

二维静电场问题的面片拼接等几何分析方法研究

王 峰^{1,2}, 周宜红^{1,2}, 林 皋³, 赵春菊^{1,2}, 何卫平^{1,2}

(1. 三峡大学水利与环境学院, 湖北宜昌 443002; 2. 三峡大学湖北省水电工程施工与管理重点实验室, 湖北宜昌 443002;
3. 大连理工大学水利工程学院, 辽宁大连 116024)

摘 要: 等几何分析方法在求解静电场问题时, 实现了几何模型和计算模型的统一以及自适应网格划分过程, 然而受制于单个 NURBS 曲面片拓扑的局限性, 单片等几何分析方法难以处理含角点非凸几何域静电场及多媒质静电场问题. 本文基于面片拼接技术, 将单片等几何分析方法扩展到多片, 并用来求解二维含角点非凸几何域静电场及多媒质静电场问题, NURBS 曲面片拼接处的控制点和网格细分前后要求必须匹配. 由于 NURBS 基函数不满足插值性, 在非齐次 Dirichlet 边界条件的处理上本文采用 Lagrange 乘子法进行处理. 数值算例表明: 修正后的多面片等几何分析方法可以很好地处理二维含角点非凸几何域静电场及多媒质静电场问题, 且相比传统的有限元法, 该方法具有自由度消耗小、精度高、收敛速度快等优点.

关键词: 静电场; 等几何分析; NURBS; 面片拼接

中图分类号: TM151 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2018)02-0456-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.02.027

Isogeometric Analysis for the Two-Dimensional Electrostatic Field Problem Based on the NURBS Patch Splicing Technique

WANG Feng^{1,2}, ZHOU Yi-hong^{1,2}, LIN Gao³, ZHAO Chun-ju^{1,2}, HE Wei-ping^{1,2}

(1. College of Hydraulic & Environmental Engineering, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, China;
2. Hubei Key Laboratory of Construction and Management in Hydropower Engineering, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, China;
3. School of Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

Abstract: Isogeometric analysis (IGA) based on the non-uniform rational B-splines (NURBS) realizes the unification of the geometric model, the computational model and adaptive mesh generation process in solving electrostatic problems. However, IGA based on one single NURBS patch is difficult to deal with the non-convex electrostatic field with corners and inhomogeneous electrostatic field because of limitation of the NURBS patch topology. In this paper, IGA based on the patch splicing is used to solve two-dimensional electrostatic problems of this kind while IGA extends from one single NURBS patch to multipatches. The control points and meshes of different patches must coincide on the interface, even after refinement. Due to lack of interpolation properties for the NURBS basis functions, Lagrange multiplier method is adopted to deal with non-homogeneous Dirichlet boundary conditions. Numerical examples are presented to show that modified multipatch IGA can solve two-dimensional electrostatic problems of this kind well and possess the advantages of better convergence on a per-degree-of-freedom and high accuracy.

Key words: electrostatic field; isogeometric analysis; NURBS; patch splicing

1 引言

静电场问题作为计算电磁学最基本的问题, 其边值问题中的边界条件为第一类、第二类和衔接边界条

件, 控制方程为 Poisson 方程, 对应的数学物理方程为椭圆型偏微分方程. 目前求解静电场的数值计算方法主要有: 有限差分法^[1-4]、矩量法^[5]、有限元法^[6]、边界元法^[7]、无网格法^[8-10]、比例边界有限元法^[11,12], 其中有

收稿日期: 2016-08-14; 修回日期: 2017-02-12; 责任编辑: 李勇锋

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 51479103); 国家自然科学基金青年科学基金 (No. 51109134); 中国博士后科学基金 (No. 2013T60283); 湖北省水电工程施工与管理重点实验室开放基金 (No. 2016KSD12)

限元法(Finite Element Method, FEM)是最为常见也是应用最为广泛的数值计算方法,然而该方法在离散物理求解域时可能存在计算模型与物理模型不一致的情形,这无疑影响了计算精度.同时有限元法在处理静电场奇异点以及不同媒质分布的静电场问题时通常需要在这些点周围处增加节点,这势必要增加前处理和计算时间.

含角点非凸几何域静电场问题属于奇异静电场问题的一种,角点奇异性会影响静电场数值结果的精度和收敛率,从理论上来说,电荷密度在角点处是无限大的.目前有限元法处理此类问题的方法主要包括奇异点周围网格加密、人工边界方法等^[13-15].网格加密又包括单元细分和基函数升阶,网格加密需要人为的对角点周围加密,这无疑增加了网格剖分的难度.人工边界方法是用人工边界把奇异点分离出来,然后在人工边界上施加恰当的边界条件.这两种方法中奇异点周围网格加密最为直接,是目前应用最多的方法,同时对不同媒质分布的静电场问题依然有效.

等几何分析方法^[16](Isogeometric Analysis, IGA)是由 Hughes 提出的一种新的数值计算方法,其将 NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline)基函数引入到等参有限元法中.该方法可以有效衔接计算机辅助设计(Computer Aided Design, CAD)和有限元法,将分析计算建立在精确的几何模型之上,消除了计算模型与几何模型之间的非一致性问题.它同时兼备了有限元法和无网格法的优点,其基本思想是几何模型和网格计算模型采用相同的基函数空间.该方法具有以下独特的优势^[17]:(1)避免了有限元法分段多项式逼近问题域所产生的误差;(2)由于 NURBS 的几何精确特性,即使是稀疏的参数网格也保留了模型的几何信息,同时细分过程中无需访问原 CAD 模型,这便于实现网格的自适应保形细分,节省了工作量;(3)由于 NURBS 的高阶连续性,易于构造全局高阶连续的协调单元,使有限元法由 C^0 连续过渡到 C^{p-1} 连续,从而便于板壳、应变梯度等问题的求解.

等几何分析方法在电场单元细分过程中,除了节点插入的 h 细分和基函数升阶的 p 细分,还有结合两者而成的 k 细分方法,同时这些细分过程是自动且保形的,因此在求解含角点非凸几何域静电场问题时无需像有限元法人为的对角点周围进行网格加密.目前该方法已经被用于静电场问题的求解^[18-20],张勇^[21]将等几何分析方法与比例边界有限元法相结合提出了比例边界等几何分析方法,并用于求解静电场问题.然而,由于 NURBS 曲面片是定义在矩形参数域中的,受制于拓扑的局限性,单片等几何分析方法难以处理含有不同媒质分布的静电场问题,同时在处理含角点非凸几何

域的静电场问题时,传统的重控制点适合描述二维角点,而处理三维角点则出现瓶颈.而 NURBS 曲面片由于具有张量积特性,因此可以通过多面片拼接的等几何分析方法来处理上述问题,即对 NURBS 曲面片进行“加法”操作,这充分借鉴了子结构法的基本思想^[22].在多面片拼接方面,Nguyen^[23]提出了无需面片网格匹配的 Nitsche 法,Kapl^[24]提出了几何光滑连续的多面片拼接方法,Langer^[25]提出了基于网格分级技术的多面片拼接方法,这些方法虽然无需面片网格匹配,但是数学推导和数值实现比较麻烦.

本文将多片等几何分析方法用于不同媒质分布的静电场以及含角点非凸几何域的静电场问题的求解,这里的多面片拼接我们依然采用文献[17]所示的方法进行,即不同 NURBS 曲面片细分前后网格和控制点在交界面处匹配,片与片之间为连续.由于等几何分析方法采用等参元的思想,电场可用 NURBS 基函数来构造,而静电场控制方程的弱形式则可通过 Galerkin 变分原理来实现,最后施加边界条件获得静电场数值结果.本文以含角点非凸几何域的静电场、多媒质分布的静电场为例来说明多片等几何分析方法的有效性,同时与有限元解比较来说明等几何分析方法精度高、收敛速度快等优点.

2 静电场问题的等几何分析方程

NURBS 基函数和曲面片拼接介绍可参考文献[26].在等几何分析中,NURBS 基函数将节点矢量所张成的参数域 $\hat{\Omega}$ 映射为控制点所在的物理域 Ω ,即

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: \hat{\Omega} &\rightarrow \Omega \\ \mathbf{x} = \mathbf{F}(\xi) &= \sum_{k=1}^{NC} N_k(\xi) \mathbf{P}_k \end{aligned} \quad (1)$$

其中: N_k 为 NURBS 基函数, \mathbf{P}_k 为控制点, NC 为控制点个数,也是基函数的个数, $\mathbf{x} = (x, y)$ 为笛卡尔坐标, $\xi = (\xi, \eta)$ 为参数坐标.

由于等几何分析方法采用等参元的思想,即静电场 $\varphi^h(\mathbf{x})$ 与几何形状 \mathbf{x} 的近似采用相同的 NURBS 基函数,静电场可近似表示为

$$\varphi^h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{NC} N_k(\xi) \varphi_k = \mathbf{N}\boldsymbol{\varphi} \quad (2)$$

式中 φ_k 是与控制点 \mathbf{P}_k 对应的控制点电势.

静电场问题控制方程为 Poisson 方程,设问题求解域为 Ω ,其 NURBS 离散网格可由节点矢量和参数域中的节点区间映射生成.设节点矢量为 $\Xi_\xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l\}$ 和 $\Xi_\eta = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_l\}$,从两个方向节点矢量中去除重复节点可得子矢量 Ξ'_ξ 和 Ξ'_η ,定义参数域中的节点区间 $Q^{i,j} = [\xi_i^k, \xi_{i+1}^k] \times [\eta_j^k, \eta_{j+1}^k]$,通过式(1)可映射成物理域上的一个剖分,如图 1 所示.可以看出,网格的

生成和细化均可以自动实现,且自动生成的网格能够准确描述计算物理域,不会引入离散误差,这实现了几何设计和数值分析的无缝连接.

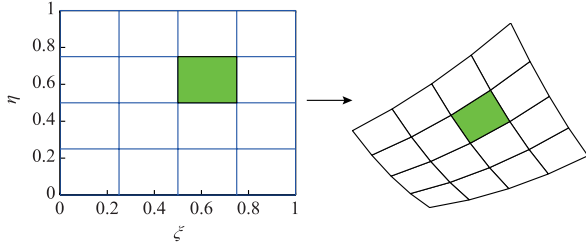


图1 计算区域离散示意图

静电场满足的控制微分方程为

$$\Omega: \nabla \cdot (\varepsilon \nabla \varphi(\mathbf{x})) = -\rho \quad (3)$$

$$\Gamma_D: \varphi(\mathbf{x}) = \bar{\varphi} \quad (4)$$

$$\Gamma_N: \varepsilon \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial n} = \bar{q} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{x} = (x, y)$ 为笛卡尔坐标, ε 为介电常数, φ 为电势, ρ 为电荷密度, Γ_D 为 Dirichlet 边界, 其上施加电势值 $\bar{\varphi}$, Γ_N 为 Neumann 边界, 其上施加电势方向导数值 \bar{q} , n 是 Γ_N 上的单位外法线向量.

假设 $S = \{\varphi: \varphi \in H^1(\Omega), \varphi|_{\Gamma_D} = \bar{\varphi}\}$ 为试函数空间, 式中等式 $\varphi|_{\Gamma_D} = \bar{\varphi}$ 的含义是必须预先满足 Dirichlet 边界条件. 静电场问题可归结为抽象变分问题: 对 $\forall w \in V$, 求函数 $\varphi \in S$, 满足

$$a(\varphi, w) = \langle l, w \rangle \quad (6)$$

式中, $V = \{w: w \in H^1(\Omega), w|_{\Gamma_D} = 0\}$ 为测试函数空间, 如果 Dirichlet 边界条件是齐次的, 则有函数空间 $S = V$. 其中双线性泛函 $a(\varphi, w)$ 和线性泛函 $\langle l, w \rangle$ 分别为

$$a(\varphi, w) = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla w \, d\Omega \quad (7)$$

$$\langle l, w \rangle = \int_{\Omega} \rho w \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{q} w \, d\Gamma \quad (8)$$

式(7)、(8)是 Poisson 方程的弱形式, H^1 为一阶 Sobolev 空间. 等几何分析采用 Galerkin 映射, 即用离散的有限维近似空间 V_h 和 S_h 代替连续的无限维空间 V 和 S . 从而可得有限维空间上的变分形式: 对 $\forall w_h \in V_h$, 求函数 $\varphi_h \in S_h$, 使其满足

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla \varphi_h \cdot \nabla w_h \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho w_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{q} w_h \, d\Gamma \quad (9)$$

对基函数逐个检验, 从而可得如下代数方程

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f} \quad (10)$$

这里, $\boldsymbol{\varphi}$ 为控制点电势, $\mathbf{K} = \sum_{i,j} \mathbf{K}_{ij}$ 和 $\mathbf{f} = \sum_{i,j} \mathbf{f}_{ij}$ 分别为集成的总体刚度矩阵和总体等效控制点电荷向量.

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\xi_i^t}^{\xi_i^{t+1}} \int_{\eta_i^b}^{\eta_i^{b+1}} \mathbf{B}(\xi, \eta)^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{B}(\xi, \eta) |J| \, d\xi \, d\eta \quad (11)$$

$$\mathbf{f}_{ij} = \int_{\xi_i^t}^{\xi_i^{t+1}} \int_{\eta_i^b}^{\eta_i^{b+1}} \mathbf{N}(\xi, \eta)^T \rho |J| \, d\xi \, d\eta + \int_{\Gamma_N} \mathbf{N}(\xi, \eta)^T \bar{q} \, d\Gamma \quad (12)$$

其中:

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = \{N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad \cdots \quad N_n(\xi, \eta)\}$$

$$\mathbf{B}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_n(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

由于 NURBS 基函数不满足插值性, 因此在非齐次 Dirichlet 边界条件的施加存在困难, 这里我们利用文献[27]中的 Lagrange 乘子法进行施加. 将静电场控制方程(3)及非齐次 Dirichlet 边界条件(4)表示成带 Lagrange 乘子的泛函, 即

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon \nabla^2 \varphi \, d\Omega - \int_{\Gamma_D} \lambda (\varphi - \bar{\varphi}) \, d\Gamma \quad (13)$$

对泛函 $\Pi(\varphi)$ 进行一次变分可得

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\varphi) &= \int_{\Omega} \varepsilon \left(\frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_D} \delta \lambda (\varphi - \bar{\varphi}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_D} \delta \varphi \lambda \, d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

对式(14)进行离散可得

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\varphi) &= \sum_{i,j} \int_{\xi_i^t}^{\xi_i^{t+1}} \int_{\eta_i^b}^{\eta_i^{b+1}} \varepsilon \left(\frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_D} \delta \lambda (\varphi - \bar{\varphi}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_D} \delta \varphi \lambda \, d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

对引入的 Lagrange 乘子用 NURBS 进行离散, 可得

$$\lambda = \sum_{k=1}^{NC} N_k(\xi) \lambda_k = \mathbf{N}\boldsymbol{\lambda} \quad (16)$$

将式(2)和(16)带入式(15), 由于 $\delta \lambda$ 和 $\delta \varphi$ 的任意性, 可得等几何分析离散方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}$ 为控制点电势, $\boldsymbol{\lambda}$ 为边界 Γ_D 上的控制点 Lagrange 乘子, \mathbf{K} 如式(11)所示, \mathbf{g} 和 \mathbf{G} 为非齐次 Dirichlet 边界条件的贡献值, 表示如下:

$$\mathbf{G} = - \int_{\Gamma_D} \mathbf{N}(\xi, \eta)^T \mathbf{N}(\xi, \eta) \, d\Gamma \quad (18)$$

$$\mathbf{g} = - \int_{\Gamma_D} \mathbf{N}(\xi, \eta)^T \bar{\varphi} \, d\Gamma \quad (19)$$

其中 $\mathbf{N}(\xi, \eta) = \{N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad \cdots \quad N_n(\xi, \eta)\}$

3 数值算例

本节应用多片 IGA 求解含角点非凸几何域的静电场和多媒质分布的静电场问题, 为了面片拼接的实施, 这里我们选取齐次控制点

$$\bar{\mathbf{P}}_i = (X_i, Y_i, w_i) = (w_i x_i, w_i y_i, w_i) \quad (20)$$

3.1 L 形区域静电场问题

考虑一 L 形区域静电场, 其通过单面片和多面片两

种形式来进行构造,初始的等几何模型如图 2 所示,单面片两个张量积方向基函数的次数均为 2 次,多面片两个张量积方向基函数的次数均为 1 次. 对应的 Poisson 方程为

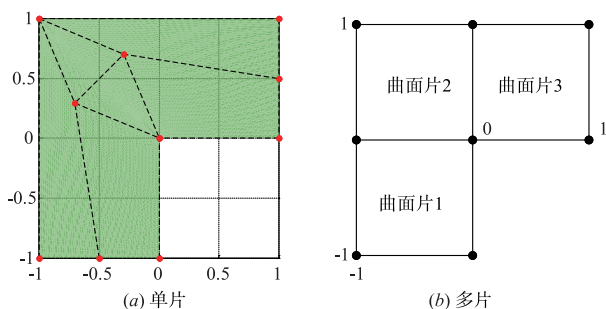


图2 L形区域控制网格

$$-\Delta\varphi = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (21)$$

其边界电势均为零,该问题电势的解析解为

$$\varphi(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (22)$$

为了验证方法的有效性,定义数值解的误差范数为

$$\|\varepsilon^h\| = \left(\int_{\Omega} (\varphi - \varphi^h)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

在多面片拼接的 IGA 中,用 k 细化方法对 L 形区域进行细分,从而保证两个张量积方向基函数的次数均为 2 次,而单面片 IGA 则通过 h 细化方法对 L 形区域进行细分. 图 3 给出了通过单片 IGA(二次)、多片 IGA(二次)和 FEM(选用二阶 Lagrange 单元)计算的电势误差范数随自由度变化的收敛图,很明显可以看出,随着自由度的增加,IGA 和 FEM 均能收敛于解析解,但是 IGA 误差小、收敛速度快. 该 L 形区域含角点且非凸,通过 NURBS 多面片拼接能更好的得到光滑连续的几何域和静电场,而 NURBS 单面片则需要通过重控制点来描述角点,因此多面片拼接的 IGA 误差范数小于单片 IGA 误差范数. 图 4 给出了 FEM177 个自由度和 IGA144 个自由度时误差分布图,很明显可以看出 IGA 最大绝对误差比 FEM 最大绝对误差要低一个量级.

为了与 FEM(选用二阶 Lagrange 单元)在计算内存占用和计算时间作对比,本文给出了单片 IGA 与 FEM 自由度数随单元数变化的曲线如图 5 所示. 可以看出, FEM 自由度数随着单元数的增加迅速提高,而 IGA 自由度增加速度明显放缓,这是由于 NURBS 单元可以共享更多的自由度数,这极大提高了计算效率. 同时对 IGA 和 FEM 选取同样的 144 个单元数来对比误差范数、计算内存占用和计算时间,计算环境为 Intel Core i5-4590,主频 3.30GHz, Windows7 系统下的 Matlab7.11 平台,其计算结果见表 1. 在此单元剖分的情况下,IGA 相比 FEM 电势误差范数、计算内存占用和计算时间更少.

从这个含角点非凸几何域的静电场问题可以看

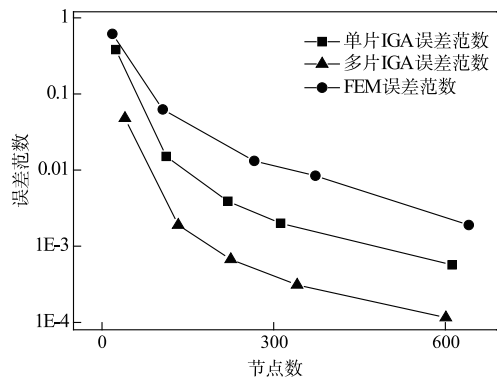


图3 误差范数比较($p=2$)

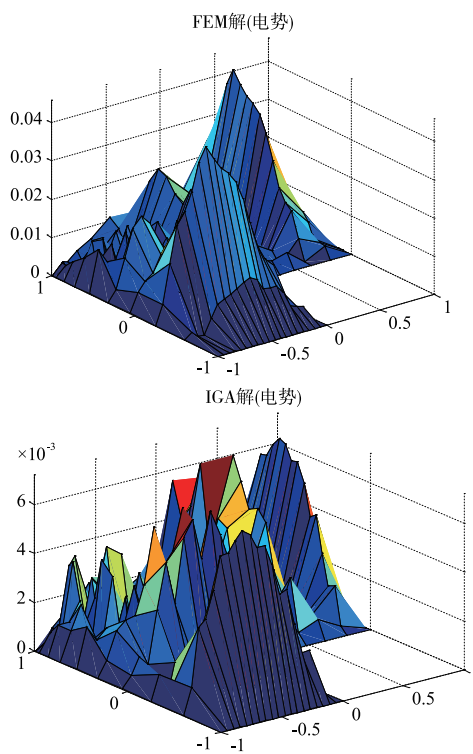


图4 电势IGA解和FEM解绝对误差分布图

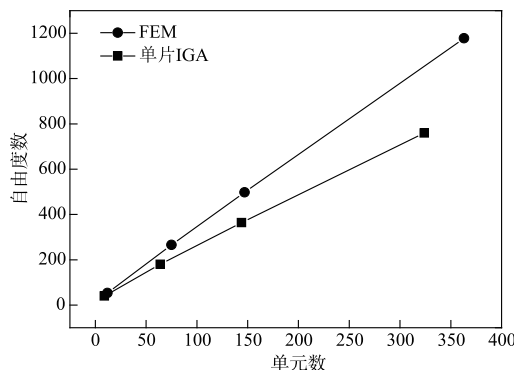


图5 自由度消耗随单元数变化曲线

出:IGA 实现了几何模型和物理域模型的一致统一,而

且细分时无需访问原几何模型;相比 FEM,IGA 具有自由度消耗低、计算精度高、收敛速度快等优点;对于含角点奇异问题,IGA 能更好的进行数值模拟,且通过多面片拼接能获得更加光滑的数值结果.

3.2 分层介质静电场问题

在长直接地金属槽模型中,槽内有两种不同介质,如图 6 所示,其底面和侧面电势均为零,顶盖电势为 $U_0 \sin \frac{\pi x}{a}$,分析槽内电势变化情况. 该槽内电势函数解析解为

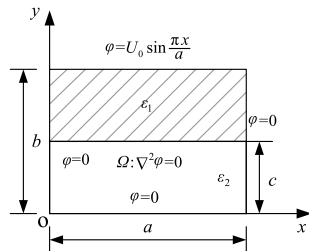


图6 分层介质槽模型

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \sin(kx) [a_1 \sinh(ky) + b_1 \cosh(ky)], & c \leq y \leq b \\ c_1 \sin(kx) \sinh(ky), & 0 \leq y \leq c \end{cases} \quad (24)$$

式中, $k = \pi/a$, 其它系数为

$$\begin{cases} d_1 = \sin(kb) [\varepsilon_1 \tanh(kc) - \varepsilon_2 \coth(kc) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \coth(kb)] \\ a_1 = U_0 [\varepsilon_1 \tanh(kc) - \varepsilon_2 \coth(kc)] / d_1 \\ b_1 = U_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) / d_1 \\ c_1 = U_0 [\varepsilon_1 \tanh(kc) - \varepsilon_2 \coth(kc) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \coth(kc)] / d_1 \end{cases} \quad (25)$$

模型中, 取 $a = 1.0\text{m}$, $b = 1.0\text{m}$, $c = 0.5\text{m}$, $\varepsilon_1 = 2.25\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$, $U_0 = 100\text{V}$. 用文献[10]所示的 RBF 和 FEM 进行求解, 其中 FEM 是通过 Ansoft Maxwell 2 D 软

表 1 计算自由度、计算内存占用、计算时间和误差范数比较

单元数	自由度数		计算内存/Mb		计算 CPU 时间/s		误差范数	
	FEM	IGA	FEM	IGA	FEM	IGA	FEM	IGA
144	489	364	4106	2861	2.16	0.97	0.0064	0.0015

表 2 多片分叉图形齐次控制点

面片 1		面片 2		面片 3		面片 4	
节点矢量	齐次控制点	节点矢量	齐次控制点	节点矢量	齐次控制点	节点矢量	齐次控制点
	$(-1, -0.1, 1)$		$(1, -0.1, 1)$		$\{1, 0.1, 1\}$		$\{1, -0.1, 1\}$
					$(2, 0.9, 1)$		$(2, -0.9, 1)$
$\{0, 0, 1, 1\}$	$(1, -0.1, 1)$	$\{0, 0, 1, 1\}$	$(1.4, -0.01, 1)$	$\{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$	$(3, 0.9, 1)$	$\{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$	$(3, -0.9, 1)$
$\{0, 0, 1, 1\}$	$(-1, 0.1, 1)$	$\{0, 0, 1, 1\}$	$(1, 0.1, 1)$	$\{0, 0, 1, 1\}$	$(1.4, 0.01, 1)$	$\{0, 0, 1, 1\}$	$(1.4, -0.01, 1)$
	$(1, 0.1, 1)$		$(1.4, 0.01, 1)$		$(2, 0.7, 1)$		$(2, -0.7, 1)$
					$(3, 0.7, 1)$		$(3, -0.7, 1)$

件来进行计算的, 这里 FEM 和 RBF 中节点自由度数分别为 441 和 462 个. 同时用多面片拼接来构造该金属槽, 每个面片描述槽内不同介质, 两个张量积方向基函数的次数均为 2 次, 通过 h 细分 435 个自由度来进行等几何运算. 按照文献[10]所示公式定义误差

$$\text{error} = \left(\frac{\sum_{i=1}^N (\varphi - \varphi^h)^2}{\sum_{i=1}^N \varphi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

用 IGA 进行仿真运算, 可得槽内电势函数分布图, 如图 7 所示, 从图中可以看出, 面片拼接的 IGA 计算结果与解析解非常吻合. 图 8 给出了 $x = 0.5\text{m}$ 上的电势分布曲线 (这里只选取 $0 \leq y \leq 0.7\text{m}$), 很明显可以看出媒质分界面处的电势明显不光滑, 有突变. 经过计算, IGA 求得电势解的最大绝对误差为 0.0029V , 相对均方根误差为 0.0038% ; FEM 求得电势解的最大绝对误差为 0.0142V , 相对均方根误差为 0.0098% ; RBF 求得电势解的最大绝对误差为 0.0072V , 相对均方根误差为 0.0101% . 由此可以看出 IGA 在处理多媒质静电场问题时, 计算自由度差不多的情况下误差更小, 甚至差一个量级, 这充分说明了 IGA 计算精度高等优点.

3.3 分叉图形静电场问题

考虑一分叉图形静电场问题, 分叉图形含角点且非凸, 可通过 4 个 NURBS 曲面片拼接而成, 如图 9 所示, 4 个 NURBS 曲面片对应的节点矢量和齐次控制点见表 2 所示.

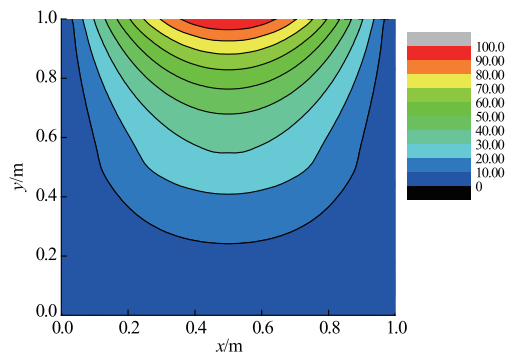
静电场问题对应的 Poisson 方程为

$$-\Delta\varphi = e^x [(x^2 + y^2 - 1) \sin(xy) - 2y \cos(xy)] \quad (27)$$

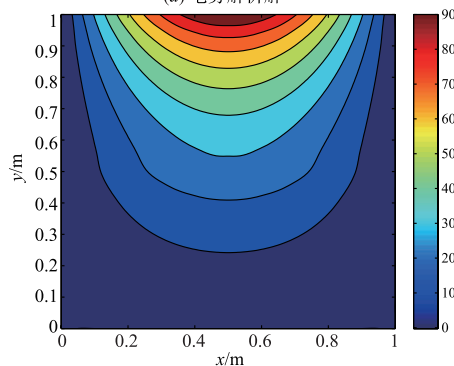
其边界电势为 $e^x \sin(xy)$, 该问题电势的解析解为

$$\varphi(x, y) = e^x \sin(xy) \quad (28)$$

为了验证方法的有效性, 用式(23)所示的数值解误差范数来进行误差分析. 在多面片拼接的 IGA 中, 用 h 细化方法对分叉图形进行两次细分, 从而保证两个张



(a) 电势解析解



(b) 电势IGA数值解

图7 槽内电势解析解和IGA电势数值解

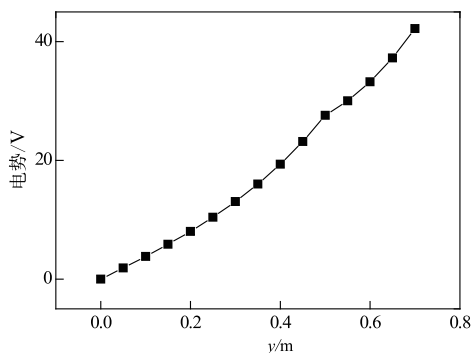


图8 $x=0.5m$ 上电势分布

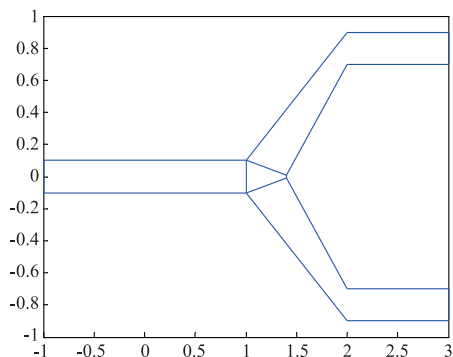


图9 分叉图形

量积方向基函数的次数均为3次和5次,图10给出了 $p=3$ 和 $p=5$ 时用多面片IGA计算得到的误差范数随自

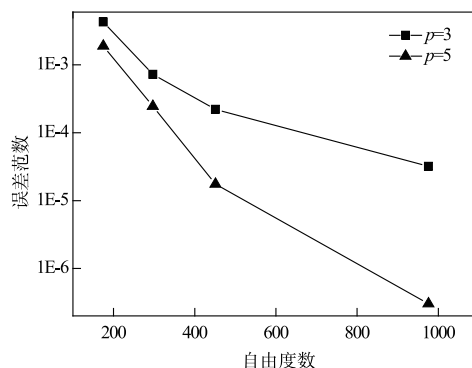


图10 分叉图形静电场误差范数

由度数变化趋势图,很明显可以看出随着自由度数的增加误差范数均变小而且能收敛于解析解,但是 $p=5$ 时误差范数收敛的更快,这说明了次数增加对误差范数影响很大.图11给出了 $p=5$ 时,976个计算自由度下分叉图形网格剖分及静电场分布图.

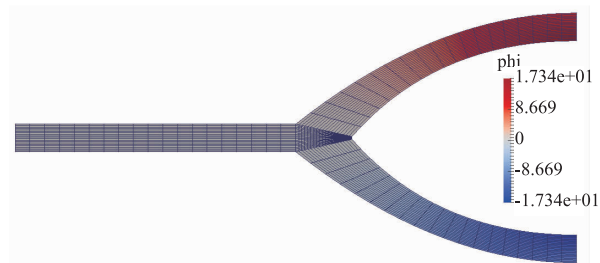


图11 分叉图形网格剖分及静电场云图

4 结论

本文通过面片拼接将等几何分析方法由单片扩展到多片,并推导了静电场问题的等几何分析离散方程.通过对含角点非凸几何域的静电场和多媒质分布的静电场问题的求解,同时与有限元法解比较可以看出等几何分析方法具有计算自由度少、收敛速度快、精度高等优点,而且还具有非常好的细分保形特性.

参考文献

- [1] Taflove A. Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method [M]. London: Artech House Publishers, 2000.
- [2] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media [J]. IEEE Trans Antennas and Propagation, 1966, 14: 302-307.
- [3] 王涛. 电磁场计算中的时域有限差分法的研究[D]. 长春: 吉林大学, 2005.
WANG Tao. Investigation of the FDTD method for electromagnetic field[D]. Changchun: Jilin University, 2005. (in Chinese)

- [4] Harrington R F, Harrington J L. Field Computation by Moment Methods[M]. New York: Macmillan Press, 1968.
- [5] Jin J M. The Finite Method in Electromagnetics[M]. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [6] Zienkiewicz O C, Cheung Y K. Finite elements in the solution of field problems [J]. The Engineer, 1965, 24: 507 - 510.
- [7] 彭玉华, 董晓龙. 小波变换在电磁场数值计算中的应用[J]. 电子学报, 1996, 24(12): 46 - 52.
PENG Yu-hua, DONG Xiao-long. Applications of wavelet transform in electromagnetic numerical computations [J]. Acta Electronica Sinica, 1996, 24(12): 46 - 52. (in Chinese)
- [8] 张勇. 计算电磁学的无单元方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2006.
ZHANG Yong. Meshless method for electromagnetic problems [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2006. (in Chinese)
- [9] 张淮清. 电磁场计算中的径向基函数无网格法研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2008.
ZHANG Huai-qing. Research on radial basis function meshless method in numerical computation of electromagnetic field [D]. Chongqing: Chongqing University, 2008. (in Chinese)
- [10] 赖生建. 计算电磁学中的径向基无网格法[D]. 重庆: 重庆大学, 2010.
LAI Sheng-jian. Research on meshless method with radial basis functions in computational electromagnetics [D]. Chongqing: Chongqing University, 2010. (in Chinese)
- [11] Liu J, Lin G. A scaled boundary finite element method applied to electrostatic problems [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2012, 36(12): 1721 - 1732.
- [12] 刘俊, 林皋, 王复明, 等. 静电场分析的比例边界有限元法[J]. 大连理工大学学报, 2011, 51(5): 731 - 736.
LIU Jun, LIN Gao, WANG Fu-ming, et al. Scaled boundary finite element method for analysis of electrostatic field problems [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2011, 51(5): 731 - 736. (in Chinese)
- [13] Li Z C. Combined Methods for Elliptic Equations with Singularities, Interfaces and Infinities [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [14] Givoli D, Rivkin L, Keller J B. A finite element method for domains with corners [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 35(6): 1329 - 1345.
- [15] Jin J, Wu X. The singular finite element method for some elliptic boundary value problem with interface [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 170(1): 197 - 216.
- [16] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194: 4135 - 4195.
- [17] Cottrell J A, Hughes T J R, Bazilevs Y. Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA [M]. Chichester: John Wiley & Sons, 2009.
- [18] 张勇, 林皋, 刘俊, 等. 静电场问题的等几何分析方法[J]. 大连理工大学学报, 2012, 52(6): 870 - 877.
ZHANG Yong, LIN Gao, LIU Jun, et al. Isogeometric analysis method for electrostatic field problems [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2012, 52(6): 870 - 877. (in Chinese)
- [19] 张勇, 林皋, 刘俊, 等. 等几何分析法应用于偏心柱面静电场问题[J]. 电波科学学报, 2012, 27(1): 177 - 183.
ZHANG Yong, LIN Gao, LIU Jun, et al. Isogeometric analysis and its application to eccentric parallel cylinders electrostatic problem [J]. Chinese Journal of Radio Science, 2012, 27(1): 177 - 183. (in Chinese)
- [20] 张勇, 林皋, 胡志强, 等. 等几何分析法求解静电场非齐次边值问题[J]. 电波科学学报, 2012, 27(5): 997 - 1004.
ZHANG Yong, LIN Gao, HU Zhi-qiang, et al. Isogeometric analysis for electrostatic problem with inhomogeneous boundary conditions [J]. Chinese Journal of Radio Science, 2012, 27(5): 997 - 1004. (in Chinese)
- [21] 张勇. 等几何分析方法和比例边界等几何分析方法的研究及其工程应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2013.
ZHANG Yong. Research on isogeometric analysis and scaled boundary isogeometric analysis and their applications in engineering [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2013. (in Chinese)
- [22] 张亚辉, 林家浩. 结构动力学基础[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2007.
ZHANG Ya-hui, LIN Jia-hao. Fundamentals of structural dynamics [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2007. (in Chinese)
- [23] Nguyen V P, Kerfriden P, Brino M, et al. Nitsche's method for two and three dimensional NURBS patch coupling [J]. Computational Mechanics, 2014, 53(6): 1163 - 1182.
- [24] Kapl M, Vitrih V, Jüttler B, et al. Isogeometric analysis with geometrically continuous functions on two-patch geometries [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2015, 70(7): 1518 - 1538.
- [25] Langer U, Mantzaflaris A, Moore S E, et al. Mesh grading in isogeometric analysis [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2015, 70(7): 1685 - 1700.
- [26] 王峰, 林皋, 刘俊, 等. 基于面片拼接的等几何分析方法

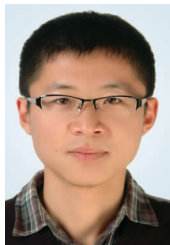
求解波导本征值问题[J]. 电子学报, 2016, 44(1): 200 - 205.

WANG Feng, LIN Gao, LIU Jun, et al. Isogeometric analysis for the waveguide eigenvalue problem based on the NURBS patch splicing technique [J]. Acta Electronica

Sinica, 2016, 44(1): 200 - 205. (in Chinese)

[27] Dornisch W, Klinkel S. Boundary conditions and multi-patch connections in isogeometric analysis [J]. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, 2011, 11(1): 207 - 208.

作者简介



王 峰 男, 1987 年 5 月出生, 山东莱阳人, 博士、讲师. 主要从事水工结构和电磁学数值仿真研究.

E-mail: wangfeng@mail.dlut.edu.cn



周宜红 男, 1966 年 9 月出生, 湖北枝江人, 博士、教授、博士生导师. 主要从事水利工程施工与组织管理方面研究.

E-mail: zywhu2003@163.com