1} - \bar{\boldsymbol{y}}_{p+1} \|_2^2 + \| \tilde{\boldsymbol{y}}_{kn-p-1} \|_2^2$$

式中$\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{y}}_{p+1} \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_{kn-p-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{y}_{kn}$,且$\bar{\boldsymbol{y}}_{p+1}$是$(p+1)\times 1$ 向量,$\tilde{\boldsymbol{y}}_{kn-p-1}$是$(kn-p-1)\times 1$ 向量,再解$\sqrt{k}\boldsymbol{R}\boldsymbol{z}_{p+1} = \bar{\boldsymbol{y}}_{p+1}$即可得到系统参数向量 $\boldsymbol{z}_{p+1}$,且最小残差值等于$\| \tilde{\boldsymbol{y}}_{kn-p-1} \|_2^2$. 显然这比直接对 $\boldsymbol{B}_{kn\times(p+1)}$ 作 QR 分解求 $\boldsymbol{z}_{p+1}$ 简便.

5　结束语

本文研究了泛延拓矩阵的性质、QR 分解、广义逆及酉相抵的一系列公式与快速算法,导出了泛延拓矩阵与母矩阵的 QR 分解、广义逆及酉相抵之间的定量关系;用母矩阵代替泛延拓矩阵求 QR 分解、广义逆及酉相抵,既能大大减少计算量和储存量,又不会丧失数值精度;同时探讨了系统参数估计问题. 该文推广和丰富了文献[8,9]的研究内容,如定理 1 与定理 4 推广了文献[8,9]的结果,定理 2、定理 3、定理 5、定理 6、定理 7 与定理 8 等是所获得的崭新结果.

衷心感谢编审专家对拙作的高度评价和提出的合理化建议!

参考文献

[1] PARLETT B. N. The QR algorithm[J]. Computing in Science & Engineering,2000,2(1):38 – 42.

[2] PRASAD S. Direction-of-arrival estimation using rank revealing QR factorization[J]. IEEE Trans Signal Processing,1991,39(5):1224 – 1229.

[3] LI X. QR factorization based blind channel identification and equalization with second-order statistics [J]. IEEE Trans. Signal Processing,2000,48(1):60 – 69.

[4] ZAROWSKI C J,MA X,FAIRMAN F W. QR-factorization method for computing the greatest common divisor of polynomials with inexact coefficients[J]. IEEE Trans Signal Processing,2000,48(11):3042 – 3051.

[5] HUAJUN HUANG,TIN-YAU TAM. An asymptotic behavior of QR decomposition[J]. Linear Algebra and Its Applications. 2007,424(2):96 – 107.

[6] Chang Xiaowen,Paige C C,Stewart G W. Perturbation analysis for the QR factorization[J]. SIAM J Matrix Anal Appl,1997,18(2):775 – 791 .

[7] Stewart,G. W. Error analysis of QR updating with exponential windowing [J], Math. Comp., 1992, 199 (1): 135 – 140.

[8] 邹红星,王殿军,戴琼海,等. 行(或列)对称矩阵的 QR 分解[J]. 中国科学(A 辑),2002,32(9):842 – 849.
Zou H-X,Wang D-J,Dai Q-H et al. QR factorization for row or column symmetric matrix[J]. Science of China (Series A),2002,32(9)842 – 849.(in Chinese)

[9] 蔺小林,蒋耀林. 酉对称矩阵的 QR 分解及其算法[J]. 计算机学报,2005,28(5):818 – 822.
LIN Xiao-Lin,JIANG Yao-Lin. QR decomposition and algorithm for unitary symmetric matrix[J]. Chinese Journal of Computers,2005,28(5):818 – 822.(in Chinese)

[10] 丛进,杨绿溪. 基于 QR 分解的 MIMO 信道盲辨识和盲均衡方法[J]. 电子学报,2004,32(10):1589 – 1593.
CONG Jin,YANG Lu xi. Blind identification and blind equalization of MIMO channels based on QR factorization [J]. Acta Mathematica Sinica, 2004, 32 (10): 1589 – 1593.(in Chinese)

[11] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京:清华大学出版社,2004.9.
Zhang X-D. Matrix Analysis and Applications[M]. Beijing:Tsinghua University Press,2004.9.(in Chinese)

[12] 刘永辉,田永革. 矩阵广义逆的一个混合反序律[J]. 数学学报,2009,52(01): 197 – 204.
Liu Y-H,Tian Y-G. A mixed-type reverse order law for generalized inverse of a triple matrix product[J]. Acta Mathematica Sinica,2009,52(01):197 – 204.(in Chinese)

[13] 邹红星,王殿军,戴琼海,李衍达. 延拓矩阵的奇异值分解[J]. 电子学报,2001,29(3):290 – 292.
ZOU Hong xing,WANG Dian jun,DAI Qiong hai,LI Yan da. Singular value decomposition for extended matrix[J]. Acta Electronica Sinica,2001,29(3):290 – 292 .(in Chinese)

[14] 袁晖坪. 泛延拓矩阵的奇异值分解[J]. 电子学报,2012,40(8):1539 – 1543.
YUAN Hui-ping. Singular value factorization for universal extended matrix [J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40 (8):1539 – 1543.(in Chinese)

作者简介

袁晖坪　男,1958 年出生,重庆人,重庆工商大学三级教授,硕士生导师,从事矩阵论、数字图像分析、信号处理等研究.
E-mail:yhp@ctbu.edu.cn;hpyuan@163.com