

# 三轴磁强计实时自校正算法

张宏欣,周穗华,张伽伟

(海军工程大学兵器工程系,湖北武汉 430033)

**摘 要:** 提出一种三轴磁强计的实时自校正算法.通过分析测量误差因素,建立了三轴磁强计输出的参数模型.在此基础上,根据定点地磁场矢量模不变原则建立校正相关参数的非线性状态空间模型,导出了基于扩展卡尔曼滤波器(Extended Kalman Filter, EKF)求解的校正参数估计算法,并相应给出了易于实现的U-D分解滤波形式.相比离线校正,新算法能够对校正参数进行实时估计,且更易于片上实现.通过数值仿真验证了算法推导的正确性.采用三轴磁强计RM3000进行实测校正试验,验证了算法的有效性,并将结果与离线的TWO-STEP算法进行了对比,得出了相应结论.

**关键词:** 三轴磁强计;实时校正;状态空间模型;扩展卡尔曼滤波器;非线性滤波

**中图分类号:** TP202 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)07-1750-08

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.07.027

## Real-Time Self Calibration Algorithm for Three-Axis Magnetometer

ZHANG Hong-xin, ZHOU Sui-hua, ZHANG Jia-wei

(Department of Weapon Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan, Hubei 430033, China)

**Abstract:** A real-time self calibration approach for tri-axis magnetometers is proposed. The parameterized model of magnetometer readings is established by analyzing the nature of sensor errors, which lays a basis for the derivation of a nonlinear state-space model of calibration parameter using the invariability of local geomagnetic field. The real-time estimation of calibration parameter is derived based on extended Kalman filter (EKF) solution, the U-D decomposition filter is given for ease of implementation. Compared with the batch approaches, the proposed method not only can achieve real-time estimation of calibration parameters, but also is convenient for embedded implementation. Simulation results demonstrate the correctness of the derivation of the proposed approach. The effectiveness is validated by experimental test using RM3000 tri-axis magnetometer. The results of simulations and experiments are analyzed and concluded in comparisons with TWO-STEP method.

**Key words:** tri-axis magnetometer; real-time calibration; state-space model; extended Kalman filter; nonlinear filtering

### 1 引言

三轴磁强计能够测量矢量磁信号,在航姿参考系统、弹道测量及磁异常探测等领域中有关键应用.而在工程实际中,由于传感器加工工艺限制和载体自身的磁场干扰,导致磁强计测量输出存在不可忽略的误差,必须经过校正才能使用.

磁强计测量误差成因主要包括传感器零偏、三轴灵敏度比例失调、三轴非正交、载体外部磁场偏移以及测量噪声等多种因素.对于相应的校正方法,原理上可分为姿态辅助校正和姿态无关的自校正方法.前者一般通过将传感器放置在已知方位或利用姿态传感器

(如加速度计和陀螺仪)来获得姿态信息,再通过求解角度误差模型进行校正<sup>[1]</sup>.此类方法不易操作,且对参考姿态精度要求较高,实际应用成本较高.自校正方法无需姿态信息,仅需利用传感器及载体在地磁场中充分旋转时所得测量值求解误差模型即可,因此已有广泛的研究.工程上一种简易自校正方法是极大极小值法<sup>[2]</sup>,但其仅能校正灵敏度失调以及偏移误差,无法对非正交误差进行校正;文献[3]提出一种两步(Two-Step)校正法即第一步利用最小二乘(Least Square, LS)估计中间变量,第二步利用中间变量代数求解出校正参数,但仍未考虑非正交误差;对此,文献[4]提出一种同时能够校正非正交误差的Two-Step算法(文后所指

的 Two-Step 算法均指文献[4]方法). 基于文献[4]的框架, 针对最小二乘系数矩阵含噪声问题, 改进算法采用总体最小二乘<sup>[5]</sup>, 自适应最小二乘<sup>[6]</sup>以及最大似然估计<sup>[7]</sup>等方法提高了校正精度.

以上自校正方法均是基于 LS 的批处理方法 (Batch Method), 由于 LS 算法的系数矩阵具有较大的数值动态范围, 一般难以在存储资源及数位精度受限的嵌入式系统上进行实现<sup>[2]</sup>. 实际应用时需要在载体做全姿态转动条件下采集大量测量数据, 再通过上位机应用算法解得校正参数并直接写入片内. 一旦磁场环境改变, 需进行二次校正操作及参数计算写入, 不利于在旋转弹定姿<sup>[8]</sup>和卫星定姿<sup>[9]</sup>等实时性要求较高且难以实施二次校正的场合进行应用. 针对上述问题, 本文通过误差分析建立磁强计输出参数模型, 根据定点地磁场矢量模不变原则导出实时校正问题的非线性状态空间模型, 提出一种基于 EKF 的实时自校正算法, 并进一步给出了算法的 U-D 分解滤波器实现. 实时算法仅利用当前量测即可进行实时参数更新, 且 U-D 滤波器能够提高数值精度及稳定性, 易于片上实现, 从而避免了上述应用问题. 通过仿真验证了算法推导的正确性, 并采用分立轴式磁强计 RM3000 进行实测试验, 验证了算法的有效性.

## 2 问题描述

三轴磁强计输出受载体磁环境和传感器自身技术限制的影响, 其误差主要包括:

(1) 硬磁/软磁 (Hard /Soft Iron) 偏差: 硬磁偏差  $\mathbf{b}_m$  源于载体自身及载体上安装设备中的硬磁性材料产生的磁场. 由于其随时间变化缓慢, 且不随载体运动发生变化, 一般假设硬磁偏差在体坐标系内是恒定的. 软磁偏差  $\mathbf{b}_{sl}$  主要由于载体软磁性材料在外部磁场 (地磁场) 和硬磁磁场作用下而产生, 根据软磁材料的磁化特性, 软磁偏差会改变磁场的大小和方向, 其与传感器坐标轴上的各磁场分量呈近似线性关系, 即

$$\mathbf{b}_{sl} = \mathbf{C}_{sl} (\mathbf{I}_l^p \mathbf{B}^l + \mathbf{b}_m) \quad (1)$$

其中  $\mathbf{C}_{sl} \in j^{3 \times 3}$  为软磁变换系数矩阵, 本文中假设  $\mathbf{C}_{sl}$  为一对称矩阵<sup>[6]</sup>.  $\mathbf{I}_l^p \in j^{3 \times 3}$  为惯性系到体坐标系的旋转矩阵,  $\mathbf{B}^l \in j^3$  为惯性系地磁场矢量.

(2) 非正交误差: 由于传感器三轴在工艺上不能实现完全正交, 因此会在分量上产生非正交误差. 记正交坐标轴为  $X, Y, Z$ , 原点为  $O$ ; 传感器坐标轴为  $X', Y', Z'$ , 原点为  $O'$ . 不失一般性, 令  $X'$  轴与  $X$  轴重合, 且  $X'O'Y'$  平面与  $XOY$  平面共面. 则非正交误差可用参数矩阵表示为

$$\mathbf{C}_{NO} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin(\rho) & \cos(\rho) & 0 \\ \sin(\varphi) \cos(\lambda) & \sin(\lambda) & \cos(\varphi) \cos(\lambda) \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中  $\rho$  为  $Y'$  轴与  $Y$  轴的夹角,  $\varphi$  为  $Z'$  轴与  $XOZ$  平面的夹角,  $\lambda$  为  $Z'$  轴与  $YOZ$  平面的夹角. 关于正交误差角的更详细分析可参见文献[4].

(3) 比例误差 (scaling) 和零点偏移: 比例误差主要是由传感器的三轴模拟信号灵敏度不完全一致引起的, 可采用元素为正数的对角矩阵  $\mathbf{S}_M = \text{diag}(s_x, s_y, s_z)$  来表示. 三轴零点偏移可用一个常矢量  $\mathbf{b}_M \in j^3$  来表示.

(4) 测量噪声: 测量噪声由传感器自噪声  $\mathbf{n}_s \in j^3$  和外部环境噪声  $\mathbf{n}_e \in j^3$  两部分组成. 测量信号带宽相对于噪声带宽较窄, 且噪声近似地满足高斯分布<sup>[10]</sup>. 可将  $\mathbf{n}_s$  和  $\mathbf{n}_e$  均视为白高斯噪声, 且不随传感器姿态变化.

综上可得三轴磁强计测量模型为

$$\mathbf{B}_{r,k} = \mathbf{S}_M \mathbf{C}_{NO} (\mathbf{C}'_{sl} \mathbf{I}_{l,k}^p \mathbf{B}_k^l + \mathbf{b}'_m + \mathbf{n}_{e,k}) + \mathbf{b}_M + \mathbf{n}_{s,k} \quad (3)$$

其中  $\mathbf{B}_{r,k}$  为  $k$  时刻三轴磁强计的输出矢量,  $\mathbf{C}'_{sl} = \mathbf{I} + \mathbf{C}_{sl}$ ,  $\mathbf{I} \in j^{3 \times 3}$  为单位矩阵,  $\mathbf{b}'_m = \mathbf{C}'_{sl} \mathbf{b}_m$ ,  $\mathbf{n}'_{e,k} = \mathbf{C}'_{sl} \mathbf{n}_{e,k}$ . 式 (3) 可进一步写为

$$\mathbf{B}_{r,k} = \mathbf{C} \mathbf{B}_k^C + \mathbf{b} + \mathbf{n}_k \quad (4)$$

其中总误差矩阵  $\mathbf{C} = \mathbf{S}_M \mathbf{C}_{NO} \mathbf{C}'_{sl}$ , 总偏移矢量  $\mathbf{b} = \mathbf{S}_M \mathbf{C}_{NO} \mathbf{b}'_m + \mathbf{b}_M$ , 测量误差  $\mathbf{n}_k = \mathbf{S}_M \mathbf{C}_{NO} \mathbf{n}'_{e,k} + \mathbf{n}_{s,k}$ . 校正坐标系内的地磁场矢量  $\mathbf{B}_k^C = \mathbf{I}_{l,k}^p \mathbf{B}_k^l$ . 注意到

$$\mathbf{B}_k^C = \mathbf{T} (\mathbf{B}_{r,k} - \mathbf{b} - \mathbf{n}_k), \mathbf{T} = \mathbf{C}^{-1} \quad (5)$$

求得  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{B}$  即可由测量磁场  $\mathbf{B}_{r,k}$  根据式 (5) 求解出校正后磁场  $\mathbf{B}_k^C$ , 即为. 由此可知, 误差参数  $\mathbf{S}_M, \mathbf{C}_{NO}, \mathbf{C}_{sl}, \mathbf{b}_m$  以及  $\mathbf{b}_M$  均不需要, 也不能被显式的求解<sup>[7]</sup>, 而仅需求解其共同作用的等效误差参数. 因此, 校正问题可等效为对  $\{\mathbf{T}, \mathbf{b}\}$  的参数估计问题. 除前述几类误差外, 校正参数也可对其他未建模误差进行线性补偿.

## 3 实时自校正算法

对于姿态辅助校正, 若姿态矩阵  $\mathbf{I}_{l,k}^p$  能够实时获得, 则可利用测量点参考地磁矢量得到  $\mathbf{B}_k^C$ , 再由矢量校正模型 (5) 构建状态空间模型即可实时求解出  $\{\mathbf{T}, \mathbf{b}\}$ . 而对于自校正情形, 式 (5) 是无法直接采用的. 本节从式 (5) 出发, 导出实时自校正算法.

### 3.1 校正参数的状态空间模型

利用测量点地磁场模值  $\mathbf{B}_m$  为常量原则, 注意到  $\mathbf{I}_{l,k}^p$  为正交矩阵. 可知校正系磁场矢量模值亦为常量,

$$\|\mathbf{B}_k^C\| = (\mathbf{B}_k^l)^T (\mathbf{I}_{l,k}^p)^T \mathbf{I}_{l,k}^p \mathbf{B}_k^l = \|\mathbf{B}_k^l\| = \mathbf{B}_m^2 \quad (6)$$

利用式 (6) 给出的关系可导出无姿态信息的校正参数状态空间模型. 将式 (5) 代入 (6), 可得

$$(\mathbf{B}_{r,k} - \mathbf{b} - \mathbf{n}_k)^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} (\mathbf{B}_{r,k} - \mathbf{b} - \mathbf{n}_k) = \mathbf{B}_m^2 \quad (7)$$

令  $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{A}$ , 将式(7)展开为

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_{r,k}^T \mathbf{A} \mathbf{B}_{r,k} - 2\mathbf{B}_{r,k}^T \mathbf{A} \mathbf{b} + \mathbf{B}_{r,k}^T \mathbf{A} \mathbf{b} \\ & + 2(\mathbf{b} - \mathbf{B}_{r,k})^T \mathbf{A} \mathbf{n}_k + \mathbf{n}_k^T \mathbf{A} \mathbf{n}_k = \mathbf{B}_m^2 \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)将参数矩阵  $\mathbf{T}$  估计转化为对  $\mathbf{A}$  的估计. 此时待估参数为  $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ , 由于  $\mathbf{A}$  为对称矩阵, 可将其参数化为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix} \quad (9)$$

同样有  $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^T$ ,  $\mathbf{x} = [A, B, C, D, E, F, b_x, b_y, b_z]^T$ ,  $\mathbf{x}$  是由待估参数构成的系统状态量, 可得状态方程为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} \quad (10)$$

将传感器输出矢量  $\mathbf{B}_{r,k} = [B_{r,k}^x, B_{r,k}^y, B_{r,k}^z]^T$  作为已知参数, 注意到  $B_m$  为常数, 可直接利用式(8)构造关于状态  $\mathbf{x}$  的隐式观测方程 (implicit measurement equation) 如下,

$$\begin{aligned} B_m^2 &= h(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_k) \\ &= h_1(\mathbf{x}_k) - 2h_2(\mathbf{x}_k) + h_3(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (11)$$

其中,

$$h_1(\mathbf{x}_k) = \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k \quad (12)$$

$$\begin{aligned} h_2(\mathbf{x}_k) &= (AB_{r,k}^x + DB_{r,k}^y + EB_{r,k}^z) b_x \\ &+ (DB_{r,k}^x + BB_{r,k}^y + FB_{r,k}^z) b_y \\ &+ (EB_{r,k}^x + FB_{r,k}^y + CB_{r,k}^z) b_z \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} h_3(\mathbf{x}_k) &= Ab_x^2 + Bb_y^2 + Cb_z^2 + \\ &2Db_x b_y + 2Eb_x b_z + 2Fb_y b_z \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_k &= [(B_{r,k}^x)^2, (B_{r,k}^y)^2, (B_{r,k}^z)^2, \\ &2B_{r,k}^x B_{r,k}^y, 2B_{r,k}^x B_{r,k}^z, 2B_{r,k}^y B_{r,k}^z, 0, 0, 0] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{v}_k = 2(\mathbf{b} - \mathbf{B}_{r,k})^T \mathbf{A} \mathbf{n}_k + \mathbf{n}_k^T \mathbf{A} \mathbf{n}_k \quad (16)$$

$\mathbf{v}_k$  为包含噪声的项, 即  $\mathbf{n}_k \sim N(0, \mathbf{N}_k)$ .  $\mathbf{N}_k = E[\mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^T]$  为测量噪声协方差. 则可得校正参数状态空间模型如下

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} \quad (17)$$

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_k)$$

其中  $y_k = B_m^2, k=1, 2, \dots, N, N$  为测量样本数. 式(11) ~ (17) 将校正问题转化为校正参数的滤波估值问题.

### 3.2 基于 EKF 滤波器的校正参数估计

式(17)可利用非线性滤波估值算法进行参数的在线求解. 实时校正需要算法具有低时间复杂度, 能够在采样间隔内完成一次递推计算. 由于容易求得式(11)关于  $\mathbf{x}$  的 Jacobian 矩阵, 且观测为标量, EKF 算法具有较高的效率. 本节导出用于校正参数估计的 EKF 滤波器.

EKF 算法首先对系统方程进行(伪)线性化, 再利用 KF 求解. 由式(10)可知状态方程为线性, 因此仅对观测方程进行线性化, 设  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  为时间更新(Time Update)后的状态预测值, 在  $\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^-$  和  $\mathbf{n}_k = \mathbf{0}$  处对观测方程进

行一阶 Taylor 展开得

$$y_k = h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}) + \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-) + \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}_k} \right|_{\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}} \mathbf{n}_k \quad (18)$$

由式(18)可得线性化观测方程为

$$y_k = \hat{\mathbf{H}}_k \mathbf{x}_k + z_k + \hat{\mathbf{M}}_k \mathbf{n}_k \quad (19)$$

$\hat{\mathbf{H}}_k, \hat{\mathbf{M}}_k$  分别为  $h$  对  $\mathbf{x}_k$  和  $\mathbf{n}_k$  在  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{n}_k = \mathbf{0}$  处的 Jacobian 矩阵, 且有

$$z_k = h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0}) - \hat{\mathbf{H}}_k \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (20)$$

$$\mathbf{M}_k \mathbf{n}_k \sim N(0, r_k) \quad (21)$$

其中  $r_k = \hat{\mathbf{M}}_k \mathbf{N}_k \hat{\mathbf{M}}_k^T$ , 因系统状态为常数, 则时间更新为

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^- \quad (22)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{P}_{k-1}^+$$

$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$  和  $\mathbf{P}_{k-1}^+$  分别为上一时刻观测更新后的状态及其误差矩阵估计, 根据式(19) ~ (22), 利用线性卡尔曼滤波等式, 可得到参数及其误差矩阵的递推估计式为

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{K}_k (y_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{0})) \quad (23)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \hat{\mathbf{H}}_k) \mathbf{P}_{k-1}^+$$

其中  $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k-1}^+ \hat{\mathbf{H}}_k^T (\hat{\mathbf{H}}_k \mathbf{P}_{k-1}^+ \hat{\mathbf{H}}_k^T + r_k)^{-1}$  为卡尔曼滤波增益.  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  随校正过程中接收到的当前磁场测量值  $B_k^{(r)}$  进行迭代更新, 当时间平均后验残差  $f(\hat{\mathbf{x}}_k^+)$  收敛时, 即

$$f(\hat{\mathbf{x}}_k^+) - f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+) < \varepsilon \quad (24)$$

其中  $\varepsilon$  为一小正数,  $f(\hat{\mathbf{x}}_k^+) = \frac{1}{kr_k} \sum_{i=1}^k (y_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{0}))^2$ .

此时迭代更新停止, 得到的估计值可用于下一步的校正参数解算. 由估计值可直接得到参数  $\{\mathbf{A}, \mathbf{b}\}$ , 注意到  $\mathbf{A} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}$  为对称矩阵, 对  $\mathbf{A}$  进行特征值分解<sup>[6]</sup>, 即

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{\Sigma} \mathbf{Q}^{-1} \quad (25)$$

其中  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  为对角矩阵,  $\lambda_{1,2,3}$  为  $\mathbf{A}$  的特征值,  $\mathbf{Q} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]$ , 且  $\boldsymbol{\alpha}_{1,2,3}$  为  $\mathbf{A}$  的特征向量, 对其分别进行归一化可得  $\bar{\mathbf{Q}} = [\bar{\boldsymbol{\alpha}}_1, \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2, \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3]$ , 则

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A} = \text{diag}(\|\boldsymbol{\alpha}_1\|, \|\boldsymbol{\alpha}_2\|, \|\boldsymbol{\alpha}_3\|) \quad (26)$$

则有

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^T \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i = \lambda_i \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^T \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i, i, j = 1, 2, 3 \quad (27)$$

对上式转置, 注意到  $\mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j = \lambda_j \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j$ , 可得

$$(\lambda_j - \lambda_i) \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i^T \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j = 0 \quad (28)$$

由此可得

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i^T \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j = \begin{cases} 0, & \lambda_j \neq \lambda_i \\ 1, & \lambda_j = \lambda_i \end{cases} \quad (29)$$

考虑到存在测量噪声, 可假设  $\mathbf{A}$  的特征值互不相同, 则  $\bar{\mathbf{Q}}$  为正交矩阵, 即  $\bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}^T = \mathbf{I}$

$$\mathbf{A} = (\bar{\mathbf{Q}} \sqrt{\mathbf{\Sigma}} \bar{\mathbf{Q}}^T)^T \bar{\mathbf{Q}} \sqrt{\mathbf{\Sigma}} \bar{\mathbf{Q}}^T \quad (30)$$

由此可解得

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{Q}} \sqrt{\mathbf{\Sigma}} \bar{\mathbf{Q}}^T \quad (31)$$

其中  $\sqrt{\mathbf{\Sigma}} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$ . 根据校正参数  $\{\mathbf{T}$ ,

$b\}$ , 利用式(5)即可得出校正后的三轴磁场强度.

### 3.3 U-D 分解滤波器

为避免迭代计算导致的截断误差累积, 利用 U-D 分解滤波器来实现上节中的 EKF 算法.

#### 算法 1 Bierman 观测更新算法

```

 $\gamma_1 = r_k + g_1 f_1$ 
 $D_1 = D_1^- r_k / \gamma_1$ 
 $k_k = [g_1, 0, \dots, 0]^T$ 
for  $j = 2$  to  $n$ 
     $\gamma_j = \gamma_{j-1} + g_j f_j$ 
     $D_j = D_j^- \gamma_{j-1} / \gamma_j$ 
     $u_j = u_j^- - (f_j / \gamma_{j-1}) k_k$ 
     $k_k = k_k + g_j u_j$ 
end for
 $K_k = k_k / (f^T g + r_k)$ 

```

对正定矩阵  $P_k^+$ , 存在 U-D 分解  $P_k^+ = U_k^+ D_k^+$  ( $U_k^+$ )<sup>T</sup>, U-D 滤波器不直接对  $P_k^+$  进行迭代计算, 而仅迭代因子项  $U_k^+$  与  $D_k^+$  参与估值, 从而在位数一定的前提下提高了计算精度, 由于待估计状态为常数, 因此仅需要进行观测更新, 即  $U_k^+$  与  $D_k^+$  的迭代计算, 这可通过表 1 中的 Bierman 观测更新新算法<sup>[11]</sup> 实现, 其中,  $n$  为状态维数,

$$\begin{aligned} f &= [f_1, f_2, \dots, f_n]^T = (U_{k-1}^+)^T \hat{H}_{k-1}^T, \\ g &= [g_1, g_2, \dots, g_n]^T = D_{k-1}^+ f, \\ U_{k-1}^+ &= [u_1^-, u_2^-, \dots, u_n^-], \\ D_{k-1}^+ &= \text{diag}(D_1^-, D_2^-, \dots, D_n^-). \end{aligned}$$

更新后  $U_k^+ = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ ,  $D_k^+ = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_n)$ .

采用 U-D 分解滤波器能够提高数值精度和数值稳定性, 且本文校正问题的观测方程为标量, 能够获得高于标准 EKF 形式算法的执行效率<sup>[12]</sup>. 由算法 1 可知, U-D 分解滤波器完成一次估计更新需进行  $2(n+1)(n-2) + 2$  次乘法运算和  $2n-3$  次除法运算,  $U_k^+$ ,  $D_k^+$  可同时存储在同一矩阵中. 相比 U-D 分解滤波器, 由于目前的离线算法均是基于椭球拟合原理<sup>[4]</sup>, 这等效于求解如下的最小二乘问题

$$\min_x \|\Psi_N x - y_N\|_2^2 \quad (32)$$

其中  $y_N = [B_{r,1}^z, B_{r,2}^z, \dots, B_{r,n}^z]^T$ ,  $\Psi_N \in \mathbb{R}^{N \times n}$  为测量三轴磁场值组成的系数矩阵(文献[7]式(13)), 则最小二乘解可通过求解如下的线性方程组得到

$$\Psi_N^T \Psi_N x = \Psi_N^T y_N \quad (33)$$

此时  $\hat{x} = (\Psi_N^T \Psi_N)^{-1} \Psi_N^T y_N$ , 待求逆的矩阵在每个观测时刻通过叠加历史观测值得到,

$$\Psi_N^T \Psi_N = \sum_{k=1}^N \psi_k^T \psi_k \quad (34)$$

其中  $\psi_k$  是构成  $\Psi$  的第  $k$  行向量.

离线算法需要求逆运算, 其时间复杂度为  $O(n^2 + n^3)$ , 远大于滤波算法的  $O(n^2)$  复杂度, 且离线算法需要大量观测值保证求逆运算的数值稳定性和估计精度, 此时其空间复杂度亦大于滤波算法<sup>[13]</sup>.

### 3.4 初始条件确定

作为迭代算法, 需要给定一个初始条件进行参数估计, 即  $\hat{x}_{0|0} = \hat{x}_0$ ,  $P_{0|0} = P_0$ . 由于非线性模型不能保证滤波收敛性, 需给定合理的初始条件以防止滤波发散. 一般认为非正交误差角、软磁误差和比例误差均比较小, 则参数矩阵  $A$  对角线元素接近于 1, 非对角线元素接近于 0, 则可设  $\hat{x}_0 = [1, 1, 1, 0, 0, 0, \hat{b}^T]^T$ . 利用下式对三轴偏移分量初值进行估算

$$\hat{b}_i = \frac{B_{r,i}^{(\max)} + B_{r,i}^{(\min)}}{2}, \quad i = x, y, z \quad (35)$$

其中, 校正旋转时  $i$  轴最大测量值  $B_{r,i}^{(\max)}$  和最小测量值  $B_{r,i}^{(\min)}$  可采用迭代比较得出. 通过假设参数计算误差限, 设  $P_0 = \text{diag}(\varepsilon_{1,1}^2, \varepsilon_{2,2}^2, \varepsilon_{3,3}^2, \varepsilon_{1,2}^2, \varepsilon_{2,3}^2, \varepsilon_{1,3}^2, \xi_x^2, \xi_y^2, \xi_z^2)$ . 其中  $\xi_i = 0.1 \hat{b}_i$ , 对于一般应用, 假设其三轴比例误差  $\pm 0.2$ , 非正交误差角度  $\pm 5^\circ$ , 忽略软磁误差, 利用误差矩阵表达式计算参数矩阵  $A$  中元素的误差限  $\varepsilon_{m,n}$ ,  $m \leq n$ , 则

$$\varepsilon_{m,n} = \begin{cases} 0.2, & m = n \\ 0.1, & m \neq n \end{cases}$$

传感器出厂时若给出部分参数误差, 则可直接利用来确定  $P_0$ . 实际应用中可采用离线算法参数估计结果作为初始条件<sup>[7]</sup>, 再由实时算法对参数进行在线更新, 以获得最佳的参数估计结果.

## 4 仿真与实测数据分析

### 4.1 仿真实验

根据式(4)给出的三轴磁强计测量模型, 设非正交误差角为  $\rho = 2^\circ$ ,  $\varphi = 2^\circ$ ,  $\lambda = 1.5^\circ$ , 硬磁偏差  $b_{III} = [-1.2, 0.2, -0.8]^T$  G, 零偏  $b_M = [1.5, 0.4, 2.7]^T$  G, 比例系数  $S_M = \text{diag}(1.2, 0.8, 1.3)$ , 软磁偏差系数矩阵

$$C_{SI} = \begin{bmatrix} 0.05 & -0.13 & 0.3 \\ -0.13 & 0.16 & 0.08 \\ 0.3 & 0.08 & 0.12 \end{bmatrix}$$

测量噪声协方差矩阵  $N_k = \text{diag}(\sigma^2, \sigma^2, \sigma^2)$ . 噪声标准差  $\sigma = 20$  mG. 测量点当地地磁场在 NED 坐标系内为  $B^l = [0.33, 0.024, 0.36]^T$  Gauss. 仿真中利用随机的姿态四元数  $q = [\cos(0.5\theta), \sin(0.5\theta) u^T]^T$  模拟校正中的不同姿态放置操作, 其中旋转轴  $u \sim N([-1, -1, -1]^T, 4I_{3 \times 3})$ , 旋转角  $\theta$  从 0 到  $6\pi$  变化. 根据姿态四元数计算出姿态变换矩阵  $I_i^p$  即可利用误差模型得到仿真的磁强计输出.

表 1 本文算法与 TWO-STEP 算法参数估计结果

	$A$	$b$
真实值	$\begin{bmatrix} 0.824 & 0.261 & -0.359 \\ 0.261 & 1.084 & -0.202 \\ -0.359 & -0.202 & 0.554 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.331 \\ 0.632 \\ 1.006 \end{bmatrix}$
本文算法	$\begin{bmatrix} 0.816 & 0.247 & -0.354 \\ 0.247 & 1.068 & -0.192 \\ -0.354 & -0.192 & 0.556 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.328 \\ 0.633 \\ 1.010 \end{bmatrix}$
TWO-STEP	$\begin{bmatrix} 0.817 & 0.255 & -0.367 \\ 0.255 & 1.057 & -0.204 \\ -0.367 & -0.204 & 0.569 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.332 \\ 0.631 \\ 1.007 \end{bmatrix}$

误差参数得到待估参数  $\{A, b\}$  真实值如表 1 中所

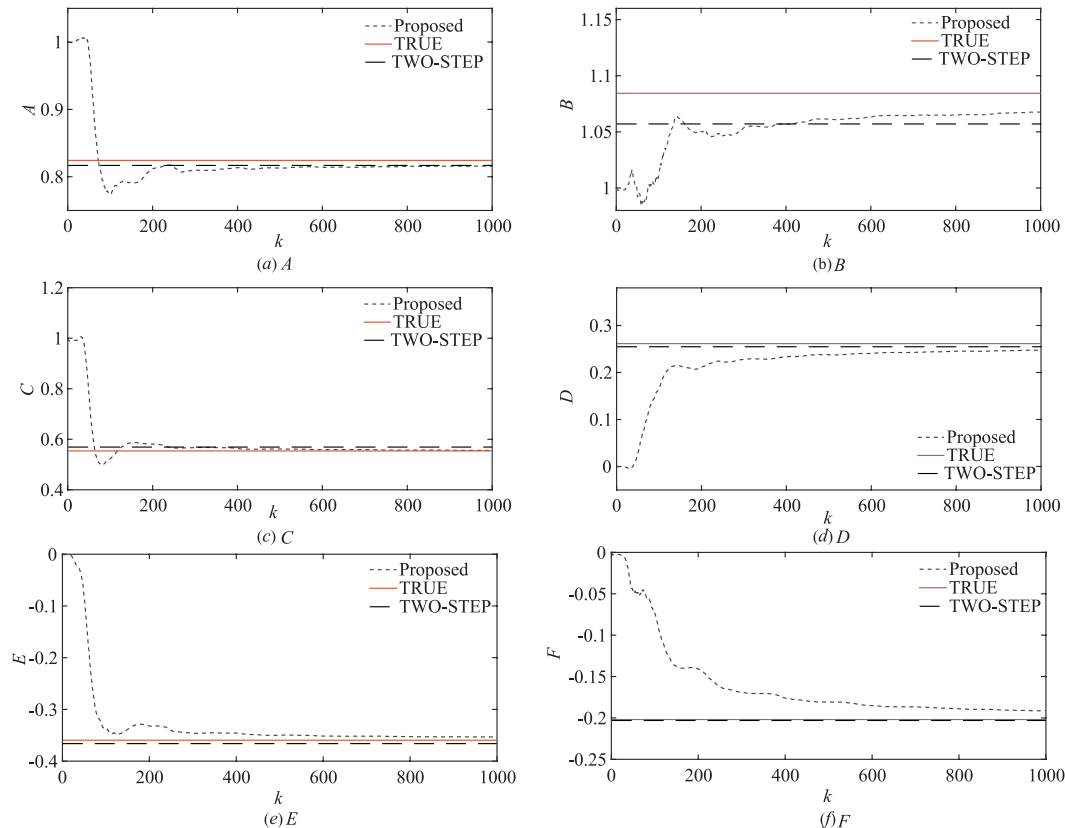


图 1 各个参数经 50 次 MC 仿真的平均估计结果

## 4.2 实测试验

采用 PNI RM3000 三轴数字磁强计进行实测试验. RM3000 为分立测量线圈 + 驱动芯片结构, 焊接中易导致轴间非正交误差. 观测噪声协方差矩阵  $N_k$  通过静态条件下测量  $10^4$  组三轴数据进行统计得出.

试验中以手持转动方式使传感器获得不同姿态条

示. 对算法进行 50 次 Monte Carlo (MC) 仿真试验, 每次生成  $10^3$  个仿真数据. 表 1 为本文算法和 TWO-STEP 离线算法参数估计的平均结果. 可见本文算法能够正确估计出参数, 估计结果与 TWO-STEP 方法近似.

图 1 给出了本文算法经 50 次 MC 试验得到的平均估计结果, 可见在  $k > 600$  (此时  $\varepsilon < 10^{-4}$ ) 时, 对各个参数的估计值均收敛到真实值附近并趋于稳定. 图 2 给出了校正前 (图中“Raw”所示) 后的总场模值, 从图中可看出未校正的数据波动在 0.6 到 2G 之间, 而经本文算法校正后的总场模值均在参考地磁场模值 (图中“Ref”所示) 附近约 0.1G 范围内, 与 TWO-STEP 方法校正后的模值相当. 图 3 给出了本文算法校正前后的地磁场矢量在传感器量测空间上的分布, 可见校正前磁场分布呈椭球体, 而经校正后的磁场分布呈半径为参考模值的球体.

件下的测量数据. 由于无法获知参数真实值, 试验中共采集两组数据, 第二组数据用于验证由第一组数据估计得到的校正参数. 地磁场参考模值由 IGRF 全球地磁模型得出, 对于本文试验地点 (武汉,  $30^{\circ}34'54''N$ ,  $114^{\circ}14'26''E$ ) 地磁场参考模值为  $B_m = 49.561 \mu T$ .

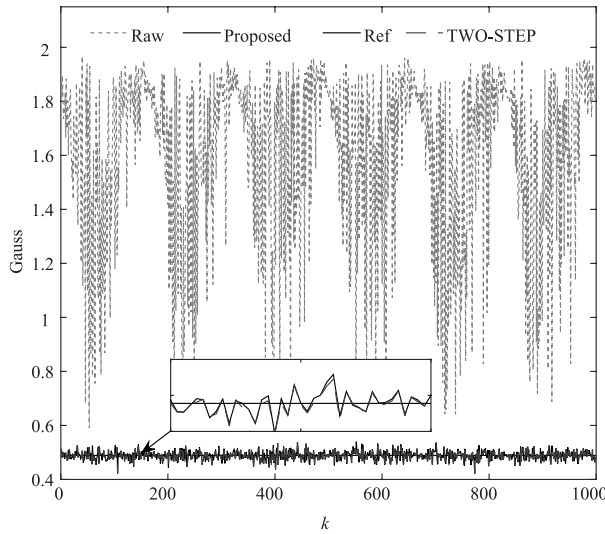


图2 校正前后磁场模值

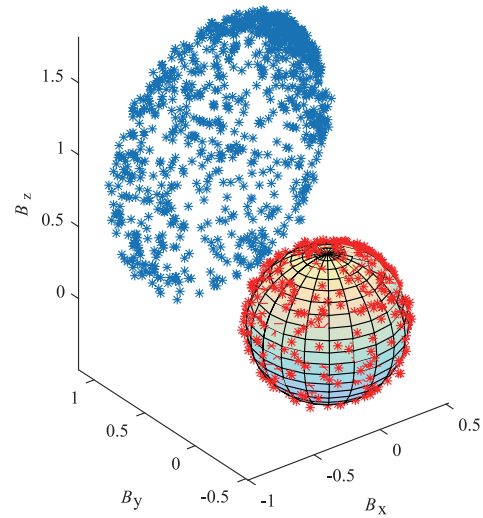


图3 校正前后磁场测量空间分布

表 2 本文算法与 TWO-STEP 算法校正参数估计结果

	$T$	$b/(\mu T)$
本文算法	$\begin{bmatrix} 0.883 & 0.012 & -0.021 \\ 0.012 & 0.869 & 0.008 \\ -0.021 & 0.008 & 0.917 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.43 \\ -0.647 \\ 3.249 \end{bmatrix}$
TWO-STEP	$\begin{bmatrix} 0.845 & 0.024 & -0.017 \\ 0.024 & 0.790 & -0.013 \\ -0.017 & -0.013 & 0.874 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.810 \\ 5.136 \\ 5.473 \end{bmatrix}$

图 4 分别给出了第一组数据经本文算法校正前后地磁场矢量在测量空间上的分布,由图 4(a)可见,校正前传感器在空间转动时的输出呈部分椭球分布. 而经

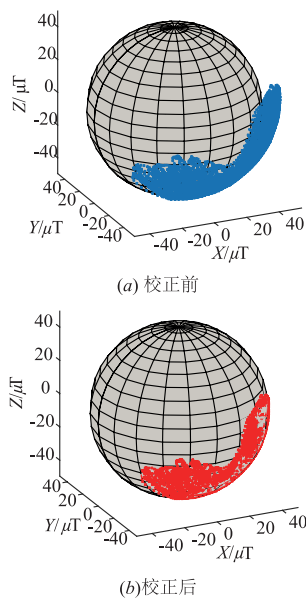


图4 第一组数据校正前后磁场测量空间分布

校正后的磁场分布与半径为参考地磁模值的球体分布是一致的. 同时可注意到第一组校正转动是不充分的.

图 5 给出了采用本文算法和 TWO-STEP 算法对第一组数据进行校正前后的结果,从图中可见两种算法的总场模值校正结果是相近的,计算得相对参考模值的标准偏差分别为  $0.253\mu T$  和  $0.249\mu T$ . 表 2 给出了各自的校正参数估计结果. 可见虽然两种算法校正后模值相当,但两种算法参数估计结果存在差异,尤其在偏移量  $b$  估计上.

采用表 2 中的参数对第二组数据进行校正,图 6 中同时给出了两种算法对第二组数据进行校正前后的磁场模值结果. 由图 6 可知,本文算法通过第一组数据得到的校正参数能够比 TWO-STEP 方法更准确地对第二

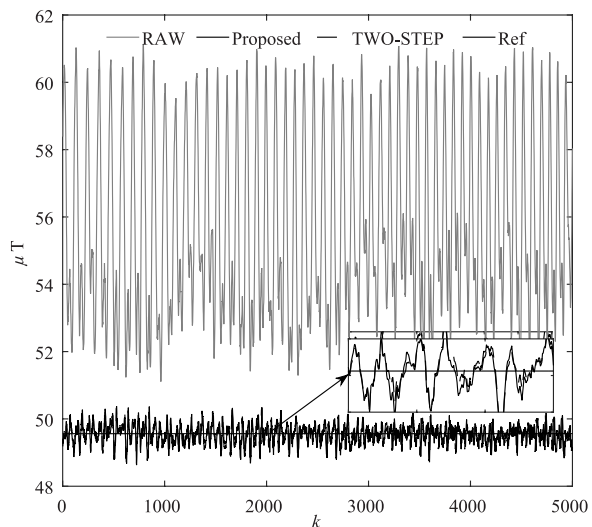


图5 第一组数据校正前后的地磁场模值

组数据进行校正,而后者所得参数则完全不能实现校正.可见,当校正转动不充分和(或)局部磁场分布均匀性条件不满足时,校正参数可能存在多解情况,TWO-STEP方法得到的校正参数推广性较差.而本文算法利用先验初始条件对状态(参数)进行约束,并能够根据

观测值实时更新估计结果,因而较离线的 TWO-STEP方法性能更佳.图7(a)~(b)给出了采用本文算法估计所得参数对第二组数据进行校正前后磁场的测量空间分布情况.可见校正后的磁场分布与半径为参考地磁模值的球体分布是一致的.

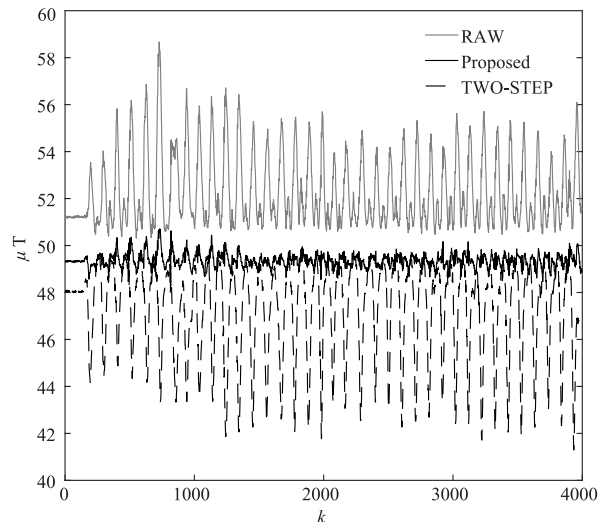


图6 第二组数据校正前后的地磁场模值

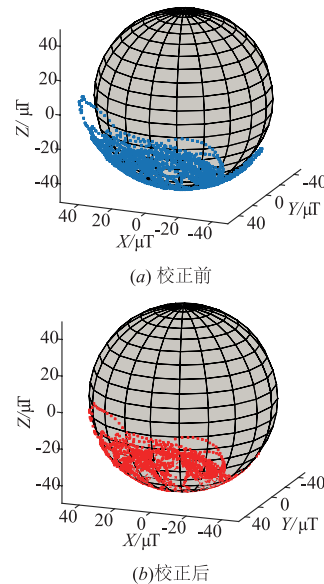


图7 第二组数据校正前后磁场的测量空间分布

## 5 总结

针对传统的离线算法实时性低,难以片上实现的问题,提出一种三轴磁强计实时校正算法,通过将校正问题转化为基于状态空间模型的估计问题,利用 U-D 分解 EKF 滤波器求解,克服了离线算法需先采集后估计的缺点,且易于片上实现.通过数值仿真和试验数据测试表明,本文算法在校正转动不充分条件下的鲁棒性优于离线算法;相比离线算法更适合在高实时性和难以实施二次校正的平台上进行应用.

### 参考文献

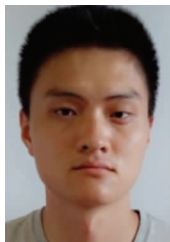
- [1] Beravs T, Begu S, Podobnik J. Magnetometer calibration using Kalman filter covariance matrix for online estimation of magnetic field orientation[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2014, 63(8): 2013–2020.
- [2] 彭孝东,张铁民,李继宇,陈瑜. 基于传感器校正与融合的农用小型无人机姿态估计算法[J]. 自动化学报, 2015, 41(4): 854–860.  
Peng X, Zhang T, Li J, Chen Y. Attitude estimation algorithm of agricultural small-UAV based on sensors fusion and calibration[J]. Acta Automatica Sinica, 2015, 41(4): 854–860. (in Chinese)
- [3] Gebre-Egziabher D, Elkaim G H, Powell J D, et al. A non-

linear, two-step estimation algorithm for calibrating solid-state strapdown magnetometers[A]. International St Petersburg Conference on Navigation Systems[C]. IEEE, 2001. 28–30.

- [4] Foster C, Elkaim G. Extension of a two-step calibration methodology to include nonorthogonal sensor axes[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2008, 44(3): 1070–1078.
- [5] Zhitian Wu, Xiaoping Hu, Meiping Wu. Attitude-independent magnetometer calibration for marine magnetic surveys: regularization issue[J]. Journal of Geophysics and Engineering, 2013, 10(9): 1–9.
- [6] Valerie R, Muhammad A, Gerard L. Complete tri-axis magnetometer calibration in the magnetic domain[J]. Journal of Sensors, 2010, 56(6): 1–11.
- [7] Vasconcelos J, Elkaim G, Silverstre C, et al. Geometric approach to strapdown magnetometer calibration in sensor frame[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2012, 47(2): 1293–1306.
- [8] Bertrand G, Ali Z, Mohamed B, et al. Real-time attitude-independent three-axis magnetometer calibration for spinning projectiles: a sliding window approach[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2014, 22(1): 255–264.
- [9] Crassidis L, Lai L, Harman R. Real-time attitude-independent three-axis magnetometer calibration[J]. Journal of

- Guidance Control Dynamics,2005,28(1):115-120.
- [10] Wahlstrom N, Gustafsson F. Magnetometer modeling and validation for tracking metallic targets[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2014,62(3):545-556.
- [11] Bierman J. Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation[M]. New York: Academic Press,1977.
- [12] Bruce G. Advanced Kalman Filtering, Least-squares, and Modeling[M]. New Jersey: John Wiley&Sons,2011.
- [13] Ren F, Zhang C, Liu L, et al. A square-root-free matrix decomposition method for energy-efficient least square computation on embedded systems[J]. IEEE Embedded Systems Letter,2014,6(4):73-76.

#### 作者简介



张宏欣 男,1987年12月出生,陕西汉中  
人.2010年毕业于西安理工大学,现为海军工程  
大学博士生,从事统计信号处理及目标跟踪相  
关研究.

E-mail:mylifeforthebattle@hotmail.com



周穗华 男,1962年10月出生,广东五华  
人,1984年毕业于海军工程学院,1990年在海军  
工程学院获得博士学位.现为海军工程大学教  
授,从事军用目标特性信息处理及武器系统总  
体设计方面研究.