

均匀分数路由网络容量域分析

刘宴涛¹, 刘 珩²

(1. 渤海大学工学院, 辽宁锦州 121013; 2. 北京理工大学信息与电子学院, 北京 100081)

摘 要: 均匀分数路由网络是指网络边传输的数据包具有相同的维数,且该维数与信源消息的维数可以不同. 已知分数路由网络的容量域是多维欧式空间中的多胞体,但对各种业务模式网络的容量域的计算尚缺乏有效的可操作方法. 本文研究了三种业务模式的容量域计算方法:针对多重单播,提出了基于缩减图、合并缩减图和虚拟节点的方法;针对一重组播,提出了基于子树分解和组合设计的方法;针对二重混合网络,提出了基于凸多边形极点的方法. 除了理论证明之外,还举了大量样例演示这些方法的正确性.

关键词: 分数路由; 容量域; 多胞体; 组合设计; 子树分解

中图分类号: TN915

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2018)08-1876-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.08.011

Rate Region Analysis for Uniform Fractional Routing Networks

LIU Yan-tao¹, LIU Heng²

(1. College of Engineering, Bohai University, Jinzhou, Liaoning 121013, China;

2. School of Information and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: If packets are with identical dimensions, which may be different from the dimensions of source messages, the network is called uniform fractional routing network. The rate region of a fractional routing network is a polytope in a multidimensional Euclidean space, but effective implementable methods are still missing to calculate the region for networks with different traffic patterns. This paper studied rate region analysis methods for three traffic patterns: For multiple unicasts, a method based on reduced graph, union reduced graph, and virtual node was proposed; For a single multicast, it was based on subtree decomposition and combinatorial design; For a pattern mixed of two flows, the polygon region was drawn by determining all extreme points. Correctness of these methods was proved in theory and illustrated by examples.

Key words: fractional routing; rate region; polytope; combinatorial design; subtree decomposition

1 引言

网络容量是指网络能传输的最大信息率,它度量了网络的最大传输能力,是网络通信的一项关键指标. 网络容量在网络信息论中的地位和作用可以比拟于信道容量在香农信息论中的地位和作用,计算网络容量是网络信息论的一项基本任务. 当网络中包含多个业务流时,其传输能力由多维的容量域刻画. 分组网络从业务模式上分为单播、组播和混合网络,从传输机制上分为路由和编码网络,对应的容量域分别被称为路由容量域和编码容量域. 从业务模式和传输机制的角度,对容量域的研究现状如表 1 所示. 其中:一重单播网络

的路由容量服从最大流最小割定理,即网络能传输的最大流等于信源信宿间的最小割,这被称为最小割限. 由于编码不能提高一重单播网络的吞吐量,因此一重单播网络的编码容量也等于最小割限. 2000 年, Ahlswede 等^[1]证明一重组播网络的编码容量等于信源信宿间最小割的最小值. 除了这三种由最小割限确定的容量域之外,对于一重组播网络的路由容量域和各种混合网络的路由容量域和编码容量域不存在像最小割限那样明确、简单、一般的结论. 这些网络的容量域受很多因素的影响,比如网络拓扑、传输机制、业务模式、信源信宿的数目和位置等等,因此对这些网络容量域需要具体分析.

表 1 分组网络的两组容量域

业务传输模式	路由容量域	编码容量域
一重单播网络	最小割限	最小割限
一重组播网络	未解决	最小割限
多重单播网络	未解决	未解决
单播组播混合网络	未解决	未解决

从传输机制上看,路由网络中非源节点的输出是其输入的子集,编码网络中非源节点的输出是其输入的线性函数.因此,对路由容量域和编码容量域的分析方法有着根本不同.在编码容量域方面,Dougherty 等通过一系列论文^[2-5]进行了深入研究.他们^[2]指出线性编码对于达到诸如多重单播等非组播模式的编码容量是不充分的.文献[3]研究了网络容量与字符集的关系,证明有些网络的容量是不可达的.文献[4]提出了拟阵网络的概念并把非香农信息不等式应用于网络容量的计算.文献[5]把编码网络的可达容量域定义为有限维空间中的凸多面体,并应用信息不等式计算了蝶形网络、Fano 网络、非 Fano 网络和 Vámos 网络的编码容量域,但是文献[5]并没有总结出计算编码容量域的一般方法.Yeung^[6]基于熵域 Γ_N^* 定义了多源编码网络的可达容量域,但由于多于三个变量的 Γ_N^* 的特征尚未知,该定义缺乏计算的可操作性.Thakor^[7]采用函数相关图的方法,通过寻找最大不可约集建立网络随机变量的熵、条件熵和互信息等测度需要满足的不等式,从而得到编码容量域的外限.Li 等^[8,9]把计算机辅助工具引入到非同构网络的编码容量域研究中,提出了一种基于枚举的方法计算 Shannon 外限和几种线性码内限.进一步,他们^[10]基于群变换把不同的网络编码问题划分为若干等价类并提出算法计算少于五个源节点的小型网络的编码容量域.Apte 等^[11]应用对称性把多源多宿编码网络划分为网络对称群,将其与多面体对称群相关联,并应用多面体计算中使用的对称性方法来降低对编码容量域分析的复杂度.

在路由容量域方面,Yazdi^[12]提出了不等式消去技术来缓解应用 Japanese 定理求解多商品流容量域复杂度过高的问题.黄佳庆^[13]基于上行链路共享模型讨论了 P2P 文件共享网络的编码容量和路由容量,并证明二者的理论上界是一致的.Liang^[14]把组播路由建模为两个参与者以网络边和组播树为策略集的混合策略博弈,通过计算该博弈可得组播路由容量,这种博弈论思想为容量域研究提供了有益的思路,但在实际应用中,需要建立的收益矩阵的维数等于边数 * 组播树数,即使对于很多小规模的网络,该矩阵也是非常庞大的.Cannons 等^[15]证明路由容量域是可计算的,并通过对样例网络的分析指出存在计算路由容量域的算法,但他

们并没有总结出这样的算法.目前,对路由容量域的分析尚缺乏普适性和操作性高的方法.

由于网络容量域的影响因素众多,拓扑多种多样,网络规模差异很大,所以对网络容量域的分析一直是比较复杂的问题.目前,表 1 中还有几种容量域没有被解决,图论和信息论等领域的理论学者和网络工程技术人员亟待一套有效方法来分析通信网络的传输性能,刻画网络的本质特征,解决网络信息论的基本问题.本文受文献[5]和[15]启发,讨论网络的路由容量域,提出分析路由容量域的具有一般性和可操作性的方法,我们的研究扩展和完善了文献[15]的工作.

2 网络模型与问题描述

均匀分数网络^[5]是分组网络很恰当的模型,该网络属于有向无环图 $G=(V,E)$, V 和 E 分别代表节点集和边集.所有网络边是等容量的,每条边最多只允许传输 n 个符号,故称之为均匀网络.节点间允许存在重边,在一次传输中,每条边只允许使用一次.消息符号集为有限字符集.假设网络传输 h 个独立的消息 X_1, \dots, X_h , $h \geq 1$, 维数分别等于 k_1, \dots, k_h , n 和 k_i 可以不同,但都取自整数.基于该模型,文献[5]定义分数码和容量域如下.

定义 1 (分数码): (k_1, \dots, k_h, n) 分数码由一组边函数和译码函数构成,中间节点应用边函数把输入的 n 维数据包映射为输出的 n 维数据包,信宿节点应用译码函数把收到的 n 维数据包映射为该节点订购的消息.如果这些函数的输出是输入的线性组合,则称该码为分数线性码;如果输出拷贝自一部分输入符号,则称其为分数路由;如果某分数码能够满足所有信宿节点的订购需求,则称该码是可达的.

定义 2 (容量域): 对于 (k_1, \dots, k_h, n) 分数码,定义

$$\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_h) = \left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_h}{n} \right) \quad (1)$$

称 \mathbf{r} 为信息率矢量,全部可达的信息率矢量构成的区域称为该分数码的容量域.

由于规定 k_i 和 n 只取值于整数,所以信息率 r_i 一定是有理数,且满足如下线性不等式组.

$$r_1 \geq 0, \dots, r_h \geq 0 \quad (2)$$

$$a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + \dots + a_{1h}r_h \leq b_1 \quad (3)$$

...

$$a_{n1}r_1 + a_{n2}r_2 + \dots + a_{nh}r_h \leq b_n \quad (4)$$

式(2)是显然的,式(3)~(4)则取决于网络拓扑、业务模式、信源信宿的数目和位置等因素.根据式(2)~(4),如果 \mathbf{r} 可达,则满足 $0 \leq \mathbf{r}' \leq \mathbf{r}$ 的 \mathbf{r}' 一定可达,因此分数码的容量域是凸集.此外,式(2)~(4)中各个不等式分别对应着 h 维欧氏空间中的一个半空间,根据凸集

理论^[16],有限个半空间的交构成一个多面体集合 (polyhedral set), 如果该集合有界, 则称之为多胞体 (polytope), 即通常所说的凸多面体, 称其顶点为极点. 均匀分数网络的信息率 r_i 一定是有限的, 所以在不考虑无理数点的非严格意义下, 由不等式组 (2) ~ (4) 确定的容量域是 h 维欧氏空间中的一个多胞体. 确定一个有界的凸多面体可以采用两种策略:

- (1) 确定全部形如 (2) ~ (4) 的不等式.
- (2) 确定该凸多面体的全部极点.

本文采用策略 (1) 分析多重单播网络的容量域, 采用策略 (2) 分析二重混合网络的容量域.

本文用 X, Y, Z 表示消息, 用 x_i 表示 X 的组成符号, 用 k_x 和 $r_x = k_x/n$ 分别表示 X 的维数和信息率, 用 $source(X)$ 和 $sink(X)$ 分别表示 X 的信源和信宿. 在网络图中, 把 X 标于某节点之上或之下表示该节点产生或订购 X , 把 x_i 标于某条边侧表示该边传输 x_i , 用虚线包围的阴影框表示虚拟节点. 下面三节分别讨论多重单播, 一重组播和混合模式下均匀分数路由网络的容量域计算方法.

3 多重单播路由网络容量域

h 个单播流 X_1, \dots, X_h 共存的网络的容量域是 h 维欧氏空间中的一个多胞体. 为了确定该多胞体, 提出三种图处理技术: 缩减图、合并缩减图和虚拟节点, 并构造一种容量域分析方法.

在图 G 中, 保留 X 的信源到信宿之间的全部路径, 删除无关的边和节点所得的 G 的子图称为 X 在 G 上的缩减图, 记为 $RG_c(X)$. X 和 Y 的缩减图的并称为它们的合并缩减图, 记为 $URG_c(X, Y)$. 把消息 X_1, \dots, X_h 的信源和信宿分别抽象成一个节点, 称为虚拟源节点和虚拟宿节点, 记为 $virtual\ source(X_1, \dots, X_h)$ 和 $virtual\ sink(X_1, \dots, X_h)$.

用 $f_c(source(X), sink(X))$ 表示 X 的信源信宿之间最小割中前向边的数目, 对于一重单播均匀分数路由网络, 根据最大流最小割定理有

$$k_x \leq n \cdot f_c(source(X), sink(X)) \quad (5)$$

由此可得

$$r_x \leq f_c(source(X), sink(X)) \quad (6)$$

方法 1: h 个单播流 X_1, \dots, X_h 共存的均匀分数路由网络容量域的计算包括 h 步.

第 1 步: 对应每个 X_i , 生成缩减图 $RG_c(X_i)$ 并应用式 (6) 建立 r_{X_i} 需要满足的不等式.

$$r_{X_i} \leq f_{RG_c(X_i)}(source(X_i), sink(X_i)) \quad (7)$$

第 2 步: 对应任意一对消息 (X_i, X_j) , 生成合并缩减图 $URG_c(X_i, X_j)$ (图 1(a)) 并抽象得到虚拟源节点和虚拟宿节点 (图 1(b)), 从而转化为一重单播网络. 基于图 1(b), 建立 r_{X_i} 和 r_{X_j} 需要满足的不等式如下.

$$r_{X_i} + r_{X_j} \leq f_{URG_c(X_i, X_j)}(virtual\ source(X_i, X_j), virtual\ sink(X_i, X_j)) \quad (8)$$

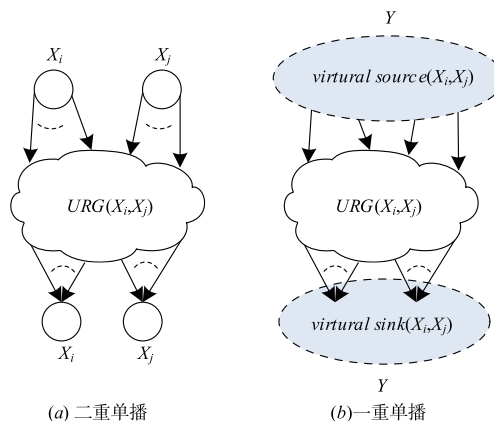


图 1 二重单播转化成一重单播

第 k 步 ($k=3$ 至 h): 采用与第 2 步类似的操作可得任意 k 重消息 X_1, \dots, X_k 满足的容量不等式.

$$r_{X_1} + \dots + r_{X_k} \leq f_{URG_c(X_1, \dots, X_k)}(virtual\ source(X_1, \dots, X_k), virtual\ sink(X_1, \dots, X_k)) \quad (9)$$

定理 1 h 个单播流 X_1, \dots, X_h 共存的多重单播均匀分数路由网络的容量域等于方法 1 中全部不等式对应的半空间相交所得的多胞体.

证明: 首先, 第 1 步中由于 $RG_c(X_i)$ 保留了 X_i 信源信宿之间的全部路径, 删除无关的节点和边并不会减小 X_i 信源信宿之间的最小割, 所以有

$$f_c(source(X_i), sink(X_i)) = f_{RG_c(X_i)}(source(X_i), sink(X_i)) \quad (10)$$

结合式 (6) 和 (10) 可得式 (7). 不等式 (7) 一定可达等式, 一个可行方案是令其他业务流为 0, 让全部网络边都用于传输 X_i , 则其流量可达最小割限.

其次, 在第 2 步中, 对比图 1(a) 和图 1(b) 可以发现, 如果图 1(a) 中二重单播流 X_i, X_j 是可达的, 那么采用相同的流分配方案, 图 1(b) 中值为 $k_Y = k_{X_i} + k_{X_j}$ 的单播流 Y 也一定可达. 换句话说, $k_{X_i} + k_{X_j}$ 是以 k_Y 为上限的, 因此有

$$r_{X_i} + r_{X_j} \leq r_Y \quad (11)$$

由于图 1(b) 中单播流 Y 满足

$$r_Y \leq f_{URG_c(X_i, X_j)}(virtual\ source(X_i, X_j), virtual\ sink(X_i, X_j)) \quad (12)$$

联立式 (11) (12) 可得式 (8). 与式 (7) 类似, 式 (8) 中每个不等式都是能达到等式的. 类似的, 可证式 (9).

最后, 方法 1 一共生成了

$$\binom{h}{1} + \binom{h}{2} + \dots + \binom{h}{h} = 2^h - 1 \quad (13)$$

个不等式, 再加上式 (2) 中的 h 个不等式, 共计 $2^h - 1 +$

h 个不等式. 这些不等式对应的半空间相交生成一个多胞体. 由于每个不等式都可达等式, 所以作为多胞体边界的超平面上的有理点一定可达, 多胞体内部有理点作为边界点的凸组合也一定满足式(7)~(9), 即多胞体内部的有理点也可达, 所以该多胞体即为所求的容量域.

例 1:应用方法 1 分析图 2 网络的容量域, 简单起见, 只把部分缩减图和合并缩减图绘于图 3, 通过分析这些图的最小割可以建立容量不等式(14)~(16), 对应的容量域绘于图 4.

$$r_x \leq 2, r_y \leq 2, r_z \leq 2 \quad (14)$$

$$r_x + r_y \leq 3, r_y + r_z \leq 3, r_z + r_x \leq 3 \quad (15)$$

$$r_x + r_y + r_z \leq 3 \quad (16)$$

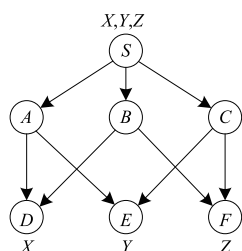


图2 三重单播网络

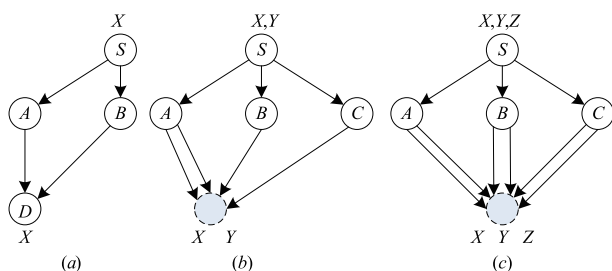


图3 缩减图与合并缩减图

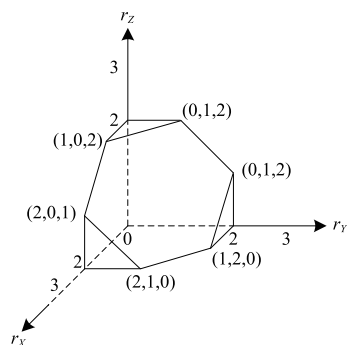


图4 图2网络的容量域

4 一重组播路由网络容量域

一重组播路由网络的容量域是形如 $0 \leq r_x \leq r_{\max}$ 的一维区间, 所以关键在于计算最大可达的信息率 r_{\max} . 前面分析多重单播网络的方法 1 本质上是通过计算信

源信宿之间的割来建立信息率不等式组. 然而对于组播路由网络, 无法通过分析割来建立 r_x 需要满足的容量不等式. 本文提出一种基于组合设计的方法. 组合设计^[17]研究的是在给定的有限全集中有哪些符合某些约束条件的子集. 把一重组播网络转化为组合设计, 全集对应着 $X = \{x_1, \dots, x_k\}$, 子集对应着边传输的 n 维向量, 约束条件由组播关系决定. 然而, 边数多的网络对应的子集数量也多, 求解组合设计的复杂度会很高. 为此, 引入子树分解来降低网络规模. 子树分解是针对有向无环图的一种高效的处理方法, 能够有效地减小网络规模, 曾被文献[18]用于降低网络编码的复杂度. 子树分解生成子树图后, 每棵子树内部传输的是相同的 n 维向量, 因此可以把子树对应成组合设计的子集, 从而大大降低复杂度. 子树分解的操作过程请参阅文献[18].

一重组播网络的信息率 $r = k/n = 1$ 一定是可达的, 所以对应于 r_{\max} 的 k 一定是大于等于 n 的.

方法 2:一重组播网络容量域的计算包括 3 步.

第 1 步: 对图 G 进行子树分解生成子树图, 假设子树图中有 h 棵子树 ST_1, \dots, ST_h , 把这 h 棵子树作为组合设计的子集.

第 2 步: 根据组播关系, 确定全集 X 和子集 ST_1, \dots, ST_h 需要满足的组合设计约束条件.

第 3 步: 依图 5 所示流程, 迭代计算该组合设计的最大可达信息率 r_{\max} .

在图 5 中, 为了判断每次迭代中 k/n 是否是可达的最大容量, 提出一种基于信息率数列极限的方法, 举例说明如下.

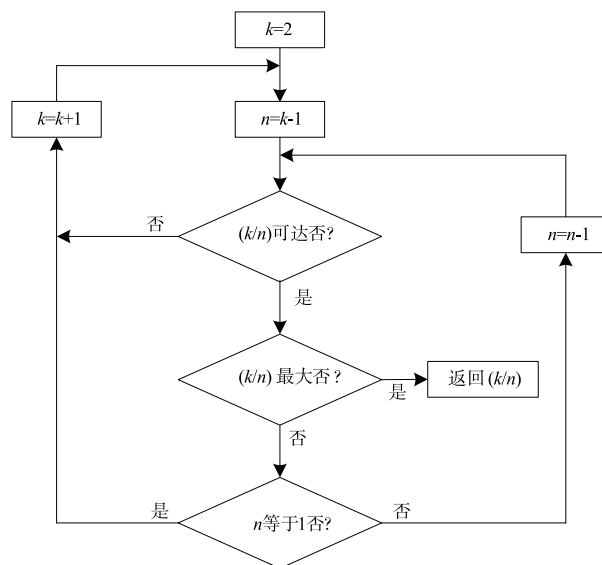


图5 方法2第3步的流程

例 2:图 6 网络由三层组成, 源节点位于第一层, 中间节点位于第二层, 第三层的六个节点中有五个是信

宿节点. 该网络的容量域是 $r_X \leq 3/2$.

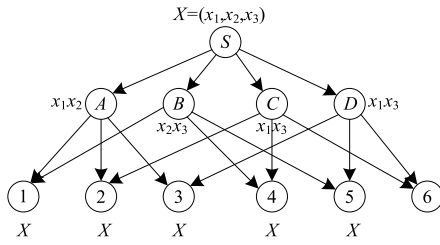


图6 三层网络

证明:该网络包含四棵子树 $(S,A,1,2,3)$, $(S,B,1,4,5)$, $(S,C,2,4,6)$, $(S,D,3,5,6)$. 简单起见,用 A,B,C,D 表示这四棵子树. 约束条件为 $\{A \cup B \cup C \cup D = X, A \cup B = X, A \cup C = X, A \cup D = X, B \cup C = X, B \cup D = X\}$. 根据图5,调整 X 的维数和子树的符号分配可得参数为 $(k,n) = (3,2)$ 的组合设计方案,见图6,其信息率 $r_X = 3/2$. 其次,用反证法证明 $r_X > 3/2$ 是不可达的. 为此,考察一组信息率

$$r_m = \frac{3}{2} + \frac{1}{2^m}, \quad m \geq 1 \quad (17)$$

r_m 是一个以 $3/2$ 为极限的递减数列,假设存在某个可达的 r_m ,则有 $n = 2^m, k = 3 \cdot 2^{m-1} + 1$. 简单起见,把全集表示为 $X = \{1, 2, \dots, 3 \cdot 2^{m-1} + 1\}$. 不失一般性,令子集 $A = \{1, 2, \dots, 2^m\}$. 根据约束条件 $A \cup B = X, A \cup C = X, A \cup D = X$,则 B, C, D 中一定要包含符号 $\{2^m + 1, \dots, 3 \cdot 2^{m-1} + 1\}$. 除此之外, B, C, D 各自还剩余 $2^{m-1} - 1$ 个空位,记 B, C, D 为

$$B = \{b_1, \dots, b_{2^{m-1}-1}, 2^m + 1, \dots, 3 \cdot 2^{m-1} + 1\} \quad (18)$$

$$C = \{c_1, \dots, c_{2^{m-1}-1}, 2^m + 1, \dots, 3 \cdot 2^{m-1} + 1\} \quad (19)$$

$$D = \{d_1, \dots, d_{2^{m-1}-1}, 2^m + 1, \dots, 3 \cdot 2^{m-1} + 1\} \quad (20)$$

$\{b_1, \dots, b_{2^{m-1}-1}\}, \{c_1, \dots, c_{2^{m-1}-1}\}$ 和 $\{d_1, \dots, d_{2^{m-1}-1}\}$ 中的符号只能取自 $\{1, 2, \dots, 2^m\}$. 进一步,约束条件 $B \cup C = X$ 和 $B \cup D = X$ 要求

$$\{b_1, \dots, b_{2^{m-1}-1}\} \cup \{c_1, \dots, c_{2^{m-1}-1}\} = \{1, 2, \dots, 2^m\} \quad (21)$$

$$\{b_1, \dots, b_{2^{m-1}-1}\} \cup \{d_1, \dots, d_{2^{m-1}-1}\} = \{1, 2, \dots, 2^m\} \quad (22)$$

然而,由于 $\{b_1, \dots, b_{2^{m-1}-1}\}, \{c_1, \dots, c_{2^{m-1}-1}\}$ 和 $\{d_1, \dots, d_{2^{m-1}-1}\}$ 各自只有 $2^{m-1} - 1$ 个符号,所以式(21)和(22)是不可能成立的. 因此,数列(17)中任何一个信息率 r_m 都是不可达的.

例3:图7网络第二层有 h 个中间节点,第三层全为宿节点,各自与第二层不同的 m 个节点的组合相连接,因此共有 $\binom{h}{m}$ 个宿节点,称该网络为 (h,m) 三层网络,该网络的容量域为 $r_X \leq h/(h-m+1)$.

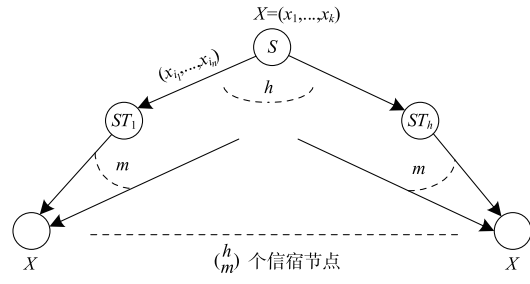


图7 (h,m) 三层网络

证明:首先,与例2类似,图7网络可以分解成 h 棵子树 ST_1, \dots, ST_h . 根据信宿节点与中间节点的关系,可得约束条件为

$$ST_{i_1} \cup \dots \cup ST_{i_m} = X, \quad \forall i_1, \dots, i_m \in [1, \dots, h] \quad (23)$$

为此,每个符号 x_i 必须出现在至少 $h - m + 1$ 棵子树中,否则将会有 m 棵子树因为缺少 x_i 而导致与这些子树相连接的宿节点无法恢复 X . 由此, k 个源符号一共需要 $k(h - m + 1)$ 个位置,又由于每棵子树的容量是 n 个符号, h 棵子树一共提供 hn 个位置,所以要求 $k(h - m + 1) \leq hn$,即

$$r_X = \frac{k}{n} \leq \frac{h}{h - m + 1} \quad (24)$$

其次,证明 $r_{\max} = h/(h - m + 1)$ 是可达的,讨论 r_{\max} 的子树符号分配方案时需要区分两种情况.

第一:当 h 和 $(h - m + 1)$ 没有公因子的时候,分配方案为: $ST_1 = \{x_1, \dots, x_{h-m+1}\}, ST_2 = \{x_2, \dots, x_{h-m+2}\}, \dots, ST_{h-1} = \{x_{h-1}, x_h, x_1, \dots, x_{h-m-1}\}, ST_h = \{x_h, x_1, \dots, x_{h-m}\}$.

第二:如果 h 和 $(h - m + 1)$ 有公因子,此时没有通用的子树符号分配规则,需要具体分析,表2列出了几种不同参数网络的子树符号分配.

本节的最后来看一个 (h,m) 三层网络的具体实例. 图8是参数为 $(3,2)$ 的三层网络,其容量等于 $3/2$. 把图8和著名的蝶形网络^[1]做一比较很有意义,图8的约束条件为 $\{A \cup B = X, A \cup C = X, B \cup C = X\}$,下一节将会看到,蝶形网络包含三棵子树 ST_1, ST_2, ST_3 ,约束条件为 $\{ST_1 \cup ST_2 = X, ST_1 \cup ST_3 = X, ST_2 \cup ST_3 = X\}$,可见二者是等价的,因此具有相同的容量域,由此间接证明了蝶

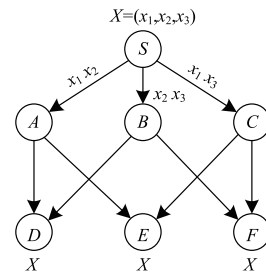


图8 $(3,2)$ 三层网络

形网络的路由容量域. 实际上, 基于这种约束条件等价的思想, 还有很多网络可以转化为 (h, m) 三层网络加以分析.

表 2 (h, m) 三层网络子树符号分配

m	h	$h/(h-m+1)$	子树符号分配
2	3	3/2	$ST_1 = \{x_1, x_2\}, ST_2 = \{x_2, x_3\}, ST_3 = \{x_1, x_3\}$
2	4	4/3	$ST_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, ST_2 = \{x_2, x_3, x_4\}, ST_3 = \{x_1, x_3, x_4\}, ST_4 = \{x_1, x_2, x_4\}$
3	4	2	$ST_1 = ST_3 = \{x_1\}, ST_2 = ST_4 = \{x_2\}$
3	5	5/3	$ST_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, ST_2 = \{x_2, x_3, x_4\}, ST_3 = \{x_3, x_4, x_5\}, ST_4 = \{x_1, x_4, x_5\}, ST_5 = \{x_1, x_2, x_5\}$

5 混合路由网络容量域

单播流和组播流是两种基本业务流, 任何复杂的业务流都可以由这两种基本流混合而成. 其中, 单播流与单播流混合的网络的容量域已经在第 3 节中得到解决. 然而当网络中包含组播流时无法通过分析割来建立信息率不等式, 而且容量域受拓扑, 基本流的数量和类型, 共享链路的数目和位置, 信源信宿的位置的影响很大, 这导致包含组播流的混合网络的容量域的计算很复杂. 尤其是网络包含三个以上基本流时, 其分析复杂度急剧增加. 因此, 本文仅讨论由两个基本流组成的混合网络的路由容量域计算问题.

包含两个基本流的混合网络的容量域是一个凸多边形. 本节提出一种通过确定极点绘制凸多边形的方法, 其基本思想是先确定顺时针和逆时针方向的两个极点 $(r_{x_{\max}}, 0)$ 和 $(0, r_{y_{\max}})$, 由此出发向中间逼近, 发现新极点即替换旧极点, 最终确定全部极点.

方法 3: 网络包含组播流 X 和单播流 (或组播流) Y , 对该网络容量域的计算包括 3 步.

第 1 步: 生成 X 的缩减图 $RG_C(X)$, 基于 $RG_C(X)$ 应用方法 2 计算 $r_{x_{\max}}$, 由此可得逆时针方向第 1 个极点 $r_{11} = (r_{x_{\max}}, 0)$; 同理, 基于 Y 的缩减图 $RG_C(Y)$ 计算顺时针方向第 1 个极点 $r_{21} = (0, r_{y_{\max}})$.

第 2 步: 保留最大 X 流 $r_x = r_{x_{\max}}$, 判断是否存在非 0 的最大可达 Y 流, 如果有, 就得到了逆时针方向第 2 个极点 $r_{12} = (r_{x_{\max}}, r_y)$; 如果没有, 则保留 r_{11} . 同理, 保留 Y 流 $r_y = r_{y_{\max}}$, 判断是否存在非 0 的最大可达 X 流, 如果有, 就得到了顺时针方向第 2 个极点 $r_{22} = (r_x, r_{y_{\max}})$; 如果没有, 则保留 r_{21} .

第 3 步: 连接顺时针和逆时针两个方向最前沿的极点得到线段, 判断该线段是否是容量域的边界, 即线段外侧是否还有可达点. 如果该线段是容量域边界, 则容量域已得; 否则, 说明还存在新的极点, 寻找新的极点,

迭代第 3 步.

在第 3 步寻找新极点目前还没有通用的方法, 需要对 X 流和 Y 流进行多次流分配才能得到. 但是, 对于连接两个极点所得的线段是否是容量域边界的判断可以采用第 4 节提出的基于信息率数列极限的方法, 举例如下.

例 4: 图 9 中 (a) (b) 两个蝶形网络都包含了组播流 X 和单播流 Y , 区别仅在于 Y 的信源位置不同, 其容量域分别如图 10 (a) (b).

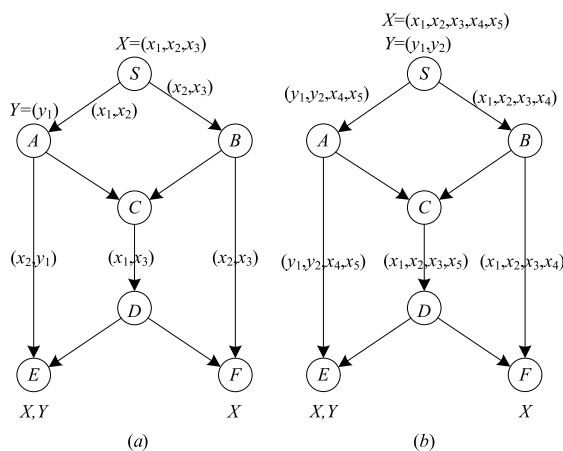


图 9 两个混合网络

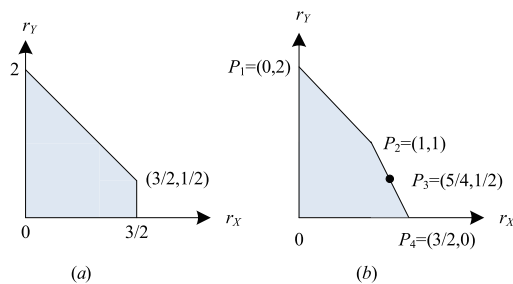


图 10 对应图 9 的两个网络的容量域

证明: 图 9 (a): 蝶形网络的组播路由容量等于 $3/2$, 所以不难确定 $(3/2, 0), (0, 2), (3/2, 1/2)$ 三个极点, 后者的传输方案示于图 9 (a). 连接这些极点可得两条线段, 由于边 AE 和 DE 构成信源信宿间的割, 这要求 $r_x + r_y \leq 2$, 所以图 10 (a) 就是可达容量域.

图 9 (b): 可以确定 $P_1 = (0, 2), P_2 = (1, 1)$ 和 $P_4 = (3/2, 0)$ 是三个可达的容量矢量点. 连接这些点可得凸多边形如图 10 (b) 所示. 下面证明线段 P_1P_2 和 P_2P_4 之外的矢量点不可达. P_1P_2 是容量域的边界是明显的, 这是因为割边 SA, SB 要求 $r_x + r_y \leq 2$. 但 P_2P_4 是容量域的边界并不直观, 由于 P_2 和 P_4 是两个可达点, 所以位于 P_2P_4 上的所有有理点都是可达的, 以 $P_3 = (5/4, 1/2)$ 为例, 其传输方案见图 9 (b). 为了证明 P_2P_4 外侧的所有点都是不可达的, 考察信息率数列

$$(r_X, r_Y) = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4^m} \right), \quad (25)$$

令 $k_X = 5 \cdot 4^{m-1}$, $k_Y = 2 \cdot 4^{m-1} + 1$, $n = 4^m$ 分别表示消息 X, Y 和边矢量中的符号个数. 为表述简单起见, 替换 4^{m-1} 为 s , 则有 $k_X = 5s$, $k_Y = 2s + 1$, $n = 4s$. 记 $X = \{x_1, \dots, x_{5s}\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_{2s+1}\}$. 蝶形网络由三棵子树 $ST_1 = \{S, A, C, E\}$, $ST_2 = \{S, B, C, F\}$, $ST_3 = \{C, D, E, F\}$ 构成. 在本例中约束条件为 $\{ST_1 \cup ST_2 = X \cup Y, ST_1 \cup ST_3 = X \cup Y, ST_2 \cup ST_3 = X\}$. 由于 Y 必须通过子树 ST_1 传输, 不失一般性, 假设子树 ST_1 中 $n = 4s$ 个符号为 $\{x_1, \dots, x_{2s-1}, y_1, \dots, y_{2s+1}\}$. 约束条件 $ST_1 \cup ST_2 = X \cup Y$ 和 $ST_1 \cup ST_3 = X \cup Y$ 要求 ST_2 和 ST_3 中必须包括符号 $\{x_{2s}, \dots, x_{5s}\}$. 除此之外, ST_2 和 ST_3 中还各自有 $s - 1$ 个剩余位置. 然而, $ST_2 \cup ST_3 = X$ 要求 ST_2 和 ST_3 全部的剩余符号中必须包括 $\{x_1, \dots, x_{2s-1}\}$, 这显然是不可能的. 因此, 式(25)中任何一个信息率都是不可达的, 也就是说在图 10(b)中 P_3 的正上方再无可达点, 所以 P_2P_4 是容量域的边界.

6 总结与展望

本文讨论了多重单播、一重组播和二重混合模式下均匀分数路由网络的容量域分析问题, 包含了绝大部分路由网络的通信模式. 针对多重单播网络, 我们提出了缩减图、合并缩减图和虚拟节点等图处理技术, 并应用这些技术构造了方法 1. 针对一重组播网络, 我们提出了基于组合设计的方法 2, 并应用子树分解技术大大降低了网络规模和计算复杂度. 应用方法 2 详尽地分析了三层网络的容量域并证明一些网络可以通过等价约束条件转化成 (h, m) 三层网络模型加以分析. 针对由两个基本流组成的二重混合网络, 我们提出了基于极点确定凸多边形的方法 3. 这三种方法的正确性从理论上得到了证明, 其可操作性通过网络实例加以演示. 最后, 虽然方法 1 和方法 2 彻底解决了多重单播和一重组播的路由容量域计算问题, 但方法 3 只是部分地解决了混合路由的容量域问题, 这一方面是因为对于三重以上基本流组成的混合路由容量域的分析复杂度很高, 另一方面是对极点的寻找目前还缺少通用的可操作方法, 因此对混合网络的路由容量域还有待进一步研究.

参考文献

- [1] Ahlswede R, Cai N, Li S-Y, Yeung R W. Network information flow [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 46(4): 1204 - 1216.
- [2] Dougherty R, Freiling C, Zeger K. Insufficiency of linear coding in network information flow [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(8): 2745 - 2759.
- [3] Dougherty R, Freiling C, Zeger K. Unachievability of network coding capacity [J]. IEEE Transactions on Informa-

tion Theory, 2006, 52(6): 2365 - 2372.

- [4] Dougherty R, Freiling C, Zeger K. Networks, matroids, and non-Shannon information inequalities [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(6): 1949 - 1969.
- [5] Dougherty R, Freiling C, Zeger K. Achievable rate regions for network coding [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(5): 2488 - 2509.
- [6] Yeung R W. 信息论与网络编码 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011. 510 - 53
- [7] Thakor S, Grant A, Chan T. Cut-set bounds on information flow [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(4): 1850 - 1865.
- [8] Li C, Weber S, Walsh J M. Computer aided proofs for rate regions of independent distributed source coding problems [A]. International Symposium on Network Coding (NetCod) [C]. Sydney: IEEE, 2015, 81 - 85.
- [9] Li C, Weber S, Walsh J M. Multilevel diversity coding systems: rate regions, codes, computation, & forbidden minors [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2017, 63(1): 230 - 251.
- [10] Li C, Weber S, Walsh J M. On multi-source networks: enumeration, rate region computation, and hierarchy [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2017, 63(11): 7283 - 7303.
- [11] Apte J, Walsh J M. Exploiting symmetry in computing polyhedral bounds on network coding rate regions [A]. International Symposium on Network Coding (NetCod) [C]. Sydney: IEEE, 2015, 76 - 80.
- [12] Yazdi S M S T, et al. On the multimessage capacity region for undirected networks [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(4): 1930 - 1947.
- [13] 黄佳庆. P2P 文件共享中网络编码与路由容量比较 [J]. 小型微型计算机系统, 2010, 31(4): 615 - 619. HUANG Jia-qing. Capacity comparison between network coding and routing in P2P file sharing [J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2010, 31(4): 615 - 619. (in Chinese)
- [14] Liang X. Matrix games in the multicast networks: maximum information flows with network switching [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(6): 2433 - 2466.
- [15] Campions J, Dougherty R, Freiling C, Zeger K. Network routing capacity [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(3): 777 - 788.
- [16] Bazaraa M S, Jarvis J J, Sherali H D. Linear Programming and Network Flows [M]. 4th ed, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2010. 50 - 80.
- [17] Wallis W D. Introduction to Combinatorial Designs [M]. Belmont: Taylor & Francis Group, 2007. 1 - 20.

- [18] Liu Y T, Morgan Y. Efficient combination of polynomial time algorithm and subtree decomposition for network coding [J]. IET Communications, 2015, 9 (17): 2147 - 2152.

作者简介



刘宴涛 男,1975 年生于吉林蛟河,渤海大学副教授,研究方向为网络编码、网络仿真、Ad hoc 网络、网络安全、分布式存储等。
Email: liuyantaocn@vip.163.com



刘 珩 女,1981 年生于湖北恩施,北京理工大学信息与电子学院副教授,2006 年获得北京理工大学通信与信息系统博士学位,研究方向包括通信协议工程、无线自组织网络、传感器网络、分布式系统、网络仿真等。