

一种分数阶巴特沃斯滤波器的有源电路设计

庞轶环, 胡志忠

(南京航空航天大学电子信息工程学院, 江苏南京 211106)

摘要: 本文将分数阶的低通滤波器的传递函数通式近似设计为 Butterworth 滤波器, 在确定阶数与截止频率之后计算得到传递函数的系数. 继而, 本文通过该传递函数设计电路, 进行仿真并电路实现. 本文设计的电路在任意阶数下都只需要修改小部分元件便可得到预计截止频率, 具有很强的灵活性.

关键词: Butterworth 滤波器; 分数阶微积分; 分数阶滤波器

中图分类号: TN713

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2018)05-1160-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.05.021

Active Circuit Design of a Fractional Order Butterworth Filter

PANG Yi-huan, HU Zhi-zhong

(College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Jiangsu, Nanjing 211106, China)

Abstract: The transfer function of the fractional low-pass filter is approximated as a Butterworth filter. The coefficients of the transfer function are calculated after determining the order and the cutoff frequency. Then, the circuit design, simulation and circuit implementation are based on the transfer function. In this paper, the circuit in any order can be implemented by changing few components of the circuit which has a strong flexibility.

Key words: Butterworth filter; fractional calculus; fractional filter

1 引言

科学家们对微积分的探讨已经持续了四百多年, 到目前为止, 对于 1 阶, 2 阶, 甚至 n 阶的微积分都有足够的了解并早已广泛运用于生活生产. 然而微积分是否只存在整数阶? 17 世纪以来, 科学家对此进行了许多研究, 并发现, 微积分的阶数不仅可以是整数, 还可以是分数, 甚至是无理数. Riemann-Liouville 对于分数阶微积分的定义^[1-4]如下:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) &\equiv D_t^\alpha f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_0^t \frac{F(\tau)}{(t-\tau)^{1-(m-\alpha)}} d\tau \quad (1) \end{aligned}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数 (Euler Gamma 函数), 且 $m-1 \leq \alpha < m$, m 为正整数, α 为实数. 零初始条件下, 其拉普拉斯变换为^[1]:

$$L\{D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) \quad (2)$$

如参考文献[5]所述, 尽管还没有现成的分数阶元件, 分数阶电容电感现象在现实中是存在的. 将分数阶电容元件引入滤波电路, 研究其电路特性, 能够弥补整数阶滤波器理论的空白部分, 具有重要的理论研究意义.

目前国内对分数阶微积分计算实现的研究已有些成果^[6,7], 对分数阶模拟滤波器方面的研究几乎空白, 而国外已经对分数阶模拟滤波器理论进行了较为全面的研究^[8-14]: 文献[8]研究了用分数阶 LC 元件设计 Butterworth 滤波器的方法; 文献[9]和[10]研究了用无源器件模拟分数阶电容的方法; 文献[11~14]对分数阶低通滤波器的传递函数进行研究, 其中文献[13]基于 FPAA 实现了近似的分数阶滤波器. 然而这些文献多是将分数阶的 s^α 近似后代入滤波器的传递函数从而设计电路, 所实现的滤波电路只能进行理论分析, 不能在未来分数阶电容出现后, 直接投入使用. 而文献[12]通过计算低通滤波器传递函数通式中的系数, 利用 KHN 滤波器和 Sallen-Key 滤波器来实现电路.

而本文参考文献[8,12]中低通滤波器传递函数通式中系数的计算方法, 设计一种可行的电路方案来实现分数阶 Butterworth 滤波器. 由于本文在设计过程中并未对 s^α 进行近似, 所设计的电路在未来分数电容出现后可以直接投入使用. 继而本文通过研究三种具有代表性的阶数的滤波器幅频响应曲线, 对该电路方案的可行性进行探讨. 最后选择了 1.4 阶的滤波器进行实际电路实现.

2 分数阶 Butterworth 滤波器设计

2.1 分数阶 Butterworth 滤波器传递函数设计

如式(3)所示为一个 2α 阶的低通滤波器的传递函数,本文参考文献[8]通过计算系数 a, b, c ,将该低通滤波器设计为 Butterworth 滤波器.

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{a \cdot s^{2\alpha} + b \cdot s^\alpha + c} \quad (3)$$

则式(3)的特征方程对应的幅频特性函数的平方为:

$$|D(j\omega)|^2 = c^2 + a^2\omega^{4\alpha} + b^2\omega^{2\alpha} + 2ab\omega^{3\alpha} \cdot \cos(0.5\alpha\pi) + 2ac\omega^{2\alpha} \cdot \cos(\alpha\pi) + 2bc\omega^\alpha \cdot \cos(0.5\alpha\pi) \quad (4)$$

而理想 2α 阶 Butterworth 滤波器传递函数的特征方程对应的幅频特性函数的平方为:

$$|D(j\omega)|^2 = 1 + \varepsilon \cdot \omega^{4\alpha} \quad (5)$$

通过对比式(4)与式(5),令式(4)中 $c = 1, a^2 = \varepsilon$,则式(4)前两项之和与式(5)相同.将式(4)余下的部分定义为误差项,如式(6)所示:

$$F(j\omega) = b^2\omega^{2\alpha} + 2ab\omega^{3\alpha} \cdot \cos(0.5\alpha\pi) + 2ac\omega^{2\alpha} \cdot \cos(\alpha\pi) + 2bc\omega^\alpha \cdot \cos(0.5\alpha\pi) \quad (6)$$

显然,Butterworth 滤波器的误差项式(6)在截止频率 ω_o 上必然等于 0,如式(7)所示:

$$b^2\omega_o^{2\alpha} + 2ab\omega_o^{3\alpha} \cdot \cos(0.5\alpha\pi) + 2ac\omega_o^{2\alpha} \cdot \cos(\alpha\pi) + 2bc\omega_o^\alpha \cdot \cos(0.5\alpha\pi) = 0 \quad (7)$$

根据式(5)和截止频率的定义可以得到截止频率 ω_o 与系数 ε 的关系为:

$$\varepsilon \cdot \omega_o^{4\alpha} = 1 \quad (8)$$

又由 $\varepsilon = a^2$,得到 a 与 ω_o 关系为:

$$a = \frac{1}{\omega_o^{2\alpha}} \quad (9)$$

将 $c = 1$ 和 $a = \frac{1}{\omega_o^{2\alpha}}$ 代入式(7)可得等式(10)成立:

$$b^2\omega_o^{2\alpha} + 4b\omega_o^\alpha \cdot \cos(0.5\alpha\pi) + 2\cos(\alpha\pi) = 0 \quad (10)$$

求解式(10),得系数 b 的取值为 $\frac{-2\cos(0.5\alpha\pi) \pm \sqrt{2}}{\omega_o^\alpha}$,又根据系统稳定性要求 $b > 0$,故 b

的取值情况如式(11)所示:

$$b = \begin{cases} \frac{-2\cos(0.5\alpha\pi) + \sqrt{2}}{\omega_o^\alpha}, & 0.5 + 2k < \alpha \leq 1.5 + 2k \\ \frac{-2\cos(0.5\alpha\pi) - \sqrt{2}}{\omega_o^\alpha}, & 1.5 + 2k < \alpha \leq 2 + 2k \end{cases} \quad (11)$$

其中, k 为非负整数.由于式中 α 以 2 为周期,故本文只研究 $k = 0$ 时的情况,即 $0.5 < \alpha \leq 2$.

可见在确定了滤波器阶数 α 并预设截止频率 ω_o 之后,通过上文的方法可以确定传递函数式(3)的系数 a, b 和 c ,继而设计电路.

2.2 分数阶 Butterworth 滤波器电路设计

由式(3)变形可得:

$$V_{in} = a \cdot s^{2\alpha} \cdot V_{out} + b \cdot s^\alpha \cdot V_{out} + c \cdot V_{out} \quad (12)$$

令式(12)中 $V_1 = s^\alpha \cdot V_{out}, V_2 = s^{2\alpha} \cdot V_{out}, c = 1$,则将式(12)整理可得:

$$V_2 = \frac{1}{a} \cdot V_{in} - \frac{b}{a} \cdot V_1 - \frac{1}{a} \cdot V_{out} \quad (13)$$

根据上式,并由 $V_1 = V_2 \cdot s^{-\alpha}, V_{out} = V_1 \cdot s^{-\alpha}$,设计信号流程图如图 1 所示.

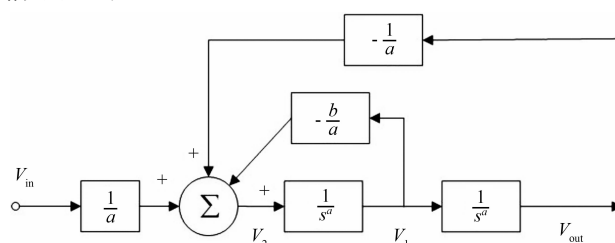


图1 滤波器的信号流程图

根据此信号流程图可以得到如图 2 所示的电路图,图中的 U_1, U_2 均为 α 阶的分数阶电容,其容值为 C_1, C_2 .

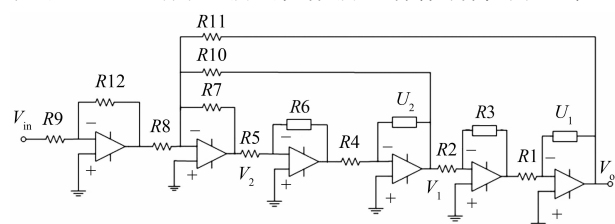


图2 分数阶Butterworth滤波器电路图

该电路有两个优势:(1)虽然用了相对较多的放大器,但是与文献[12]给出的滤波器相比,该电路只需要变动个别电阻就可以实现不同参数要求的滤波器,灵活性较高;(2)由于传递函数系数都由元件阻抗值的比例计算而得,在实际实现过程中可以减少由于元件阻抗不精准而产生的误差.若采用如图 1 信号流程图中的系数来计算图 2 电路中的元件参数,在 ω_o 较大的情况下,计算所得的 R_8 与 R_7 阻值相差太多,高达 10^8 数量级,在仿真软件下无法达到预期截止频率,并且会对实际电路实现产生困难.因而本文借由信号流程图设计电路结构,利用传递函数重新计算元件值.

本文设置输入端的反相放大器的系数为 1,取 $R_9 = R_{12} = 10k\Omega$.计算图 2 电路图所对应的传递函数如下式所示:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{1}{\frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_4 \cdot R_5 \cdot R_8 \cdot C_1 \cdot C_2}{R_3 \cdot R_6 \cdot R_7}}$$

$$\cdot \frac{1}{s^{2\alpha} + \frac{R1 \cdot R2 \cdot R8 \cdot C1}{R3 \cdot R10} \cdot s^\alpha + \frac{R8}{R11}} \quad (14)$$

将式(14)与式(3)相对比可得:

$$\frac{R1 \cdot R2 \cdot R4 \cdot R5 \cdot R8 \cdot C1 \cdot C2}{R3 \cdot R6 \cdot R7} = a \quad (15)$$

$$\frac{R1 \cdot R2 \cdot R8 \cdot C1}{R3 \cdot R10} = b \quad (16)$$

$$\frac{R8}{R11} = 1 \quad (17)$$

由于本文拟固定反相放大器的系数,通过调整电阻 $R7$ 、 $R10$ 、 $R11$ 和 $R8$ 实现对滤波器参数的调整. 为确保电阻 $R7$ 、 $R10$ 、 $R11$ 和 $R8$ 的阻值相差不大,且放大器能够正常工作,通过多组测试,取 $U1$ 、 $U2$ 电容值为 $100\mu\text{F} \cdot s^{1-\alpha}$, $R1$ 和 $R4$ 为 $1\text{k}\Omega$, $R5$ 和 $R2$ 为 $1\text{k}\Omega$, $R6$ 和 $R3$ 为 $10\text{k}\Omega$, $R10 = 2\text{k}\Omega$. 则剩下电阻 $R7$ 、 $R11$ 和 $R8$ 的阻值由关系式(18)和式(19)确定:

$$R8 = R11 = b \cdot \frac{R3 \cdot R10}{R1 \cdot R2 \cdot C1} \quad (18)$$

$$R7 = \frac{a}{b} \cdot \frac{R4 \cdot R5 \cdot R10 \cdot C2}{R6} \quad (19)$$

本文接下来先仿真测试 $\alpha = 1$, $\omega_o = 2\pi \times 1000\text{rad/s}$ 时的幅频响应曲线,根据结果是否理想,判断电路元件值的取值是否合理;在电路可行,元件合理的情况下,再仿真测试 $\alpha = 0.7$ 和 1.3 下的幅频响应,验证本文分数阶 Butterworth 滤波器的设计方案是否可行.

3 电路仿真

3.1 实现 2 阶滤波器

当 $\alpha = 1$, 将图 2 中 $U1$ 、 $U2$ 换成电容值为 $100\mu\text{F}$ 的常规 $C1$ 、 $C2$, 在 $\omega_o = 2\pi \times 1000\text{rad/s}$ 时,电路中的各元件取值如表 1 所示.

表 1 二阶滤波电路的元件取值

| | |
|---------------------------------|-----|
| $R1, R2, R4, R5$ (k Ω) | 1 |
| $R6, R3, R9, R12$ (k Ω) | 10 |
| $R10$ (k Ω) | 2 |
| $R7$ (k Ω) | 180 |
| $R8, R11$ (Ω) | 45 |

将图 2 电路中的电阻电容值设定好后,通过 PSPICE 仿真电路,得到 $\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}}$ 的幅频响应曲线如图 3 所示:

经过测量可以得到图 3 的幅频响应曲线中实际截止频率为 1000Hz ,与预设的截止频率相同;通带波动为零,波形良好,且过渡带衰减为 $40\text{dB}/十倍频$. 从而验证了图 2 给出的电路实现二阶 Butterworth 滤波器是可行的.

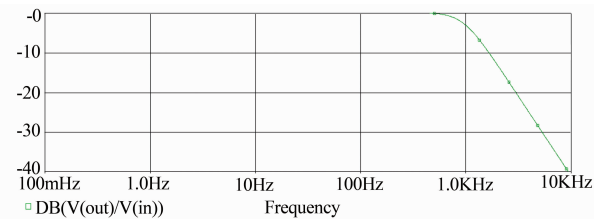


图 3 $\alpha=1$ 时的幅频响应曲线

3.2 实现 1.4 阶滤波器

由于没有现成可用的分数阶电容,故本文采用的分数阶电容是根据文献[9]设计出的模拟分数阶电容. 文献[9]用无源串并网络来模拟分数阶电容,通过设定分数阶电容的阶数和工作频率范围,确定此网络中的电阻电容值. 在设定的工作频率范围内,该模拟分数阶电容与理想分数阶电容的电压幅频响应曲线误差小,可以控制在 2dB 以内. 根据该设计方法,本文设计电容值为 $100\mu\text{F} \cdot s^{-0.3}$ 的 0.7 阶模拟分数阶电容元件,如图 4 所示.

图 5 为该电容在 1A 正弦电流激励下的电压的幅频响应曲线,图 6 为相应的相频响应曲线. 通过数据分析,在图 7 幅频响应曲线中的 $100\mu\text{Hz}$ 到 10kHz 的范围内,曲线下降速率为 $14\text{dB}/十倍频$. 根据图 6 所示,在 $(219\mu\text{Hz}, 2\text{kHz})$ 的频率范围内,该模拟元件相位波动在 -65d (度)到 -61d 之间,与理想的 0.7 阶电容元件的理论相位 -63d 相差不大,是可以接受的误差. 故取频率范围 $(219\mu\text{Hz}, 2\text{kHz})$ 为阶数为 0.7 ,容值为 $100\mu\text{F} \cdot s^{-0.3}$ 的电容的有效频率范围.

将图 4 电路封装成图 2 中 $U1$ 、 $U2$,即在有效频率 $(219\mu\text{Hz}, 2\text{kHz})$ 范围内 $U1$ 、 $U2$ 可以当作分数阶电容来使用. 通过计算,当截止频率 $\omega_o = 2\pi \times 1000\text{rad/s}$ 时, 1.4 阶电路元件取值如表 2 所示.

表 2 1.4 阶滤波电路的元件取值

| | |
|---------------------------------|-----|
| $R1, R2, R4, R5$ (k Ω) | 1 |
| $R6, R3, R9, R12$ (k Ω) | 10 |
| $R10$ (k Ω) | 2 |
| $R7$ (k Ω) | 4.6 |
| $R8, R11$ (Ω) | 222 |

调整电路的电容电阻值,得到 $\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}}$ 的幅频响应曲线如图 7 所示.

通过 PSPICE 的数据测量功能,可得图 7 幅频响应曲线中实际截止频率为 1.05k ,与预设频率略有误差,但相差不大;而阻带衰减速率为 $27.7\text{dB}/十倍频$,与理论值 $28\text{dB}/十倍频$ 亦非常接近;且通频带内波形平滑良好,证明 1.4 阶 Butterworth 滤波器可以实现.

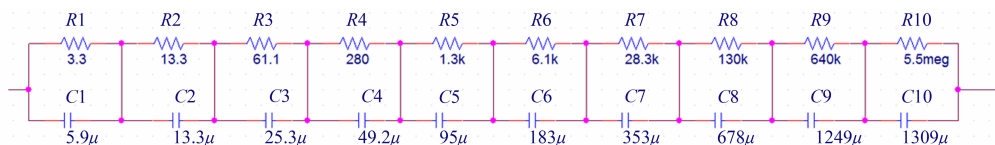


图4 0.7阶电容元件模拟电路

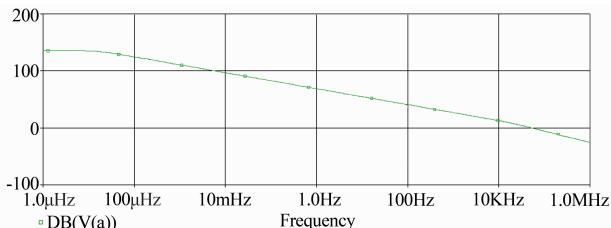


图5 0.7阶模拟电容元件幅频响应曲线

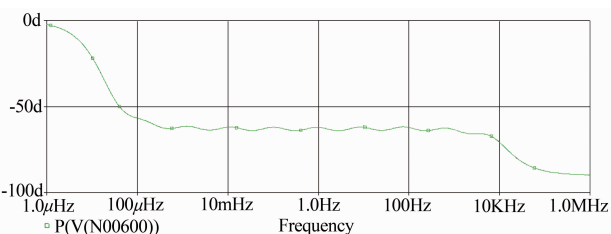


图6 0.7阶模拟电容元件相频响应曲线

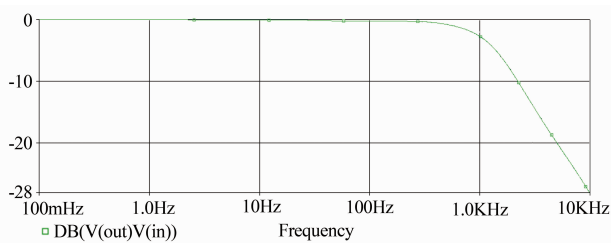


图7 $\alpha=0.7$ 时的幅频响应曲线

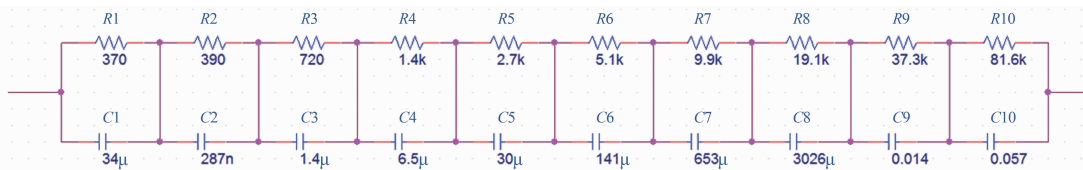


图9 0.3阶电容元件模拟电路

| | |
|--------------------------------|-----|
| $R1, R2, R4, R5$ (k Ω) | 1 |
| $R9, R12$ (k Ω) | 10 |
| $R10$ (Ω) | 20 |
| $R7$ (Ω) | 402 |
| $R8, R11$ (Ω) | 5.4 |
| $C3, C4$ (μ F) | 1 |

如图 10 所示的幅频响应曲线中,截止频率为 1.04kHz,与预设截止频率相近;2.6 阶 Butterworth 滤波器理论上过渡带的衰减速率应该为 52dB/十倍频,而实际的衰减速率为 54dB/十倍频.然而通频带内波形不够平整,在截止频率附近有上翘现象.从 30Hz 开始,幅频增益开始大于 0,在截止频率附近上翘越发严重,最大增益达到 1.65dB.

3.3 实现 2.6 阶滤波器

2.6 阶滤波器电路仿真与 1.4 阶滤波器不同的地方在于,由于本文模拟的电容元件阶数小于 1,所以 $\alpha > 1$ 时无法用分数阶积分电路与比例电路级联而得,故改用分数阶积分电路与正常积分电路级联.将图 2 电路中的 $U1, U2$ 改为 0.3 阶的分数阶电容元件,将 $R3$ 和 $R6$ 换成电容 $C3$ 和 $C4$,如图 8 所示.

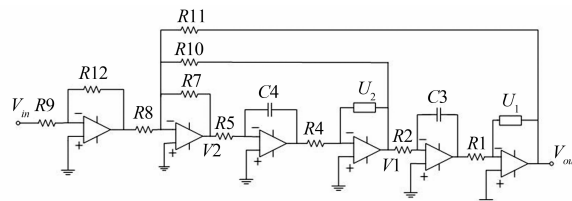


图8 2.6阶Butterworth滤波电路

图 8 中的 $U1, U2$ 为阶数为 0.3,电容值为 $100\mu\text{F} \cdot \text{s}^{-0.7}$ 的模拟分数阶电容,其电路如图 9 所示.

与图 4 中的电路一样,用 PSPICE 仿真图 9 电路并测量,得到 0.3 阶电容的有效工作频率范围在 180 μ Hz 到 2kHz 之间.而图 8 中其他元件值如下表 3 所示.

调整电容电阻值,得到 $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ 在 $\omega_0 = 2\pi \times 1000\text{rad/s}$ 截止频率下的幅频响应曲线如图 10 所示.

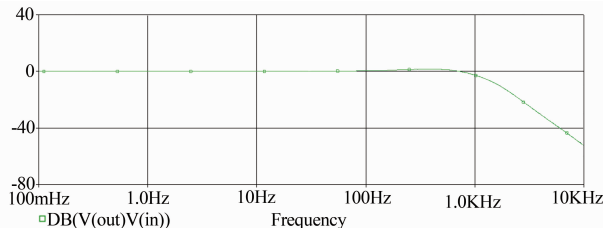


图10 $\alpha=1.3$ 时的幅频响应曲线

4 分数阶滤波器误差分析

通过对本文电路的多组截止频率的仿真测试,发现对于 $\alpha \leq 1$ 的滤波器来说,幅频响应波形误差较小,相对理想;然而当 $\alpha > 1$ 后,幅频响应波形会在截止频率附近产生上翘,且截止频率越高,上翘越明显.下文

以截止频率 $\omega_o = 2\pi \times 1000\text{rad/s}$ 为例,分析波形上翘的产生原因。

首先研究当 $\alpha = 1.3$ 时,理想 Butterworth 滤波器幅频响应函数如式(20)所示,

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 \omega^{4\alpha}}} \quad (20)$$

通过 Matlab 绘制的幅频响应曲线如图 11 所示。

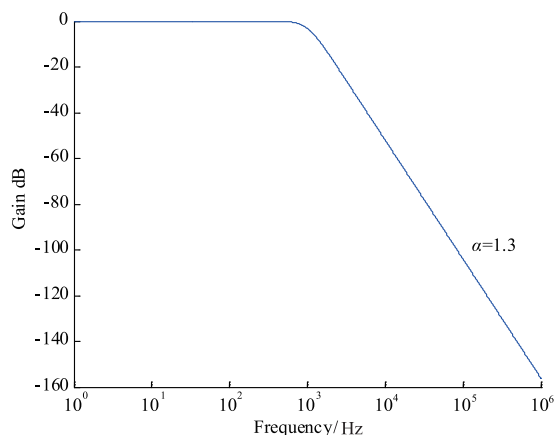


图11 $\alpha = 1.3$ 时理想Butterworth滤波器的幅频响应曲线

可见在图 11 的幅频响应曲线中,通频带内增益均为 0,十分平整.故图 10 中出现在截止频率附近波形上翘的原因来源于误差项.由于本文对于系数 a 、 b 的确定,来自式(6)在截止频率下误差项等于 0,而实际上取该系数的传递函数不能满足误差项式(6)在 ω 取任何值时都等于 0,甚至当 ω 比较大时,式(6)取值远大于 0.故而造成了幅频响应曲线在通频带内波动.

经过计算,在 $\alpha < 1$ 时, α 取 0.7 误差项式(6)的绝对值最大.而当 $\alpha > 1$ 时,误差项的绝对值随着阶数的变大而增加.图 12 列举了在 $\omega_o = 2\pi \times 1000\text{rad/s}$ 情况下, α 分别取 0.7、1.2、1.3 和 1.4 时,误差项的对比变化.

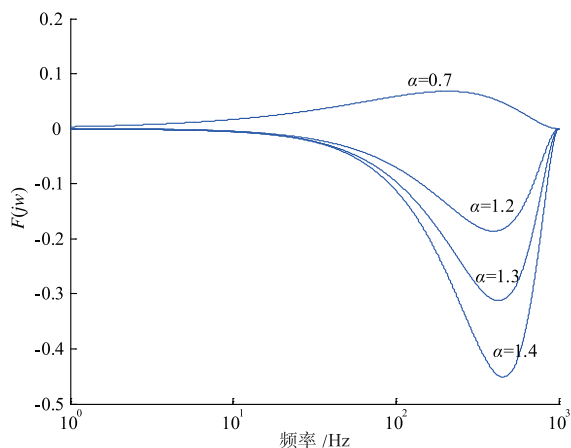


图12 $\alpha = 0.7$ 、1.2、1.3和1.4时 $F(j\omega)$ 变化

由图 12 中可见, $\alpha < 1$ 时,误差项绝对值最大不超

过 0.1;而 $\alpha > 1$ 时的误差项绝对值相比非常大.当 $\alpha > 1$ 时,在频率小于 100Hz 的情况下, $F(j\omega)$ 变化相对比较小基本在可接受范围内;而当大于 100Hz 后,误差项变成负数,且绝对值比较大.误差项 $F(j\omega)$ 迅速变小则 $|D(j\omega)|^2$ 也将迅速变小,那么 $\frac{1}{|D(j\omega)|^2}$ 自然也会变大.

阶数越大,这种变化越明显,体现在 Butterworth 滤波器的幅频响应上,就是在截止频率之前通频带内产生的上翘.故当阶数 $\alpha \leq 1$ 时,式(6)虽然并未完全等于 0,但也接近于 0,误差基本可以忽略,故得到的波形与理想 Butterworth 滤波器较接近;而当阶数 $\alpha > 1$ 时,该设计的缺陷就较为明显.在截止频率较低的通频带内波动不大,随着频率变高,波形产生上翘,并且滤波器阶数越高,这种现象就越发明显,与理想 Butterworth 滤波器的波形也就相差愈远.

5 实际电路测试

本文根据图 2 电路搭建阶数为 1.4、截止频率为 1000Hz 的滤波器电路,所用放大器为 OP27G,得到如图 13 所示幅频响应曲线.本文设置扫频仪输出电平为 0.0dBm,并在滤波电路输入端之前多加一节衰减电路,将扫频仪输出信号衰减 10 倍后输入滤波电路,因此本文得到的幅频响应曲线在通频带内的增益应为 -20dB.图 13 中的幅频响应曲线频率范围为 10Hz ~ 10kHz,截止频率为 1kHz,通频带内 0.8kHz 之前波动小于 2dB.由于该电路使用的模拟分数阶电容的有效频率范围为 (219 μ Hz, 2kHz),故本文只讨论有效频率范围内衰减带的衰减速率.由图 13 可见,该幅频响应曲线阻带的衰减速率约为 23dB/十倍频,比理想衰减速率小 5dB/十倍频率.

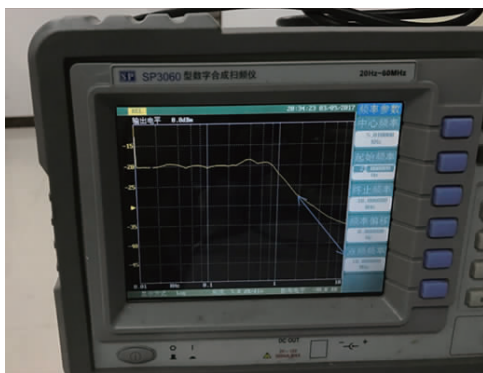


图13 1.4阶Butterworth滤波器幅频响应曲线

由于电路所用的分数阶元件为 RC 串并网络模拟而成,本身存在误差;且本文测试电路基于面包板,用插式电容电阻搭建而成,在测试中存在噪声,经过放大器放大会对电路输出造成影响,故而本文认为该幅频响应曲线在通频带的波动误差与衰减带内的衰减

速率的误差在可接受范围内,可以验证本文设计的电路可以实现分数阶 Butterworth 滤波器。

6 结论

通过计算低通滤波器传递函数通式中的系数,本文设计了一种可行的电路方案来实现分数阶 Butterworth 滤波器。本文通过比较三种具有代表性阶数的滤波器对该设计方案进行检验,可见,用该设计方法实现低于 2 阶的滤波器相对理想。虽然当频率在靠近截止频率的通带内,幅频响应的波形会略微低于 0,但是整体来讲影响不大。但对于高于 2 阶的滤波器,该设计方法会在靠近截止频率的通带内产生波形上翘,且截止频率越高,上翘越厉害。如果将这种滤波器单独使用,可能会产生比较大的误差;如果将该滤波器作为几个滤波器级联的前段时,反而有助于消除误差。

参考文献

- [1] K Oldham, J Spanier. The fractional calculus [J]. Mathematical Gazette, 1974, 56(247): 396 - 400.
- [2] S G Samko, A A Kilbas, O I Marichev. Fractional Integrals and Derivatives [M]. Theory and Applications, Gordon and Breach, 1993.
- [3] K S Miller, B Ross. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations [M]. John Wiley & Sons, 1993.
- [4] 薛定宇, 赵春娜. 分数阶系统的分数阶 PID 控制器设计 [J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 771 - 776.
Xue Ding-yu, Zhao Chun-na. Design of fractional PID controller for fractional order system [J]. Control Theory and Applications, 2007, 24(5): 771 - 776. (in Chinese)
- [5] Ahmed S. et al. Fractional-order circuits and systems: An emerging interdisciplinary research area [J]. IEEE Circuits and Systems Magazine-new series -, 2010, 10(4): 40 - 50.
- [6] 廖科. 分数阶微积分运算数字滤波器设计与电路实现及其应用 [D]. 四川: 四川大学, 2006. 1 - 206.
Liao Ke. Design and circuit realization of fractional calculus operation digital filter and its application [D]. Sichuan: Sichuan University, 2006. 1 - 206. (in Chinese)
- [7] 李远禄. 分数阶微积分滤波器原理、应用及分数阶系统辨识 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2007. 1 - 123.
Li Yuan-lu. Fractional calculus filter principle, application and fractional order system identification [D]. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, 2007. 1 - 123. (in Chinese)
- [8] A Soltan, et al. Butterworth passive filter in the fractional-order [A]. 2011 International Conference on Microelectronics Proceedings [C]. Hammamet: IEEE, 2011. 1 - 5.
- [9] A Charef, H H Sun, Y Y Tsao, B Onaral. Fractal system as represented by singularity function [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(9): 1465 - 1470.
- [10] Reyad El-Khazali. On the biquadratic approximation of fractional-order laplacian operators [J]. Analog Integrated Circuits and Signal Processing, 2015, 82(3): 503 - 517.
- [11] Maundy B, Elwakil A S, Freeborn T J. On the practical realization of higher-order filters with fractional stepping [J]. Signal Processing, 2011, 91(91): 484 - 491.
- [12] Ali A S, Radwan A G, Soliman A M. Fractional order buterworth filter: Active and passive realizations [J]. Emerging & Selected Topics in Circuits & Systems IEEE Journal on, 2013, 3(3): 346 - 354.
- [13] Freeborn T J, et al. Field programmable analogue array implementation of fractional step filters [J]. IET Circuits, Devices & Systems, 2010, 4(6): 514 - 524.
- [14] Freeborn T J, Maundy B, Elwakil A. Towards the realization of fractional step filters [A]. 2010 IEEE International Symposium on Circuit and Systems Proceedings [C]. New York: IEEE, 2010. 1037 - 1040.

作者简介



庞轶环 (通信作者) 女, 1993 年生, 江苏无锡人, 硕士在读, 2015 年至今, 就读于南京航空航天大学电子信息工程学院电路与系统专业, 主要研究方向为分数阶滤波器设计。
E-mail: pyh_nuaa@163.com



胡志忠 男, 1969 年生, 江苏张家港人, 2003 年获南京航空航天大学导航制导与控制专业博士学位。现为南京航空航天大学电子信息工程学院电子科学与技术系副教授。主要研究方向为电子系统设计、信号检测与处理等。
E-mail: hzzbme@nuaa.edu.cn