

## 基于递阶原理的非均匀采样非线性系统的模糊辨识

王宏伟, 连捷, 夏浩

(大连理工大学控制科学与工程学院, 辽宁大连 116024)

**摘要:** 针对非均匀多采样率非线性系统的建模问题, 提出了基于递阶原理的模糊辨识方法. 首先, 分析了非线性系统在输入信号非均匀周期刷新, 输出信号周期采样的情况下, 非线性系统可以通过提升技术, 利用多个局部线性模型加权组合的模糊模型来描述. 在此基础上, 利用 GK 模糊聚类确定模糊模型前件结构, 利用基于递阶原理的递推最小二乘辨识算法辨识模糊模型后件参数. 同时, 通过鞅定理对辨识算法的收敛性进行了研究. 最后, 通过仿真实例证明了本文方法的有效性.

**关键词:** 模糊辨识; 非均匀采样; 非线性系统; 递阶原理; 系统辨识

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2018)04-1005-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.04.031

## Fuzzy Identification for Non-Uniformly Sampled Nonlinear Systems Based on Hierarchical Principle

WANG Hong-wei, LIAN Jie, XIA Hao

(School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, China)

**Abstract:** For the modeling issue of non-uniformly multi-rates sampled nonlinear systems, a fuzzy identification method based on hierarchical principle is proposed in the paper. First of all, a nonlinear system is described as a weighted combination representation of the multiple local linear models by using lift technology when the non-uniformly updating scheme for input signals and uniformly sampling scheme for output signals are taken in the data sampling process. On this basis, we propose a fuzzy identification algorithm, in which the GK fuzzy clustering method and a recursive least squared method based on hierarchical principle are used to confirm the premise structure and consequence parameters of fuzzy model, respectively. Moreover, the convergence of the identification algorithm is studied by using martingale theorem. Finally, the effectiveness of the proposed method is demonstrated by a simulation example.

**Key words:** fuzzy identification; non-uniformly sampling; nonlinear systems; hierarchical principle; system identification

### 1 引言

非均匀多采样率系统是工业控制中很重要的一类系统, 受各种条件的限制(例如时基抖动、人工采样、数据丢失或传输延迟等), 系统的输入信号和输出信号分别采用不同的非均匀采样频率. 目前, 针对非均匀多采样率系统的建模和控制的研究, 大多数都集中在线性系统. 文献[1~5]采用辅助模型和提升变量等方法, 研究了非均匀采样线性系统的建模问题. 在非均匀采样系统辨识领域, 文献[6]基于递阶辨识的原理, 利用非均匀周期采样系统的输入输出数据, 研究了系统状态

空间模型的辨识问题. 文献[7,8]分别采用模糊聚类方法和竞争学习方法对非均匀采样非线性系统进行了辨识研究. 采用聚类方式确定模糊模型前件结构, 采用最小二乘方法确定模糊模型后件参数. 在其采用最小二乘辨识中, 由于辨识参数较多, 因此算法计算量较大, 效率较低.

从文献来看, 非均匀采样的非线性系统辨识仍是非均匀采样系统建模的难点. 其难点主要表现在:

(1) 模型选取. 采用什么样的模型能够准确地描述非均匀采样的非线性系统是一个关键问题. 描述非线性系统的模型, 可以是神经网络模型、Hammerstein 模

型、Wiener 模型、Hammerstein-Wiener 混合模型、模糊模型等<sup>[9,10]</sup>. 对于选定的模型,就需要研究其结构辨识,即描述模型的阶数、参数个数、规则数等.

(2) 辨识算法选择<sup>[11]</sup>. 由于非均匀采样系统都采用了提升技术进行离散化,模型中含有大量的变量和参数,因此找到合适的辨识算法是一个关键问题. 需要研究计算量小,效率高的参数辨识算法. 我们从两个问题出发,研究非均匀采样系统的辨识问题. 首先,采用聚类形式的 T-S 模糊模型来描述非均匀采样的非线性系统,其优点:①通过含有无监督学习的模糊聚类算法直接确定模糊模型的前件结构,包括规则和隶属度函数;②通过递推最小二乘估计后件模型的参数.

为此,本文提出了基于递阶原理的非均匀采样非线性系统的模糊辨识方法. 递阶原理方法为:将系统原有的大维数辨识模型分解为多个维数较低的模型,然后辨识各子系统,并协调处理各子系统之间的关联项. 为此做了如下工作:第一,采用提升变量作为模糊模型的输入量,建立系统的模糊模型;第二,采用 GK 模糊聚类方法确定模糊模型的规则,规则数;第三,采用基于递阶原理的最小二乘算法确定模型参数. 通过定理证明,系统在输入信号持续激励下,模糊模型参数能够一致收敛. 最后,对化工非线性 PH 酸性中和过程,利用现场采样数据进行建模,证明了所提方法的有效性.

## 2 模糊模型的建立

### 2.1 问题的描述

考虑如下连续非线性系统:

$$S_c: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \Gamma(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $y(t) \in R^1, u(t) \in R^1$ .

式(1)中的控制量满足如下关系:

$$u(t) = \begin{cases} u(kT), & kT \leq t < kT + t_1 \\ u(kT + t_1), & kT + t_1 \leq t < kT + t_2 \\ \vdots \\ u(kT + t_{p-1}), & kT + t_{p-1} \leq t < (k+1)T \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中,非均匀刷新时间间隔为  $\tau_i (\tau_i = t_i - t_{i-1}), t_i = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_i (t_0 = 0, t_p = T), T = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_p = t_p$  称为帧周期. 控制  $u$  在第  $k$  个更新周期  $[kT, kT + T), k = 0, 1, 2, \dots$ , 以  $t = kT + t_i, i = 0, 1, 2, \dots, p-1$  非均匀刷新  $p$  次. 输出  $y$  在一个周期  $T$  内均匀采样,即  $y(t) = y(kT), t \in [kT, kT + T)$ .

利用提升技术,系统(1)离散化后可以采用如下模型描述:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(kT + T) = f[\mathbf{x}(kT), \tilde{\mathbf{u}}(kT)] \\ y(kT) = h[\mathbf{x}(kT)] \end{cases} \quad (3)$$

其中,输入信号

$$\tilde{\mathbf{u}}(kT) = \begin{bmatrix} u_1(kT) \\ u_2(kT) \\ \vdots \\ u_p(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(kT) \\ u(kT + t_1) \\ \vdots \\ u(kT + t_{p-1}) \end{bmatrix} \in R^{p \times 1} \quad (4)$$

### 2.2 模糊模型的结构描述

根据 2.1 节的讨论,非线性系统经过非均匀采样后,采用文献[7]提出的模糊模型来描述非线性系统(3),即

$R^l$ : 如果  $\varphi(kT)$  属于  $F_l$  ( $F_l$  的隶属度函数为

$$\mu_l[\varphi(kT)]), 则 y(kT) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{b_{li}(z^{-1})}{a_i(z^{-1})} u(kT + t_i) \quad (5)$$

其中  $\varphi(kT)$  代表第  $kT$  时刻模糊模型的输入信号,其为  $\varphi(kT) = [y(kT - T), \dots, y(kT - nT), u(kT - T), \dots,$

$$u(kT - nT), u(kT + t_1 - T), \dots, u(kT + t_1 - nT), \dots, u(kT + t_{p-1} - T), \dots, u(kT + t_{p-1} - nT)]^T$$

$F_l$  代表第  $l$  条规则下的模糊集合;  $\mu_l[\varphi(kT)]$  表示第  $l$  条规则的模糊集合相应的隶属度函数. 模糊模型后件各参数  $a_i(z^{-1}), b_{li}(z^{-1})$  满足

$$a_i(z^{-1}) = 1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2} + \dots + a_{in}z^{-n},$$

$$b_{li}(z^{-1}) = b_{li1}z^{-1} + b_{li2}z^{-2} + \dots + b_{lin}z^{-n},$$

$$b_{lij} \in R^1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p-1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

对于式(5),可以转化为一个受控自回归滑动平均模糊模型:

$R^l$ : 如果  $\varphi(kT)$  属于  $F_l$ , 则

$$y(kT) = -a_{l1}y(kT - T) - \dots - a_{ln}y(kT - nT) + \sum_{i=0}^{p-1} b_{li}(z^{-1})u(kT + t_i) \quad (6)$$

系统(6)的模型全局输出为:

$$y(kT) = \sum_{l=1}^c \mu_l[\varphi(kT)] [-a_{l1}y(kT - T) - \dots - a_{ln}y(kT - nT) + \sum_{i=0}^{p-1} b_{li}(z^{-1})u(kT + t_i)] \quad (7)$$

## 3 模糊模型的结构辨识和参数辨识

### 3.1 基于 GK 模糊聚类的结构辨识

基于目标函数(8),利用非均匀采样数据和 GK 模糊聚类优化,获得隶属度矩阵  $\mathbf{U} = [\mu_l(kT)]_{N \times c}$  和聚类中心  $\bar{\varphi} = [\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_c]^T$ .

$$\text{Min } J(\varphi, \bar{\varphi}, \mathbf{U}) = \sum_{l=1}^c \sum_{k=1}^N \mu_l^2(kT) d^2(\varphi(kT), \bar{\varphi}_l) \quad (8)$$

为了讨论方便,  $\mu_l[\varphi(kT)]$  简写为  $\mu_l(kT)$ , 表示在第  $kT$  时刻输入向量  $\varphi(kT)$  在第  $l$  类的隶属度,其满足:

$$\sum_{l=1}^c \mu_l(kT) = 1, k = 1, 2, \dots, N,$$

$$0 < \sum_{k=1}^N \mu_l(kT) < N, l = 1, 2, \dots, c$$

式(8)中的  $d(\varphi(kT), \bar{\varphi}_l)$  为采样数据  $\varphi(kT)$  与聚类中心向量  $\bar{\varphi}_l$  之间的距离. 文献[12]给出了 GK 模糊聚类算法, 这里略.

### 3.2 模糊模型的参数辨识

首先, 定义参数向量:

$$\theta_1 = [a_{11}, \dots, a_{1n}, b_{111}, \dots, b_{11n}, \dots, b_{1p1}, \dots, b_{1pn}]^T \in R^{n_0}$$

$$\theta_2 = [a_{21}, \dots, a_{2n}, b_{211}, \dots, b_{21n}, \dots, b_{2p1}, \dots, b_{2pn}]^T \in R^{n_0} \dots$$

$$\theta_c = [a_{c1}, \dots, a_{cn}, b_{c11}, \dots, b_{c1n}, \dots, b_{cp1}, \dots, b_{cpn}]^T \in R^{n_0},$$

$$n_0 = (p+1)n$$

另外, 设式(6)的输入向量为:

$$\psi(kT) = [\psi_1^T(kT), \psi_2^T(kT), \dots, \psi_c^T(kT)]^T$$

$$\psi_1(kT) = [-\mu_1(kT)y(kT-T), \dots, -\mu_1(kT)y(kT-nT),$$

$$\mu_1(kT)u(kT-T), \dots, \mu_1(kT)u(kT-nT), \dots,$$

$$\mu_1(kT)u(kT+t_{p-1}-T), \dots,$$

$$\mu_1(kT)u(kT+t_{p-1}-nT)]^T$$

.....

$$\psi_c(kT) = [-\mu_c(kT)y(kT-T), \dots, -\mu_c(kT)y(kT-nT),$$

$$\mu_c(kT)u(kT-T), \dots, \mu_c(kT)u(kT-nT), \dots,$$

$$\mu_c(kT)u(kT+t_{p-1}-nT)]^T$$

考虑系统中一般含有噪声, 式(7)输出可以表示为:

$$y(kT) = \psi^T(kT)\theta + v(kT) \quad (9)$$

式中  $\theta = [\theta_1^T, \theta_2^T, \dots, \theta_c^T]^T \in R^{cn_0 \times 1}$ ,  $v(kT)$  是均值为零, 方差为  $\sigma^2$  的白噪声.

通过模糊聚类确定聚类中心和隶属度函数, 利用递推最小二乘方法确定模型的后件参数,

$$\hat{\theta}(kT) = \hat{\theta}(kT-T) + P(kT)\psi(kT)[y(kT)$$

$$- \psi^T(kT)\hat{\theta}(kT-T)] \quad (10)$$

$$P^{-1}(kT) = P^{-1}(kT-T) + \psi(kT)\psi^T(kT) \quad (11)$$

其中,  $\hat{\theta}(kT)$  表示第  $kT$  时刻的估计值;  $P(kT)$  是协方差对称方阵, 维数为  $cn_0 \times cn_0$ ,  $P(0) = \rho I_{cn_0}$ ,  $\rho$  取很大正数,  $I_{cn_0}$  为维数  $cn_0 \times cn_0$  的单位矩阵.

从式(10)(11)可以看出, 在每一步的递推辨识中, 都需要计算维数为  $cn_0 \times cn_0$  的协方差矩阵  $P(kT)$ . 由于参数个数  $cn_0 = c[(p+1) \times n]$  远远大于  $n_0 = (p+1) \times n$ , 因此 RLS 算法(10)~(11)的计算量较大. 为此, 我们在 3.3 节中提出辨识算法的改进措施.

### 3.3 基于递阶原理的递推最小二乘辨识

在采用递推最小二乘辨识时, 在规则数较多, 输入信号非均匀刷新次数较多时, 辨识参数将非常多, 算法辨识计算量较大, 为此提出了基于递阶原理的辨识. 其思想为: 将系统原有的大维数辨识模型分解为多个维

数较低的模型, 然后辨识各子系统, 并协调处理各子系统之间的关联项. 下面给出递阶原理的辨识算法(Hierarchical Least Squared Algorithm, HLS).

将输入向量  $\psi(kT)$  和参数向量  $\theta$  分别分解成  $c$  个子输入向量和  $c$  个参数向量, 即

$$\psi(kT) = \begin{bmatrix} \psi_1(kT) \\ \psi_2(kT) \\ \vdots \\ \psi_c(kT) \end{bmatrix} \in R^{cn_0 \times 1}, \quad \psi_i(kT) \in R^{n_0 \times 1},$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_c \end{bmatrix} \in R^{cn_0 \times 1}, \quad \theta_i \in R^{n_0 \times 1}, \quad i = 1, 2, \dots, c.$$

则模型(9)又可以描述为:

$$y(kT) = \psi_i^T(kT)\theta_i + \sum_{j=1, j \neq i}^c \psi_j^T(kT)\theta_j + v(kT) \quad (12)$$

令  $\hat{\theta}_i(kT)$  为子参数向量  $\theta_i$  在  $t = kT$  时刻的估计值. 根据递推最小二乘原理, 我们可以获得  $\hat{\theta}_i(kT)$  的估计算法:

$$\hat{\theta}_i(kT) = \hat{\theta}_i(kT-T) + P_l(kT)\psi_i(kT)[y(kT)$$

$$- \psi_i^T(kT)\hat{\theta}_i(kT-T) - \sum_{j=1, j \neq i}^c \psi_j^T(kT)\theta_j] \quad (13)$$

$$P_l^{-1}(kT) = P_l^{-1}(kT-T) + \psi_i(kT)\psi_i^T(kT) \quad (14)$$

其中  $P_l(kT)$  为第  $l$  个子系统的协方差矩阵,  $l = 1, 2, \dots, c$ .

由于式(13)等号右边含有未知参数  $\theta_j, j = 1, 2, \dots, c (j \neq i)$ . 利用递阶原理, 将式(13)中未知参数向量  $\theta_j (j \neq i)$  可以用前一时刻的参数估计值  $\hat{\theta}_j(kT-T)$  代替可得,

$$\hat{\theta}_i(kT) = \hat{\theta}_i(kT-T) + P_l(kT)\psi_i(kT)[y(kT)$$

$$- \psi_i^T(kT)\hat{\theta}_i(kT-T)$$

$$- \sum_{j=1, j \neq i}^c \psi_j^T(kT)\hat{\theta}_j(kT-T)]$$

$$= \hat{\theta}_i(kT-T) + P_l(kT)\psi_i(kT)[y(kT)$$

$$- \psi_i^T(kT)\hat{\theta}_i(kT-T)] \quad (15)$$

式(14)和式(15)构成了非均匀采样系统的 HLS 辨识算法. 算法初始值选  $P_l(0) = p_0 I_{n_0}$ , 其中  $p_0$  为很大的正数,  $\hat{\theta}_i(0) = \mathbf{1}_{n_0}/p_0$ ,  $\mathbf{1}_{n_0}$  为各元素均为 1 的  $n_0$  维列向量.

以上推导的 HLS 算法(14)(15)辨识过程可参考图 1. 从图 1 可以看出,  $t = kT$  时刻的参数估计  $\hat{\theta}_i(kT)$  不仅取决于  $\hat{\theta}_i(kT-T)$ , 还取决于其余子系统参数估计  $\hat{\theta}_j(kT-T) (j = 1, 2, \dots, c, j \neq i)$ . 本文提出的 HLS 算法(14)(15)的计算量(包括乘法次数和除法次数)远小于 RLS 算法(14)(15)的计算量. 表 1 给出了算法每一步递推过程的计算量.

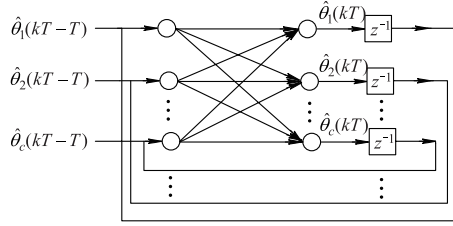


图1 HLS辨识算法的框图

表1 RLS 和 HLS 算法的比较 ( $n_0=6, c=2$ )

算法	乘法次数	加法次数
RLS	$2(cn_0)^2 + 4cn_0$ {336 次}	$2(cn_0)^2 + 2cn_0$ {312 次}
HLS	$c(2n_0^2 + 4n_0)$ {192 次}	$c(2n_0^2 + 2n_0)$ {168 次}

表1大括号中的数值为具体的计算量.显然,HLS辨识算法的计算量比RLS辨识算法的计算量要小很多.

#### 4 性能分析

首先,对一些数学记号给予说明<sup>[13,14]</sup>:

(1)  $\lambda_{\max}[\mathbf{X}]$  和  $\lambda_{\min}[\mathbf{X}]$  表示矩阵  $\mathbf{X}$  的最大和最小特征值;

(2)  $f(t) = o(g(t))$  表示  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/g(t) = 0$ ;

(3)  $f(t) = O(g(t))$ , 表示当  $t$  足够时,  $f(t) \leq \delta_1 g(t)$ ;

(4)  $|\mathbf{X}| = \det[\mathbf{X}]$ ,  $|\mathbf{X}|$  表示  $\mathbf{X}$  行列式的值.

**假设1** 假设  $\{v(kT), F_{kT}\}$  为概率空间  $(\Omega, F, P)$  上的鞅差序列, 并且是递增  $\sigma$  代数序列  $\{F_{kT}, k \in N\}$ , 且  $F_{kT}$  是  $kT$  时刻的观测生成的时间序列,  $v(kT)$  满足:

(A1)  $E[v(kT) | F_{kT-T}] = 0, \text{ a. s. } ,$

(A2)  $E[v^2(kT) | F_{kT-T}] = \sigma_v^2(kT) \leq \bar{\sigma}_v^2 \leq \infty, \text{ a. s. } .$

**引理1** 设  $E \in R^{m \times n}, F \in R^{n \times m}$ , 则等式  $|I_m + EF| = |I_n + FE|$  成立<sup>[13]</sup>.

**引理2** 对于式(14)(15)所描述的HLS算法, 下列不等式成立:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT)}{[\ln |\mathbf{P}_l^{-1}(kT)|]^s} < \infty, \text{ a. s. } \quad (16)$$

$s > 1, l = 1, 2, \dots, c$

引理2的证明可以参见文献[14].

另外, 定义几个新变量:

$$\tilde{y}_l(kT) = \boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \bar{\boldsymbol{\theta}}_l(kT - T),$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_l(kT - T) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_l(kT - T) - \boldsymbol{\theta}_l,$$

$$\tilde{y}(kT) = \boldsymbol{\psi}^T(kT) \bar{\boldsymbol{\theta}}(kT - T) = \sum_{l=1}^c \tilde{y}_l(kT)$$

在引理1和引理2的条件下, 就有下面定理:

**定理1** 对于式(9)和算法(14)(15), 如果

$$q(kT) = [1 - \sum_{l=1}^c \boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT)] \tilde{y}^2(kT)$$

$$+ 2 \sum_{l \neq j}^c \tilde{y}_l(kT) \tilde{y}_j(kT) \geq 0$$

定义  $R(kT) = \sum_{l=1}^c [\ln |\mathbf{P}_l^{-1}(kT)|]^s$ . 系统噪声满足假设1的(A1)和(A2), 那么对于任意  $s > 1$  有

$$\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_l(kT) - \boldsymbol{\theta}_l\|^2 = O\left(\frac{R(kT)}{\lambda_{\min}[\mathbf{P}_l^{-1}(kT)]}\right),$$

$l = 1, 2, \dots, c, \text{ a. s. } .$

**证明** 首先, 定义一个非负函数  $H_l(kT)$  如下

$$H_l(kT) = \bar{\boldsymbol{\theta}}_l^T(kT) \mathbf{P}_l^{-1}(kT) \bar{\boldsymbol{\theta}}_l(kT),$$

$l = 1, 2, \dots, c$  (17)

定义新息为

$$e(kT) = y(kT) - \boldsymbol{\psi}^T(kT) \hat{\boldsymbol{\theta}}(kT - T) \quad (18)$$

利用式(12)可得

$$e(kT) = -\boldsymbol{\psi}^T(kT) \bar{\boldsymbol{\theta}}(kT - T) + v(kT) = -\tilde{y}(kT) + v(kT) \quad (19)$$

将式(15)代入到式(17), 整理可以得到

$$\begin{aligned} H_l(kT) &= [\bar{\boldsymbol{\theta}}_l(kT - T) + \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT) e(kT)]^T \\ &\quad \times \mathbf{P}_l^{-1}(kT) [\bar{\boldsymbol{\theta}}_l(kT - T) + \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT) e(kT)] \\ &= H_l(kT - T) + \tilde{y}_l^2(kT) + 2\tilde{y}_l(kT) e(kT) \\ &\quad + \boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT) e^2(kT) \end{aligned} \quad (20)$$

定义一个 Lyapunov 函数,

$$H(kT) = \sum_{l=1}^c H_l(kT) \quad (21)$$

利用式(19)和式(20)可得,

$$\begin{aligned} H(kT) &= \sum_{l=1}^c H_l(kT - T) + \sum_{l=1}^c \tilde{y}_l^2(kT) \\ &\quad + 2 \sum_{l=1}^c \tilde{y}_l(kT) e(kT) \\ &\quad + \sum_{l=1}^c \boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT) e^2(kT) \\ &\leq H(kT - T) - q(kT) \\ &\quad + 2[1 - \sum_{l=1}^c \boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT)] \\ &\quad \cdot \sum_{l=1}^c \tilde{y}_l(kT) v(kT) \\ &\quad + \sum_{l=1}^c \boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT) v^2(kT) \end{aligned} \quad (22)$$

由于  $\{v(kT)\}$  是满足(A1)、(A2)的噪声序列, 式(22)两边对  $F_{kT-T}$  取条件期望, 利用假设1的条件可得,

$$\begin{aligned} E[H(kT) | F_{kT-T}] &= H(kT - T) - q(kT) \\ &\quad + \sum_{l=1}^c \boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT) \times \bar{\sigma}_v^2 \end{aligned}$$

若  $q(kT) \geq 0$ , 则有

$$\begin{aligned} E[H(kT) | F_{kT-T}] &\leq H(kT - T) \\ &\quad + \sum_{l=1}^c \boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT) \times \bar{\sigma}_v^2 \end{aligned} \quad (23)$$

由于  $R(kT) = \sum_{l=1}^c [\ln |\mathbf{P}_l^{-1}(kT)|]^s$ , 并且  $\ln |\mathbf{P}_l^{-1}(kT)| \geq 0$  是非降的,  $\mathbf{P}_l(kT)$  是正定对称的, 就有

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{l=1}^c \boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT)}{R(kT)} \\ & \frac{\sum_{l=1}^c \boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT)}{\sum_{l=1}^c [\ln |\mathbf{P}_l^{-1}(kT)|]^s} \\ & \leq \frac{\sum_{l=1}^c \boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT)}{\sum_{l=1}^c [\ln |\mathbf{P}_l^{-1}(kT)|]^s} \end{aligned} \quad (24)$$

令  $Z(kT) = \frac{H(kT)}{R(kT)}$ , 不等式(23)两边同除以  $R(kT)$ , 并

利用式(24), 可得

$$\begin{aligned} & E[Z(kT) | \mathcal{F}_{kT-T}] \\ & \leq \frac{H(kT-T)}{\sum_{l=1}^c [\ln |\mathbf{P}_l^{-1}(kT)|]^s} \\ & + \frac{\sum_{l=1}^c \boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT)}{\sum_{l=1}^c [\ln |\mathbf{P}_l^{-1}(kT)|]^s} \times \bar{\sigma}_v^{-2} \\ & \leq Z(kT-T) + \frac{\sum_{l=1}^c \boldsymbol{\psi}_l^T(kT) \mathbf{P}_l(kT) \boldsymbol{\psi}_l(kT)}{\sum_{l=1}^c [\ln |\mathbf{P}_l^{-1}(kT)|]^s} \times \bar{\sigma}_v^{-2} \end{aligned} \quad (25)$$

由引理 2 可知, 式(25)右边最后一项从  $k=1$  到  $k=\infty$  的和是有限的. 对式(25)利用鞅收敛定理(文献[15]中引理 D.5.3)可以得出,  $Z(kT)$  几乎肯定(a. s.)收敛于有界随机变量  $Z_0$ , 即

$$Z(kT) = \frac{H(kT)}{R(kT)} \rightarrow Z_0 < \infty, \text{ a. s.}$$

因此,  $H(kT) = O(R(kT))$ ,  $H_l(kT) = O(R(kT))$ . 从  $H_l(kT)$  定义可知

$$\begin{aligned} & \|\bar{\boldsymbol{\theta}}_l(kT)\|^2 \leq \bar{\boldsymbol{\theta}}_l^T(kT) \mathbf{P}_l^{-1}(kT) \bar{\boldsymbol{\theta}}_l(kT) / \lambda_{\min}[\mathbf{P}_l(kT)] \\ & = \frac{H_l(kT)}{\lambda_{\min}[\mathbf{P}_l(kT)]} = \frac{O(R(kT))}{\lambda_{\min}[\mathbf{P}_l(kT)]}, l=1, 2, \dots, c, \text{ a. s.} \end{aligned}$$

定理 1 证毕.

**定理 2** 对于式(9)和算法(14)(15), 假设定理 1 中的条件成立, 且存在正的常数  $c_0, c_1, c_2$ , 使得输入信号在满足持续激励条件下, 即

$$(A3) \quad c_1 \mathbf{I}_{n_0} \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \boldsymbol{\psi}_l(jT) \boldsymbol{\psi}_l^T(jT) \leq c_2 k^{c_0} \mathbf{I}_{n_0},$$

$$c_0 > 0, c_1 > 0, c_2 > 0$$

式中  $\mathbf{I}_{n_0}$  为维数  $n_0 \times n_0$  的单位矩阵. 则算法(14)(15)给出的参数估计误差一致收敛 0, 即  $\|\bar{\boldsymbol{\theta}}_l(kT)\|^2 \rightarrow 0, l=1, 2, \dots, c, \text{ a. s.}$

**证明** 由  $\mathbf{P}_l(kT)$  的定义以及条件(A3)可得

$$c_1 k \mathbf{I}_{n_0} \leq \mathbf{P}_l^{-1}(kT) \leq c_2 k^{c_0+1} \mathbf{I}_{n_0} + \frac{1}{p_0} \mathbf{I}_{n_0}$$

$$\lambda_{\min}[\mathbf{P}_l^{-1}(kT)] \geq c_1 k,$$

$$\ln |\mathbf{P}_l^{-1}(kT)| \leq n_0 \ln \left[ c_2 k^{c_0+1} + \frac{1}{p_0} \right],$$

利用定理 1 可知,

$$\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_l(kT) - \boldsymbol{\theta}_l\|^2 = O\left(\frac{R(kT)}{\lambda_{\min}[\mathbf{P}_l^{-1}(kT)]}\right)$$

这样, 一定存在一个正常数  $\delta$ , 以及根据  $R(kT)$  定义, 使得下式成立,

$$\begin{aligned} & \|\hat{\boldsymbol{\theta}}_l(kT) - \boldsymbol{\theta}_l\|^2 \leq \frac{\delta R(kT)}{\lambda_{\min}[\mathbf{P}_l^{-1}(kT)]} \\ & \leq \frac{\delta \sum_{l=1}^c n_0^s \left[ \ln \left( c_2 k^{c_0+1} + \frac{1}{p_0} \right) \right]^s}{c_1 k} \end{aligned}$$

在  $k \rightarrow \infty$  时, 就有

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\boldsymbol{\theta}}_l(kT) - \boldsymbol{\theta}_l\|^2 \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta \sum_{l=1}^c n_0^s \left[ \ln \left( c_2 k^{c_0+1} + \frac{1}{p_0} \right) \right]^s}{c_1 k} \rightarrow 0, \text{ a. s.} \end{aligned}$$

定理 2 证毕.

## 5 仿真实例

考虑一个有三个溶液, 即  $\text{HNO}_3$ 、 $\text{NaOH}$ 、 $\text{NaHCO}_3$  同时进入 CSTR (Continuous Stirring Tank Reactor) 的 PH 中和滴定系统. 该系统有一个输出, 即 CSTR 中流出物的 PH 值<sup>[16,17]</sup>, 如图 2 所示.

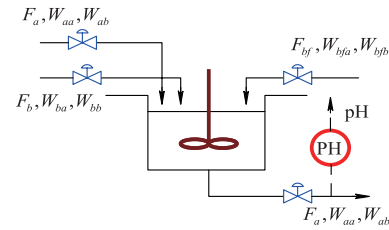


图 2 PH 中和反应过程

图 2 中分别以  $F_a, F_b, F_{bf}$  表示上述三种溶液的流量. 在实际辨识中, 用碱液的流量  $F_b$  作为控制量  $u$ , 输出液 pH 测量值作为输出量  $y$ . 取  $p=2, t_1=\tau_1=1 \text{ min}, \tau_2=1.5 \text{ min}, T=\tau_1+\tau_2=2.5 \text{ min}$ , 对输入信号碱液的流量  $F_b$  进行非均匀刷新, 对输出液的 pH 值进行周期采样, 共采集了 300 个数据. 选  $y(kT-T), y(kT-2T), u(kT-T), u(kT-2T), u(kT+t_1-T)$  和  $u(kT+t_1-2T)$  构成向量  $\boldsymbol{\varphi}(kT)$ . 取模糊模型的规则数  $c=6$ .

根据辨识结果, 可以得到描述 PH 滴定过程非线性系统的模糊模型为:

$R^1$ : 如果  $\varphi(kT)$  属于  $F_1$ , 则

$$y(kT) = \frac{-0.1322z^{-1} + 0.1254z^{-2}}{1 + 0.7599z^{-1} + 0.0951z^{-2}}u(kT) + \frac{0.1667z^{-1} - 0.7834z^{-2}}{1 + 0.7599z^{-1} + 0.0951z^{-2}}u(kT + t_1)$$

$R^2$ : 如果  $\varphi(kT)$  属于  $F_2$ , 则

$$y(kT) = \frac{-0.1872z^{-1} + 0.0907z^{-2}}{1 + 0.9792z^{-1} + 0.1256z^{-2}}u(kT) + \frac{-0.7340z^{-1} - 0.4366z^{-2}}{1 + 0.9792z^{-1} + 0.1256z^{-2}}u(kT + t_1)$$

$R^3$ : 如果  $\varphi(kT)$  属于  $F_3$ , 则

$$y(kT) = \frac{-0.1486z^{-1} + 0.1303z^{-2}}{1 + 1.0508z^{-1} - 0.0019z^{-2}}u(kT) + \frac{0.3300z^{-1} + 0.0210z^{-2}}{1 + 1.0508z^{-1} - 0.0019z^{-2}}u(kT + t_1)$$

$R^4$ : 如果  $\varphi(kT)$  属于  $F_4$ , 则

$$y(kT) = \frac{-0.1659z^{-1} + 0.1974z^{-2}}{1 + 0.8744z^{-1} + 0.0132z^{-2}}u(kT) + \frac{0.3478z^{-1} + 0.4832z^{-2}}{1 + 0.8744z^{-1} + 0.0132z^{-2}}u(kT + t_1)$$

$R^5$ : 如果  $\varphi(kT)$  属于  $F_5$ , 则

$$y(kT) = \frac{-0.1272z^{-1} + 0.0505z^{-2}}{1 + 1.0100z^{-1} + 0.0969z^{-2}}u(kT) + \frac{0.2591z^{-1} - 0.1358z^{-2}}{1 + 1.0100z^{-1} + 0.0969z^{-2}}u(kT + t_1)$$

$R^6$ : 如果  $\varphi(kT)$  属于  $F_6$ , 则

$$y(kT) = \frac{-0.1767z^{-1} + 0.1423z^{-2}}{1 + 0.9816z^{-1} + 0.0511z^{-2}}u(kT) + \frac{-0.1077z^{-1} + 0.1180z^{-2}}{1 + 0.9816z^{-1} + 0.0511z^{-2}}u(kT + t_1)$$

采用文中提出的模糊辨识方法进行建模. 经辨识后, 图3给出了辨识模型输出与实际输出的比较, 图4给出了辨识误差, 可以看出本文方法对 pH 中和滴定过程具有很好的拟合. 通过表2的均方误差比较, 本文方法是较好, 这证明了所提出方法的有效性.

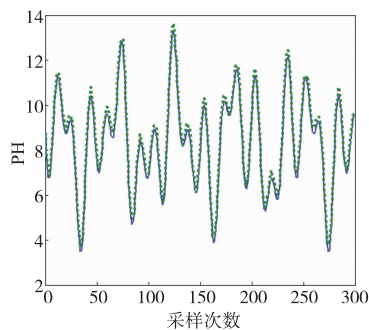


图3 模型输出与实际输出比较

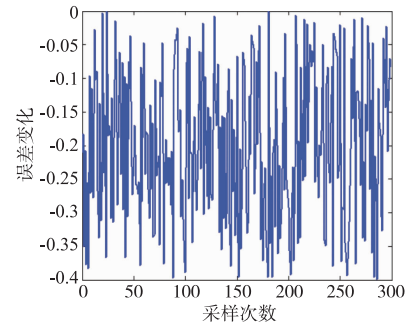


图4 辨识误差

表2 建模方法效果比较

建模方法	规则数	均方误差
FCM方法 <sup>[7]</sup>	6	0.1369
CA方法 <sup>[8]</sup>	6	0.1050
本文方法	6	0.0765

## 6 结论

针对非均匀采样的非线性系统难以建模的问题, 提出了基于递阶原理的模糊辨识方法, 其思想是将整体递推最小二乘分解为各规则的后件参数的局部递推最小二乘, 最后协调各局部辨识算法之间的关联项, 实现整体辨识. 该算法一次辨识参数少, 辨识效率高, 计算时间短. 对于多变量非均匀采样系统的辨识, 是我们未来研究的方向.

## 参考文献

- [1] SHENG J, CHEN T, SHAH S L. Generalized predictive control for nonuniformly sampled systems[J]. Journal of Process Control, 2002, 12(8): 875-885.
- [2] 刘艳君, 谢莉, 丁锋. 非均匀采样数据系统的 AM-RLS 辨识方法及仿真研究[J]. 系统仿真学报, 2009, 21(19): 6186-6189.  
LIU Y J, XIE L, DING F. AM-RLS identification and simulation studies for non-uniformly sample-data systems[J]. Journal of System Simulation, 2009, 21(19): 6186-6189. (in Chinese)
- [3] 谢莉, 丁锋. 非均匀采样数据系统的一种辨识方法[J]. 控制工程, 2008, 15(4): 402-405.  
XIE L, DING F. An identification method for non-uniformly sample-data systems[J]. Control Engineering, 2008, 15(4): 402-405. (in Chinese)
- [4] XIE L, LIU Y J, YANG H Z, DING F. Modelling and identification for non-uniformly periodically sampled-data systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(5): 784-794.

- [5] DING Feng, QIU Li, CHEN Tongwen. Reconstruction of continuous-time systems from their non-uniformly sampled discrete-time systems [J]. *Automatica*, 2009, 45 (2): 324 - 332.
- [6] 丁锋, 陈通文, 萧德云. 非均匀周期采样多率系统的一种辨识方法[J]. *电子学报*, 2004, 32(9): 1414 - 1420.  
DING F, CHEN T W, XIAO D Y. An identification of non-uniformly periodically sampled multi-rate systems[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2004, 32(9): 1414 - 1420. (in Chinese)
- [7] 王宏伟, 夏浩. 非均匀多采样率非线性系统的模糊辨识[J]. *控制与决策*, 2015, 30(9): 1646 - 1652.  
WANG Hong-wei, XIA Hao. Fuzzy identification for non-uniformly multi-rate sampled nonlinear systems[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(9): 1646 - 1652. (in Chinese)
- [8] 王宏伟, 连捷. 竞争学习的非均匀采样非线性系统的模糊辨识[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2016, 48(4): 109 - 113.  
WANG H W, LIAN J. Fuzzy identification of non-uniformly sampled nonlinear systems based on competition learning [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2016, 48 (4): 109 - 113. (in Chinese)
- [9] 李凯, 曹喆. 一种基于神经网络的广义熵模糊聚类算法[J]. *电子学报*, 2016, 44(8): 1881 - 1886.  
LI Kai, CAO Zhe. A fuzzy clustering algorithm with generalized entropy based on neural network[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2016, 44(8): 1881 - 1886. (in Chinese)
- [10] 余晓东, 雷英杰, 宋亚飞, 等. 基于核距离的直觉模糊 c 均值聚类算法[J]. *电子学报*, 2016, 44(10): 2530 - 2534.  
YU X D, LEI Y J, SONG Y F, et al. Intuitionistic fuzzy c-means clustering algorithm based on kernelled distance [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2016, 44(10): 2530 - 2534. (in Chinese)
- [11] 万佑红, 王锁萍, 蒋国平. 基于观测器的复杂网络辨识新方法研究[J]. *电子学报*, 2010, 38(5): 1064 - 1068.  
WAN Y H, WANG S P, JIANG G P. A new state-observer-based approach to the identification of complex dynamical networks[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2010, 38(5): 1064 - 1068. (in Chinese)
- [12] SHENG J, CHEN T, SHAH S L. Generalized predictive control for non-uniformly sampled systems[J]. *Journal of Process Control*, 2002, 12(8): 875 - 885.
- [13] CAO S G, REES N W, FENG G. Analysis and design for a class of complex control systems Part I: Fuzzy modeling and identification [J]. *Automatica*, 1997, 33(6): 1017 - 1028.
- [14] DING F, LIU G, LIU X P. Partially coupled stochastic gradient identification methods for non-uniformly sampled systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(8): 1976 - 1981.
- [15] GOODWIN G C, SIN K S. *Adaptive Filtering Prediction and Control* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984.
- [16] CUENCA A, SALT J. RST controller design for a non-uniform multi-rate control system [J]. *Journal of Process Control*, 2014, 22(10): 1865 - 1877.
- [17] 张智焕, 王树青. 基于多模型 PH 非线性过程的预测控制[J]. *浙江大学*, 2002, 36(1): 29 - 31.  
ZHANG Z H, WANG S Q. Predictive control of PH nonlinear process based on multiple models [J]. *Journal of Zhejiang University*, 2002, 36(1): 29 - 31. (in Chinese)

#### 作者简介



王宏伟 男. 1969 年 3 月出生, 吉林长春人. 工学博士, 教授. 1999 年毕业于哈尔滨工业大学自动控制系. 现在大连理工大学控制科学与工程学院工作. 已发表 SCI、EI 等检索论文 110 篇, 发明专利 2 项. 主持和参与国家和地方项目 5 项. 研究方向: 网络控制系统, 多采样率系统控制, 切换系统控制.  
E-mail: wanghw@dlut.edu.cn



连捷 女. 1980 年 9 月出生, 吉林白城人. 工学博士, 教授. 2009 年毕业于东北大学控制科学与工程系. 现在大连理工大学控制科学与工程学院工作. 已发表 SCI、EI 等检索论文 30 篇. 主持和参与国家和地方项目 5 项. 研究方向: 网络控制系统, 时滞系统控制, 切换系统控制.  
E-mail: jielian@dlut.edu.cn



夏浩 男. 1971 年 10 月出生, 黑龙江哈尔滨人. 工学博士, 教授. 2000 年毕业于 University of Birmingham. 现在大连理工大学控制科学与工程学院工作. 已发表 SCI、EI 等检索论文 32 篇. 主持和参与国家和地方项目 5 项. 研究方向: 项目调度、生产运作管理、混杂系统控制等.  
E-mail: hao.x.xia@dlut.edu.cn