

基于双曲函数的双忆阻器混沌电路 多稳态特性分析

闵富红¹, 王珠林^{1,2}, 曹 弋¹, 王恩荣¹

(1. 南京师范大学电气与自动化工程学院, 江苏南京 210042;
2. 中核武汉核电运行技术股份有限公司 湖北武汉 430223)

摘 要: 基于经典蔡氏混沌振荡电路, 引入一种双曲余弦函数的新型磁控忆阻器模型, 设计含有两个双曲余弦忆阻器的混沌电路系统, 讨论了系统平衡点集面的稳定区间. 选择不同的忆阻初始值进行数值仿真, 通过分岔图与 Lyapunov 指数谱研究双曲忆阻混沌系统的多稳态特性. 结果表明, 含双曲函数的双忆阻混沌电路具有复杂的动力学行为, 运动轨迹不仅依赖于电路参数, 还受电路的初始状态影响, 由此产生了不同拓扑结构的混沌吸引子与不同周期运动的多稳态隐藏吸引子共存现象.

关键词: 忆阻器; 多稳态特性; 动力学行为; 混沌系统

中图分类号: TP271

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2018)02-0486-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.02.031

Multistability Analysis of a Dual-Memristor Circuit Based on Hyperbolic Function

MIN Fu-hong¹, WANG Zhu-lin^{1,2}, CAO Yi¹, WANG En-rong¹

(1. School of Electrical and Automation Engineering, Nanjing Normal University, Nanjing, Jiangsu 210042, China;
2. China Nuclear Power Operation Technology Corporation, LTD. Wuhan, Hubei 430223, China)

Abstract: A novel magnetron memristor model based on the hyperbolic sine function is proposed. And then, a new type of five-dimensional dual-memristor chaotic circuit is built by replacing the nonlinear resistance in the Chua's system with the magnetron memristor model. It is found that the dual-memristor system has the equilibrium point set. In addition, the numerical simulation of the memristive system is carried out by selecting the different initial values of the system and the multistability characteristics of the fifth-order chaotic system are analyzed in detail by using the bifurcation diagram and Lyapunov exponent spectrum. The results show that the dual-memristive chaotic circuit is different from the dynamic behavior of the chaotic system. The motion trajectory of system depends not only on the circuit parameters but also on the initial state of the circuit, resulting in the coexistence of different periodic motions and different chaotic attractors with different topologies.

Key words: memristor; multistable characteristic; dynamical behavior; chaotic system

1 引言

忆阻器是被用来描述磁通和电荷的关系, 是除电容、电阻、电感外的第四个基本电路元件, 它的出现使基础电路元件增加到了四个, 为电路设计与应用提供了全新的发展空间. 2008年, 惠普公司首次在《自然》上报道研制出了具有典型忆阻特征的固态忆阻器^[1], 证明

了 Chua 于 1971 年从理论上预测的第四种基本电路元件忆阻器的存在性^[2]. 此后随着国内外学者的投入研究, 忆阻器神奇的面纱逐渐被揭开了, 并已成为电路、计算机科学等众多领域的研究热点^[3,4], 短短几年学者们取得了丰硕的研究成果. 文献[5]采用二次型磁控忆阻器作为系统的正反馈项, 搭建了一个 Lorenz 忆阻超混沌电路. 文献[6]基于三次非线性忆阻模型提出了一种

含忆阻器的多涡卷混沌系统,发现系统存在 4 种状态隐藏的共存吸引子. 文献[7]设计了一种拥有两个忆容器的混沌电路,并详细探讨了随时间演化下系统出现的共存状态、状态转换以及瞬态混沌等复杂现象. 文献[8]提出了一个三次非线性磁控忆阻器的变形蔡氏混沌电路,并利用基本电路元件电阻、电容、电感和忆阻模型完成了电路仿真. 文献[9]设计了仅由二极管桥和串联 RL 滤波器构成的一阶忆阻等效电路,该电路结构简单、无接地限制. 文献[10]基于蔡氏混沌振荡电路,利用三次非线性特性函数,设计了一个含有两个忆阻器的光滑混沌电路,但是没有对双忆阻器混沌系统的多稳态特性进行深入分析.

本文将使用一种含双曲余弦函数的新型忆阻器电路模型,并将其引入到蔡氏振荡电路,替换了其中的二次非线性有源磁控忆阻器,进而导出一个新型五阶忆阻混沌电路. 重点分析改变忆阻初始状态时系统的运行轨迹,探索不同隐藏吸引子的多稳态共存等奇异的非线性物理现象,验证系统对忆阻初始值具有极强的依赖性. 根据系统的参数分岔图和 Lyapunov 指数谱证实新系统拥有更加丰富的动力学行为,发现隐藏的共存吸引子种类可达到 12 种. 尽管忆阻混沌系统存在隐藏吸引子已有少量报道,但是种类如此多的多稳态共存忆阻系统尚不多见,因而具有重要潜在的应用价值.

2 系统模型

本文涉及的含双曲函数的磁控型忆阻器模型为^[11]:

$$\begin{cases} q(\varphi) = \sinh(\varphi) \\ W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d(\varphi)} = \cosh(\varphi) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $q(\varphi)$ 表示磁控忆阻器的阻值, φ 表示磁通量, $W(\varphi)$ 为忆导模型. 设流过忆阻器两端电流为 i , 其两端电压为 v , 在忆阻器两端施加正弦电压 $\sin(2\pi ft)$ 作为激励, 于是有

$$\begin{cases} v = \sin(2\pi ft) \\ i = W(\varphi)v = \cosh(\varphi)v \\ d\varphi/dt = v \end{cases} \quad (2)$$

由式(2)可绘出图 1 的电压电流关系图, 可见所设计的忆阻模型具有的电压和电流关系为一条具有斜“8”字形的类紧磁滞回线形状^[1], 拥有忆阻模型的电压-电流关系特性.

下面将式(1)描述的双曲型忆阻器应用到典型蔡氏电路系统中, 用一个忆阻器替换蔡氏电路的二极管, 另一个忆阻器与电阻 R_2 串联, 获得一个新的含有两个双曲函数的忆阻器混沌振荡电路, 如图 2 所示. 电路共有五个动态元件, 即两个电容、两个新型双曲余弦非线性忆阻器和

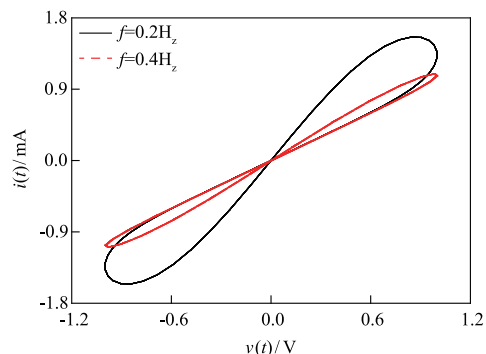


图1 电压与电流关系

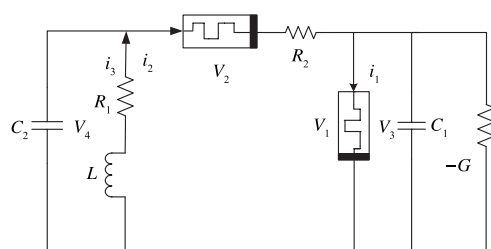


图2 含有两个忆阻器的混沌电路

一个电感, 与动态元件对应的五个状态变量分别为 v_3 、 v_4 、 φ_1 、 φ_2 和 i_3 , 其中 φ_1 和 φ_2 为所涉及的两个新型忆阻器的内部状态变量. 根据每个元件的伏安特性与基尔霍夫电流电压定律, 列出图 2 中电路的微分方程组为:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{dt} = v_3 \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{v_4 - v_3}{R_2 W_2 + 1} \\ \frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{C_1} \left[(G - W_1)v_3 - \frac{W_2}{R_2 W_2 + 1}(v_3 - v_4) \right] \\ \frac{dv_4}{dt} = \frac{1}{C_2} \left[\frac{W_2}{R_2 W_2 + 1}(v_3 - v_4) + i_3 \right] \\ \frac{di_3}{dt} = -\frac{1}{L}v_4 - \frac{R_1}{L}i_3 \end{cases} \quad (3)$$

令 $x = \varphi_1$, $y = \varphi_2$, $z = v_3$, $u = v_4$, $v = i_3$, $a = 1/C_1$, $b = 1/L$, $c = R_1/L$, $d = G$, $e = R_2$, $C_2 = 1$, 上式可简化成如下无量纲模型:

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{y} = \frac{u - z}{eW_2 + 1} \\ \dot{z} = a \left[(d - W_1)z - \frac{W_2}{eW_2 + 1}(z - u) \right] \\ \dot{u} = \frac{W_2}{eW_2 + 1}(z - u) + v \\ \dot{v} = -bu - cv \end{cases} \quad (4)$$

其中, 非线性函数为 $W_1 = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 和 $W_2 = \cosh$

$(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$. 由于双曲函数由超越指数函数构成, 因而忆阻电路系统(4)具有丰富的复杂动力学行为. 当系统参数为 $a=8, b=10, c=0.01, d=2, e=0.1$, 初始值为 $(0.001, 0, 0.001, 0, 0.001)$ 时, 系统(4)存在一个典型的混沌运动, 如图3所示, 系统包含着复杂的拉伸和扭曲结构, 但是从整体上看系统是稳定的. 此时, 系统(4)的 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_1=0.283, \lambda_2=0.037, \lambda_3=-0.041, \lambda_4=0, \lambda_5=-2.359$, 其中两个指数大于零, 两个指数小于零, 一个指数等于零, 且 Lyapunov 维数为 4.118, 说明系统(4)运动具有超混沌特性.

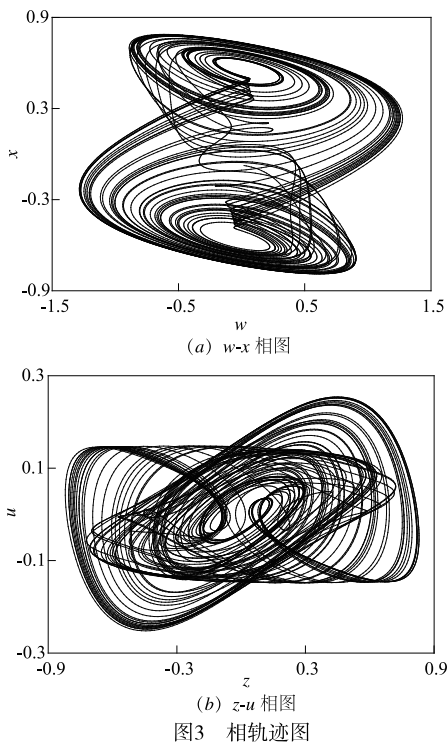


图3 相轨迹图

3 平衡点集及稳定性分析

令非线性忆阻系统(4)方程的右边等于零, 得到:

$$\begin{cases} z=0 \\ \frac{u-z}{eW_2+1}=0 \\ a[(d-W_1)z - \frac{W_2}{eW_2+1}(z-u)] = 0 \\ \frac{W_2}{eW_2+1}(z-u) + v = 0 \\ -bu - cv = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中, $W_1 = \cosh(x), W_2 = \cosh(y)$. 当参数 $a=8, b=10, c=0.01, d=2, e=0.1$ 时, 系统的平衡点集为:

$$A = \{(x, y, z, u, v) \mid z=u=v=0, x=l_1, y=l_2\} \quad (6)$$

上式中, l_1, l_2 均为实常数. 可见, $x-y$ 平面上每个点都是

系统的平衡点, 形成整个平衡点集面. 式(4)在平衡点集处的 Jacobi 矩阵 J_A 为:

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & g & 0 \\ 0 & 0 & ag(d-h_1-h_2) & agh_2 & 0 \\ 0 & 0 & gh_2 & -gh_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b & c \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中, $h_1 = \cosh(l_1), h_2 = \cosh(l_2), g = 1/(1 + e \cosh(l_2))$. 平衡点集 A 的特征根方程为:

$$\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 = 0 \quad (8)$$

多项式系数 a_1, a_2, a_3 都是不等于零的实常数,

$$\begin{cases} a_1 = 8h_1 + 9gh_2, \\ a_2 = 8g(h_1 - 2)h_2 + 10, \\ a_3 = 80(h_1 + gh_2 - 2) \end{cases} \quad (9)$$

根据 Routh-Hurwitz 稳定条件, 特征方程(8)所有根具有负实部的充要条件为:

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_1 > 0, \\ \Delta_2 = a_1a_2 - a_3 > 0, \\ \Delta_3 = a_3(a_1a_2 - a_3) > 0 \end{cases} \quad (10)$$

电路各参数均保持固定不变, 仅改变两个忆阻器的初始状态, 选择 $l_1 \in (-2, 2), l_2 \in (-2, 2)$. 由式(10)可得位于 $x-y$ 平面上的稳定范围, 如图4所示, 白色圆环以及空白区域为系统的稳定区域, 其余灰色部分为不稳定区域. 当 $l_1=0$ 时, 求得 l_2 在 l_1 坐标轴上对应的稳定范围是 $0.448 < |l_2| < 0.554$; 当 $l_2=0$ 时, 求得 l_1 在坐标 l_2 轴上对应的稳定范围是 $|l_1| > 1.205$ 及 $0.417 < |l_1| < 0.572$.

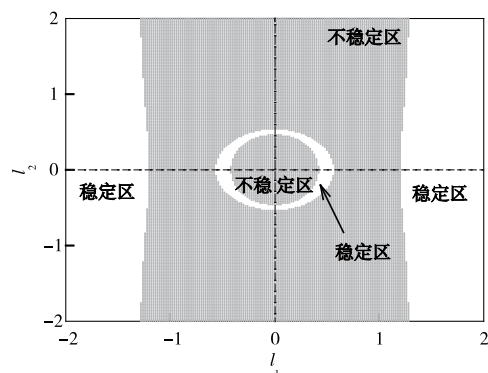


图4 系统平衡点集的稳定性分布

选择系统参数 $a=8, b=10, c=0.01, d=2, e=0.1$, 初始状态为 $(x(0), y(0), 0, 0, 0.0001)$. 设 $x(0), y(0)$ 为可变参数. 当 $y(0)=0$ 时, 系统(3)随初始状态 $x(0)=l_1$ 变化的李雅普指数谱如图5(a)所示, 其大致关于 $l_1=0$ 对称, 混沌区域由原点向外扩散, 经过一段稳定环区后, 又迅速进入不稳定区, 最终在 $|l_1| > 1.205$ 范围内进入稳定区域, 不稳定区域消失, 系统不稳定范围是

$|l_1| < 0.443$ 以及 $0.572 < |l_1| < 1.205$, 可见在区间 $-0.443 \leq l_1 \leq -0.417$ 内, 仿真发现此时系统最大李氏指数为正. 当 $x(0) = 0$ 时, 系统(3)随初始状态 $y_0 = l_2$ 变化的李雅普指数谱如图 5(b) 所示, 关于 $l_2 = 0$ 对称, 随着 $|l_2|$ 的逐渐增大, 系统由不稳定区逐渐过渡到稳定的环状区, 最终在 $|l_2| > 0.554$ 范围内处于混沌, 系统在初始值 l_2 变化下的稳定范围是 $0.448 < |l_2| < 0.522$, 而理论分析在区间 $0.522 \leq l_2 \leq 0.554$ 内系统也处于稳定运动. 可见, 数值仿真与理论分析的稳定域结果存在显微差异的原因, 是系统的平衡点集除了 3 个非零特征根以外还有 2 个零特征根. 由图 5 可知, Lyapunov 指数谱取值分别随着初始态变化而改变, 出现了大于零、等于零和小于零的变化, 说明了忆阻电路系统(4)在不同的初始状态作用下, 呈现周期、混沌、超混沌等多稳态共存. 下面将详细探索含双曲函数的双忆阻系统(4)中隐藏的不同多稳态共存吸引子.

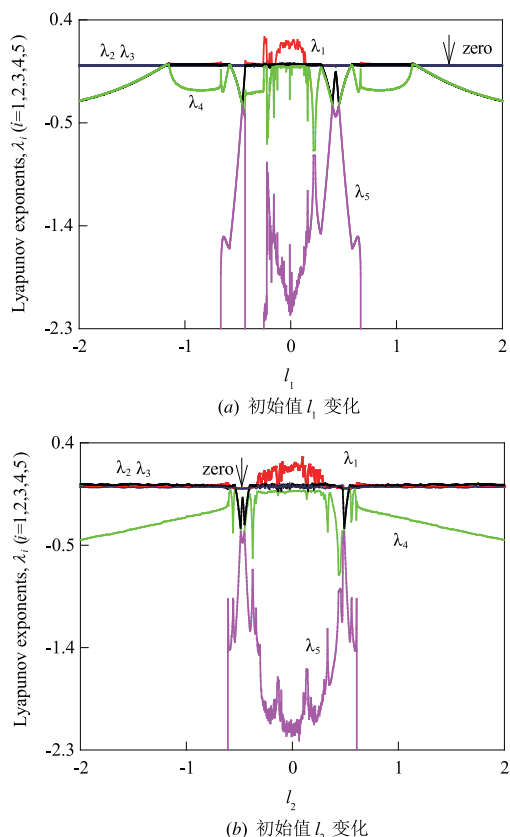


图5 忆阻器初始状态变化时Lyapunov指数谱

4 多隐藏吸引子的共存现象

为了详细分析忆阻电路系统(4)随着初始状态的变化而呈现的多稳态特性, 表 1 中给出了系统不同初始值 $IC_i (i=1, 2, \dots, 12)$ 代表的参数. 初始值的选取与图 4 所描绘的系统随忆阻初始状态的稳定性分布有关, 都位于平衡点集区域内, 先从图 4 中内部椭圆形的不稳定

区域选取数据, 包括 4 组对称点 (IC_1, IC_3, IC_4, IC_5), 4 组坐标轴上面的点 ($IC_9, IC_{10}, IC_{11}, IC_{12}$), 坐标原点的初始值 $IC_7 = (\pm 0.001, \pm 0.001, 0, 0, 0.0001)$ (该四种组合时系统运行状态一致). 再选取稳定圆环外的不稳定区域内 2 组初始值 (IC_2, IC_6) 及距圆环较远的初始值 (IC_8), 仿真发现距离坐标原点区域较远时, 忆阻系统动力学行为不够丰富, 只选择了一种初始状态. 系统参数的取值同前. 选取表 1 中不同的初始状态进行仿真, 利用 Lyapunov 指数谱及分岔图分析磁控忆阻系统(4)出现的多稳态共存现象.

表 1 所取的系统初始值

$IC_i (i=1, 2, \dots, 12)$	对应参数
IC_1	$(-0.1, -0.1, 0, 0, 0.0001)$
IC_2	$(0.5, -0.5, 0, 0, 0.0001)$
IC_3	$(-0.1, 0.1, 0, 0, 0.0001)$
IC_4	$(0.1, -0.1, 0, 0, 0.0001)$
IC_5	$(0.1, 0.1, 0, 0, 0.0001)$
IC_6	$(-0.5, 0.5, 0, 0, 0.0001)$
IC_7	$(\pm 0.001, \pm 0.001, 0, 0, 0.0001)$
IC_8	$(1, 0, 0, 0, 0.0001)$
IC_9	$(0.1, 0, 0, 0, 0.0001)$
IC_{10}	$(0, 0, 0.1, 0, 0.0001)$
IC_{11}	$(-0.1, 0, 0, 0, 0.0001)$
IC_{12}	$(0, 0, -0.1, 0, 0.0001)$

当选取初始状态为 IC_1 时, 系统(3)随参数 b 变化的 Lyapunov 指数谱及分岔图如图 6 所示; 图 6(a) 中在参数 $b = 10.217, b = 10.521, b = 11.998, b = 12.410$ 处系统的第四根 Lyapunov 指数谱 (λ_4) 与零线相切, 与图 6(b) 分岔图中出现倍周期分岔的位置完全一致. 在整个参数域变化范围内, 磁控忆阻系统(4)都符合出现混沌运动时对应的最大 Lyapunov 指数谱大于零, 出现周期运动时最大 Lyapunov 指数谱等于零, 以及系统运行在不稳定的不动点时最大 Lyapunov 指数谱小于零.

当选取初始状态为 IC_2, IC_6 时, 系统(3)随参数 b 变化的 Lyapunov 指数谱及其分岔图如图 7 所示, 由于初始状态的对称性, 初始状态 IC_2, IC_6 下的 Lyapunov 指数谱是完全一样. 图 7(a) 中在参数 $b \in (9.200, 9.930), b \in (10.114, 10.784)$ 时, 系统的第一根 Lyapunov 指数谱 $\lambda_1 > 0$ 大于零, 与图 7(b) 中的混沌域基本对应. 在系统参数 $b = 11.170, b = 10.864$ 时, 两组初始值 IC_2, IC_6 对应分岔图均发生了倍周期分岔现象, 系统的运动状态不一样.

当选取初始状态为 IC_3 时, 系统(3)随参数 b 变化的 Lyapunov 指数谱以及分岔图如图 8 所示. 从图 8(a) 可见参数 $b = 12.309$ 时, 系统的第四根 Lyapunov 指数谱 (λ_4) 与零线相切, 对应的指数谱分别为 $\lambda_1 = 0.0065, \lambda_2 = -0.0051, \lambda_3 = -0.0043, \lambda_4 = -0.0163, \lambda_5 = -2.0983$, 其中有 4 个指数逼近于零, 1 个指数小于零, 说明此时系统处

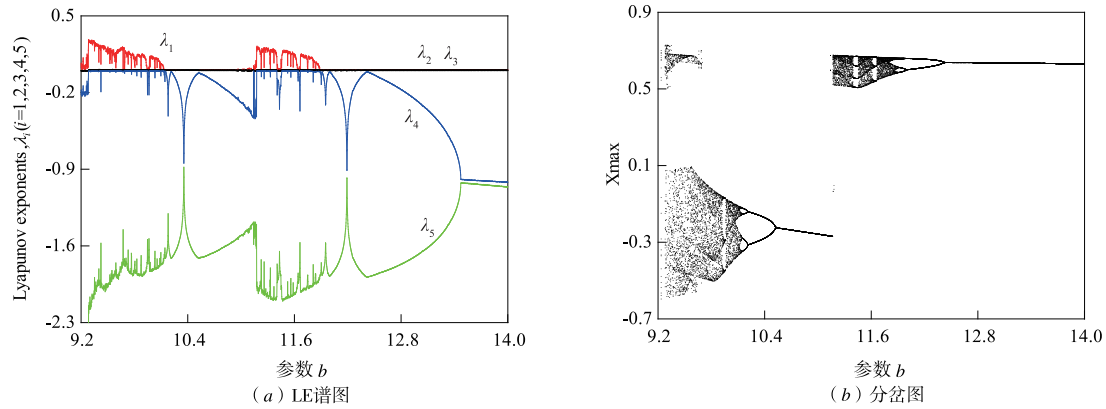


图6 初始值 IC_1 时系统的LE谱图及分岔图

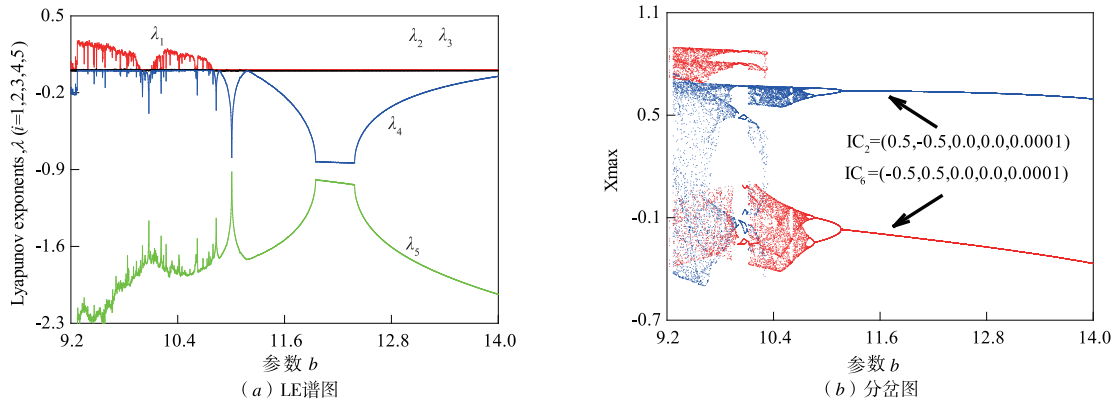


图7 初始值 IC_2 、 IC_6 时系统的LE谱图及分岔图

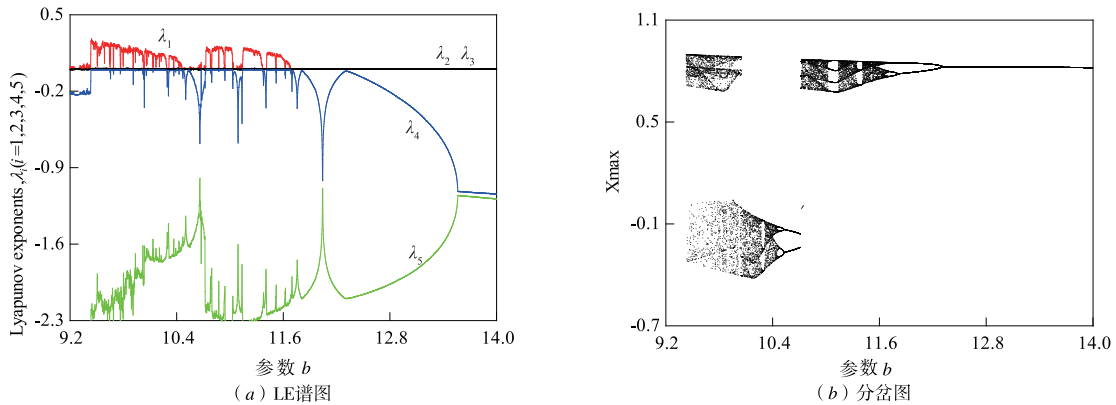
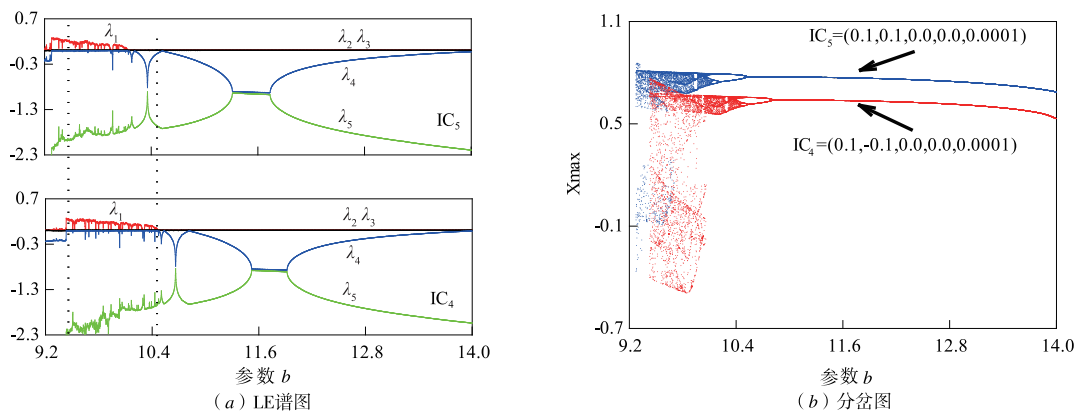


图8 初始值 IC_3 时系统的LE谱图及分岔图

于4维环面上的准周期运动. 从图8(b)中分岔图可见系统在 $b \in (10.462, 10.715)$ 、 $b \in (11.009, 11.152)$ 以及 $b \in (11.690, 14)$ 时处于准周期或窄周期窗运动, 对应的 Lyapunov 指数谱中的最大指数均不大于零, 证明了两图所反映的系统运动状态一致.

当选取初始状态为 IC_4 、 IC_5 时, 系统(3)随参数 b 变化的 Lyapunov 指数谱与对应的分岔图如图9所示. 由图9(a)可见系统在初始值 IC_4 、 IC_5 状态下出现混沌时, 参数 b 的取值以及混沌带的长度均不同. 当参数 b

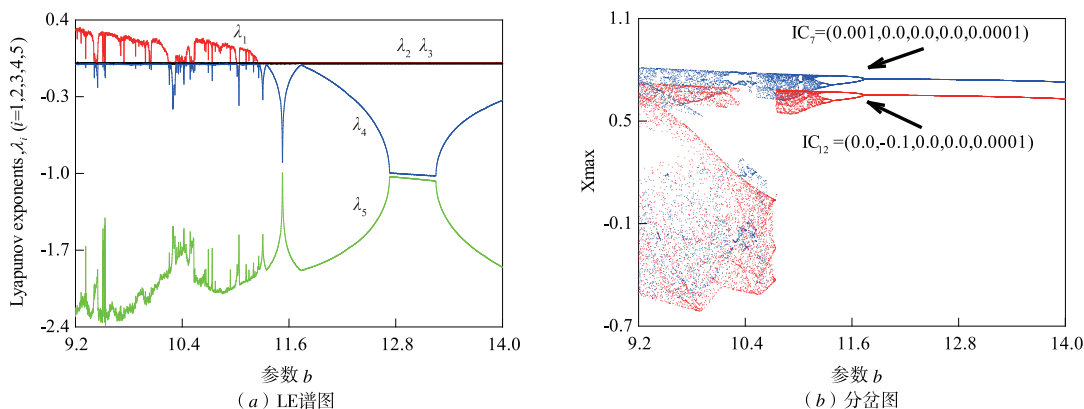
$= 10.450$ 时, 系统在初始值 IC_4 条件下开始进入混沌区, 此时最大 Lyapunov 指数 $\lambda_1 = 0.1261 > 0$, 而在初始值 IC_5 条件下系统仍然处于周期运动, 系统最大李氏指数 $\lambda_1 = -0.0042$ 趋向于零. 随着系统参数的减小, 当 $b = 9.425$ 时, 系统在初始值 IC_4 条件下最大李氏指数逐渐减小到零, 开始进入周期状态, 而在初始值 IC_5 条件下系统仍然处于混沌运动, 最大李氏指数 $\lambda_1 = 0.2683 > 0$. 由图9(b)可观察到在初始值 IC_4 、 IC_5 状态下系统的分岔图发生了平移和错位现象, 由此出现了周期2-

图9 初始值 IC_4 、 IC_5 时系统的LE谱图及分岔图

周期 1 ($b = 10.654$)、周期 4-周期 2 ($b = 10.491$)、混沌单涡卷-周期 2 ($b = 10.654$)、周期 4-混沌单涡卷 ($b = 10.166$) 等复杂的隐藏多稳态共存吸引子现象。

当选取初始状态为 IC_7 时,系统(3)随参数 b 变化的 Lyapunov 指数谱以及对应的分岔图如图 10 所示. 在图 10(a)中参数 $b = 11.73$ 附近系统的第四根 Lyapunov 指数谱(λ_4)与零线相切,系统在该位置时两个不同初始值同时发生了倍周期分岔. 从图 10(b)可见系统在两

初始值条件下分岔图存在明显差异,出现了周期 1-周期 1 ($b = 12$)、周期 2-周期 2 ($b = 11.5$)、周期 4-周期 4 ($b = 11.279$)、混沌单涡卷-混沌单涡卷 ($b = 10.896$) 等复杂的多稳态共存现象. 在参数 $b = 9.3$ 时系统 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_1 = 0.3016, \lambda_2 = 0.0120, \lambda_3 = -0.0024, \lambda_4 = -0.0049, \lambda_5 = -2.1743$, 有 2 个指数大于零, 2 个指数逼近于零, 1 个指数小于零, 表明系统处于 4 维环面上的超混沌运动。

图10 初始值 IC_7 、 IC_{12} 时系统的LE谱图及分岔图

当选取初始状态为 IC_8 、 IC_9 时,系统(3)随参数 b 变化的 Lyapunov 指数谱及其分岔图如图 11 所示. 图 11(a)中初始值为 IC_8 时,系统始终运行在周期 1 状态下. 在初始值为 IC_9 条件下,随着系统参数 b 减小,当 $b = 10.745$ 时系统发生了倍周期分岔进入周期 2,随后再次经历倍周期分岔进入周期 4,参数继续减小,系统开始进入混沌域, Lyapunov 指数谱开始出现正值;在参数 $b = 9.394$ 附近, Lyapunov 指数谱跃变为零,观察分岔图可知此时系统由混沌状态直接进入了周期 1 运动. 可知,在初始值 IC_8 、 IC_9 条件下发生了周期 1-周期 1 ($b = 12$)、周期 1-周期 2 ($b = 10.572$)、周期 1-周期 4 ($b = 10.420$)、周期 1-混沌单涡卷 ($b = 9.874$)、周期 1-周期 1 ($b = 9.3$) 等复杂的多稳态共存现象。

当选取初始状态为 IC_{10} 、 IC_{11} 时,系统(3)随参数 b 变化的 Lyapunov 指数谱以及分岔图如图 12 所示. 随着参数 b 的减小,系统在初始值为 IC_{10} 条件下,依次经历了倍周期分岔后进入混沌运动,当参数 $b \in (10.712, 10.764)$ 区间时,出现了短暂的窄周期窗,随后一直运动在混沌状态. 而初始值为 IC_{11} 的系统运动状态更为复杂,在 $b = 11.24$ 时系统发生鞍结分岔,并进入周期 1 运动;在 $b = 10.784$ 时,发生了倍周期分岔,系统进入周期 2 运动;在 $b = 10.479$ 附近,再次发生了倍周期分岔,系统进入周期 4 运动;在 $b = 10.398$ 附近,系统开始逐步进入混沌运动. 可知,在初始值 IC_{10} 、 IC_{11} 条件下同样发生了复杂的多稳态共存现象。

更好地观察与分析系统的多稳态共存特性,根据

图 6 到图 12 中的系统参数变化的李亚普指数谱以及分岔图,列举了八组典型不同的系统初始值变化的共存情况,如表 2 所示. 其中, $C_i (i=1,2,\dots,12)$ 表示系统处于拓扑结构不同的双涡卷吸引子, $C_{Ri} (i=1,2,\dots,12)$ 表示系统处于右半平面的单涡卷混沌吸引子, $C_{Li} (i=1,2,\dots,12)$ 表示系统处于左半平面的拓扑结构不同的单涡卷混沌吸引子, $P_i^{(j)} (i=1,2,\dots,12; j=1,2,\dots,12)$ 表示系统处于 i 周期运动状态, j 表示出现 i 周期运动

的不同种类. 表 2 最右边一列表示在同一参数条件下系统达到的多稳态共存类型,包含不同拓扑结构的混沌吸引子与不同周期运动的共存情况. 例如:当参数 $b=10$ 时,系统可观察到存在 12 种共存的隐藏多吸引子;而当参数 $b=12.5$ 时,仅存在两种不同的周期 1 运动共存. 为了更好的观察表 2 中共存吸引子分类,下面将选择两种参数情况说明.

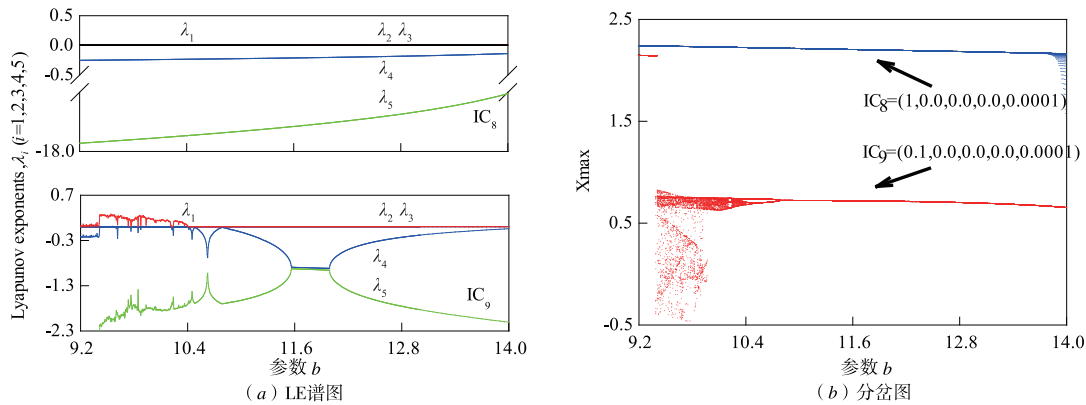


图 11 初始值 IC_8 、 IC_9 时系统的 LE 谱图及分岔图

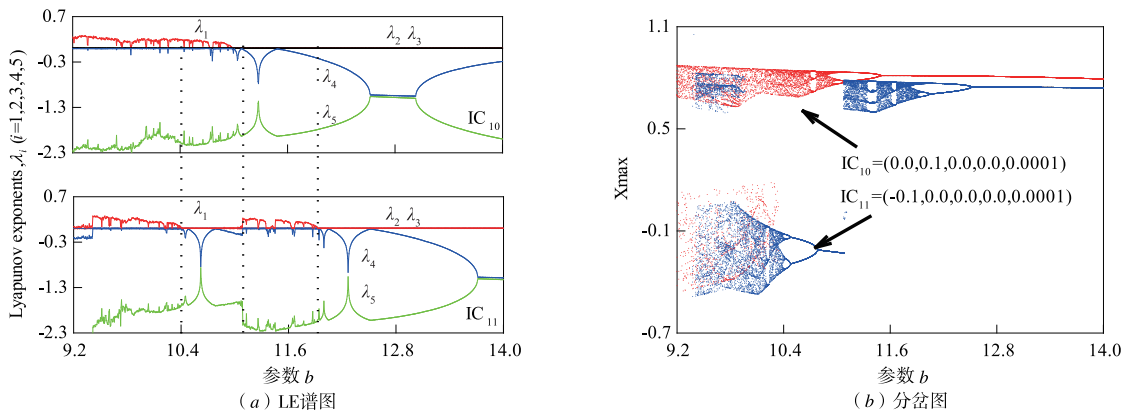


图 12 初始值 IC_{10} 、 IC_{11} 时系统的 LE 谱图及分岔图

表 2 系统共存吸引子分类

参数 b	初始值												共存种数
	IC_1	IC_2	IC_3	IC_4	IC_5	IC_6	IC_7	IC_8	IC_9	IC_{10}	IC_{11}	IC_{12}	
$b=9.5$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	8
$b=10$	C_{R1}	$P_3^{(1)}$	C_1	C_2	C_{L1}	$P_3^{(2)}$	C_3	P_1	C_{12}	C_4	C_{R4}	C_5	10
$b=10.15$	$P_4^{(1)}$	C_1	C_1	C_{L1}	$P_4^{(2)}$	C_2	C_3	P_1	C_{L1}	C_4	C_{R1}	C_5	10
$b=10.41$	$P_2^{(1)}$	C_{L1}	C_{R1}	C_{12}	$P_2^{(2)}$	C_{R2}	P_6	P_1	C_{L1}	C_{13}	P_8	C_{R2}	10
$b=10.48$	$P_2^{(1)}$	C_{L1}	P_8	P_4	$P_2^{(2)}$	C_{R1}	C_1	P_1	P_4	C_{L1}	P_8	C_{R1}	8
$b=11.4$	C_{L1}	$P_1^{(1)}$	P_3	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_4^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	P_2	$P_4^{(2)}$	P_2		7
$b=11.95$	$P_2^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_2^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(2)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	P_4	$P_1^{(1)}$	4
$b=12.5$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(2)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	$P_1^{(1)}$	2

(1) 当选取参数 $b=10$ 时,系统出现 12 种不同多稳态吸引子共存如图 13 所示. 图 13(a) 表示系统在初始值 IC_1 、 IC_5 和 IC_7 时的对称单涡卷吸引子以及双涡卷

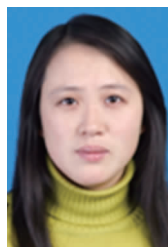
吸引子共存的相位图;图 13(b) 表示系统在初始值 IC_3 和 IC_4 时的斜对称的混沌相位图,此时李雅普诺夫指数为 $\lambda_1 = 0.1294, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -0.0054, \lambda_5 = -1.8287$,系统处于 3 维环面上的混沌运动;图 13(c) 表示系统在初始值 IC_2 和 IC_6 时出现对称的周期 3 运动;图 13(d) 表示系统呈现了大的周期 1 运动;图 14(e) 和 (f) 系统在初始值 IC_9 、 IC_{11} 、 IC_{10} 、 IC_{12} 时对称的单涡卷与双涡卷混沌相位图. 可见,从相空间中不同初始位置出发的系统运行轨迹,存在了多种完全不同的稳定性,分别在相空间中有着相互独立的混沌吸引盆和准周期吸引盆.

(2) 当系统参数 $b=11.4$ 时,系统出现 7 组不同初始状态下的相轨迹共存如图 14 所示. 图 14(a) 表示系

- a memristor-based multi-scroll hyper-chaotic system [J]. Chaos, 2016, 26: 073107.
- [7] Mou J, Sun K, Ruan J, et al. A nonlinear circuit with two memcapacitors [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86 (3): 1735 - 1744.
- [8] Muthuswamy B. Implementing memristor based chaotic circuits [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2010, 20 (5): 1335 - 1350.
- [9] 武花干, 包伯成, 徐权. 基于二极管桥与串联 RL 滤波器的一阶广义忆阻模拟器 [J]. 电子学报, 2015, 43 (10): 2129 - 2132.
Wu H G, Bao B C, Xu Q. First order generalized memristor emulator based on diode bridge and series RL filter [J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43 (10): 2129 - 2132. (in Chinese)
- [10] 包伯成, 史国栋, 许建平. 含两个忆阻器混沌电路的动力学分析 [J]. 中国科学: 技术科学, 2011, 41 (8): 1135 - 1142.
Bao B C, Shi G D, Xu J P, et al. Dynamics analysis of chaotic circuit with two memristors [J]. Sci China Tech Sci, 2011, 41 (8): 1135 - 1142. (in Chinese)
- [11] 闵富红, 王珠林, 王恩荣, 曹弋. 新型忆阻器混沌电路及其在图像加密中的应用 [J]. 电子与信息学报, 2016, 38 (10): 2681 - 2688.

Min Fuhong, Wang Zhulin, Wang Enrong, Cao Yi. New memristor chaotic circuit and its application to image encryption [J]. JEIT, 2016, 38 (10): 2681 - 2688. (in Chinese)

作者简介



闵富红 (通信作者) 女, 1970 年生, 教授, 南京师范大学硕士研究生导师, 研究方向为非线性电路系统的动力学分析.

E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn



王珠林 男, 1990 年生, 硕士, 控制理论与控制工程专业, 研究方向为非线性系统的混沌控制与同步.

E-mail: 302576481@qq.com