

# 基于量子混沌粒子群优化算法的 分数阶超混沌系统参数估计

闫 涛<sup>1,5</sup>, 刘凤娴<sup>2,3</sup>, 陈 斌<sup>4</sup>

(1. 山西大学计算机与信息技术学院, 山西太原 030006; 2. 中国科学院广州地球化学研究所, 广东广州 510640;  
3. 中国科学院大学, 北京 100049; 4. 中国科学院广州电子技术研究所, 广东广州 510070;  
5. 山西大学大数据科学与产业研究院, 山西太原 030006)

**摘 要:** 为了对分数阶超混沌系统中的未知参数进行准确估计, 提出一种量子混沌粒子群优化算法 (Quantum chaos particle swarm optimization, QCPSO). 该算法通过对量子粒子群优化算法 (Quantum behaved particle swarm optimization, QPSO) 的实现机理进行分析, 并结合量子纠缠与混沌系统之间的相关性而实现. 首先, 将量子势阱中心视为混沌吸引子围绕的不动点, 处于吸引子外部的粒子会逐渐聚集于吸引子之内, 而处于吸引子内部的粒子会出现快速分离扩散的现象; 然后, 采用基于随机映射的粒子更新机制, 充分保证混沌粒子的初值多样性; 最后, 提出了基于不动点中心的尺度自适应策略, 解决了算法后期的搜索停滞问题. 运用 QCPSO 算法对典型分数阶超混沌系统参数进行估计, 结果表明, 该算法在收敛速度与精度上优于改进的差分进化算法、自适应人工蜂群算法以及改进的量子粒子群优化算法.

**关键词:** 量子粒子群优化算法; 混沌映射; 混沌吸引子; 分数阶超混沌系统

**中图分类号:** TP18 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2018)02-0333-08

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2018.02.011

## New Quantum Chaos Particle Swarm Optimization Algorithm for Estimating the Parameter of Fractional Order Hyper Chaotic System

YAN Tao<sup>1,5</sup>, LIU Feng-xian<sup>2,3</sup>, CHEN Bin<sup>4</sup>

(1. School of Computer and Information Technology, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006, China;  
2. Guangzhou Institute of Geochemistry, Chinese Academy of Sciences, Guangzhou, Guangdong 510640, China;  
3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;  
4. Guangzhou Institute of Electronic Technology, Chinese Academy of Sciences, Guangzhou, Guangdong 510070, China;  
5. Institute of Big Data Science and Industry, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006, China)

**Abstract:** A new quantum chaos particle swarm optimization (QCPSO) was proposed to accurately estimate the uncertain parameters of the fractional order hyper chaotic system. The QCPSO algorithm was realized by analyzing the mechanism of quantum behaved particle swarm optimization (QPSO) and combining the correlation between quantum entanglement and chaotic system. Firstly, the center of potential well was replaced by a fixed point of chaotic attractor. The particles which outside the attractor were gradually converged to the attractor, and the particles which inside the attractor were quickly diffused. Secondly, in order to guarantee the diversity of the initial value of the chaotic particles, the particle update mechanism based on random mapping was proposed. Finally, a scale adaptive strategy was proposed to solve the problem of search stagnation of the algorithm. The parameters of fractional order hyper chaotic system were estimated by the QCPSO algorithm, and the results showed that the QCPSO algorithm has faster convergence speed and higher accuracy than improved differential evolution algorithm, adaptive artificial bee colony algorithm and improved QPSO algorithm.

**Key words:** quantum behaved particle swarm optimization; chaotic maps; strange attractor; fractional order hyper chaotic system

## 1 引言

混沌是由一个确定性理论描述的系统而产生的具有不重复性和不可预测的不规则运动,它广泛存在于自然界与工程系统中.自 Lorenz 在研究气候预报的长期不可预测性时提出第一个混沌吸引子以来<sup>[1]</sup>,随着对混沌系统研究的不断深入,出现了演化行为更加复杂和隐蔽的超混沌系统,该类系统在保密通信领域具有较高的应用价值<sup>[2]</sup>.上述混沌系统主要研究对象是整数阶混沌系统,但在物理过程与实际工程应用中,系统通常以分数阶的形式存在,分数阶混沌系统的同步在数据通信加密、非线性系统参数辨识、图像压缩与信号控制等领域更能精确反映系统的物理特性,因此对分数阶超混沌系统的研究具有更强的普适性与更高的使用价值<sup>[3]</sup>.

随着分数阶微分与超混沌系统的引入,精确估计混沌系统参数的复杂程度也增加.群体智能优化算法是针对混沌系统参数估计的一类重要方法.任开军等<sup>[4]</sup>提出一种自适应人工蜂群算法,其自适应步长策略保证系统在噪声强度大的情况下也可以得到较好的参数估计结果.何延年等<sup>[5]</sup>通过改进差分进化算法的变异操作来实现对 Rössler 混沌系统参数的辨识.上述方法主要是针对整数阶混沌系统参数估计的问题,而对分数阶混沌系统参数估计的方法较少,黄宇等<sup>[6]</sup>借助量子并行粒子群优化算法实现了对分数阶混沌系统的参数辨识.

粒子群优化算法 (Particle swarm optimization, PSO)<sup>[7]</sup>是由 Eberhart 在 1995 年提出的模仿鸟群捕食行为的一种全局随机搜索算法,其中每个粒子表示待优化问题的一个解,初始化阶段赋予每个粒子一个随机位置与随机速度,下一代粒子通过全体粒子最优解与自身历史最优解得到.鉴于 PSO 算法效率高且易于实现等特点,目前被广泛应用于神经网络训练<sup>[8]</sup>、故障诊断<sup>[9]</sup>、图像处理<sup>[10]</sup>等领域.

但 PSO 算法存在一些缺陷,如 F Van den Bergh 证明了 PSO 算法不能收敛于全局最优解<sup>[11]</sup>,尤其是在解决多峰问题时容易陷入局部最优解.针对上述问题,孙俊等<sup>[12]</sup>提出一种量子粒子群优化算法 (Quantum-behaved particle swarm optimization, QPSO),该算法以势阱中心作为各粒子的吸引点,通过设置参数使得下一代粒子以较大的概率出现在吸引点附近,但该算法依然存在一些问题,假使当前势阱中心为一局部最优解,则粒子可能无法跳出当前局部最优解.因此学者们提出了许多改进的 QPSO 算法. Xi 等<sup>[13]</sup>赋予最优平均位置一定的权重,进而更好的平衡 QPSO 算法的全局与局部搜索能力.赵吉等<sup>[14]</sup>借助群体间的协同机制增强 QPSO

算法的搜索能力,提出一种基于演化历史信息的自变异协同量子行为粒子群优化算法,取得了较好的结果.但上述方法在解决多维复杂优化问题中,依然存在收敛速度慢,寻优精度低等问题.

本文提出一种基于量子混沌粒子群优化算法 (QCPSO) 的分数阶超混沌系统参数估计方法. QCPSO 算法中引入了混沌吸引子,保证粒子陷入局部最优解后有一定的跳出机制.实验部分比较了不同混沌映射结构下的 QCPSO 算法在标准优化测试函数的性能,并将具有最优映射结构的 QCPSO 算法运用在分数阶超混沌 Rössler 系统与分数阶超混沌 Chen 系统的参数估计问题中.

## 2 问题描述

考虑如下分数阶超混沌系统:

$$\frac{d^\alpha X}{dt^\alpha} = f(X, p), 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

其中  $\frac{d^\alpha X}{dt^\alpha}$  为 Caputo 算子,  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$  为系统的状态变量,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^\top$  为系统分数阶次,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^\top$  为标准混沌系统参数.

假设被估计混沌系统如下:

$$\frac{d^\beta Y}{dt^\beta} = f(Y, q), 0 < \beta < 1 \quad (2)$$

其中  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^\top$  为被估计系统的状态变量,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^\top$  为被估计系统分数阶次,  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^\top$  为被估计混沌系统参数.

为了估计分数阶超混沌系统的未知参数,定义系统变量估计误差为:

$$e_i = Y_i - X_i, 1 \leq i \leq n \quad (3)$$

其中  $n$  为系统变量总数. 参数估计误差定义为:

$$e_j = p_j - q_j, 1 \leq j \leq m \quad (4)$$

其中  $m$  为估计混沌系统的参数总数. 则分数阶超混沌系统的参数估计可以转化为最小化如下目标函数:

$$J = \operatorname{argmin} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \|e_j\|^2 \quad (5)$$

其中变量误差的估计通过计算变量误差序列的前  $K$  个序列值的 2-范数的平方和. 本文利用 QCPSO 算法解决式(5)的多变量目标函数优化问题.

## 3 量子混沌粒子群优化算法 (QCPSO)

对 PSO 算法进行收敛性分析可以得到保证算法全局收敛的必要条件<sup>[11]</sup>,即每个粒子  $x_{i,j}(t)$  收敛于  $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im})^\top$ , 其表达式为:

$$p_{i,j}(t) = \varphi \cdot P_{i,j}(t) + (1 - \varphi) \cdot G_j(t) \quad (6)$$

其中  $\varphi \in (0, 1)$ ,  $P_{i,j}(t)$  为粒子  $i$  的历史搜索最优位置,

$G_j(t)$  为最优粒子位置.

为了更加直观的理解 QCPSO 算法,假设粒子的维数为 1. 在 QCPSO 算法中,首先,通过计算第  $i$  个粒子的位置  $x_i(t)$  与  $p_i(t)$  的距离建立混沌映射关系,在迭代过程中动态调整每一代粒子的混沌搜索范围. 粒子的  $x_i(t)$  的搜索范围如下所示.

$$x_{imin} = \begin{cases} p_i(t) - |p_i(t) - x_i(t)|/u, & p_i(t) \neq x_i(t) \\ p_i(t) - |p_i(t) \cdot v|, & p_i(t) = x_i(t) \end{cases} \quad (7)$$

$$x_{imax} = \begin{cases} p_i(t) + |p_i(t) - x_i(t)|/u, & p_i(t) \neq x_i(t) \\ p_i(t) + |p_i(t) \cdot (1-v)|, & p_i(t) = x_i(t) \end{cases} \quad (8)$$

其中  $u, v \in (0, 1)$ .

然后,通过式(9)对粒子  $x_i(t)$  进行归一化操作,得到混沌序列的初始值  $X_{i,1}$ .

$$X_{i,1} = \frac{x_i(t) - x_{imin}}{x_{imax} - x_{imin}} \quad (9)$$

运用一定的混沌映射结构产生混沌序列  $\mathbf{X}_i = (X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,m})$ ,  $m$  为混沌序列长度. 将这些序列通过式(10)反变换至原始搜索空间.

$$F(x_{i,r}(t)) = x_{imin} + X_{i,r}(x_{imax} - x_{imin}) \quad (10)$$

最后,选择序列中评价结果最优的粒子作为下一代粒子, QCPSO 算法的迭代公式如(11)所示.

$$x_i(t+1) = \operatorname{argmin}_{1 \leq r \leq m} F(x_{i,r}(t)) \quad (11)$$

### 3.1 尺度自适应策略

良好的搜索策略有助于提升算法的搜索效率, QCPSO 算法中粒子状态的更新依赖于特定混沌系统的构建. 为了提升粒子的空间覆盖率,粒子  $x_i(t)$  的映射区间半径应设置为  $R \geq |x_i(t) - p_i(t)|$ . 考虑混沌系统对于初值敏感的特性会导致混沌序列的差异性,这与 PSO 算法中的较高的种群多样性具有较大的搜索空间的概念相符. 通过引入了随机变量  $u$ , 粒子映射半径变为  $R = |x_i(t) - p_i(t)|/u$ , 变化的映射半径对应于粒子不同的初始位置,进而有效提升算法找到全局最优解的可能性.

上述粒子映射半径的设置方法是基于  $x_i(t)$  与  $p_i(t)$  处于同一量级的情况下,假如粒子  $x_i(t)$  与  $p_i(t)$  无限接近,结果会导致下一代粒子的映射空间无法建立,算法的搜索过程出现停滞状态. 通过将原有不同尺度的映射半径拉伸至以吸引子不动点  $p_i(t)$  为中心,  $R_{\text{new}}$  为半径的同尺度映射空间,其中  $R_{\text{new}} = p_i(t) \cdot v$ ,  $v \in (0, 1)$ . 同尺度映射空间的建立保证粒子与吸引子不动点之间建立有效的对应关系.

### 3.2 QCPSO 算法收敛性证明

已经证明 PSO 算法收敛于全局最优位置与局部最

优位置的随机加权和<sup>[11]</sup>. 因此在 QCPSO 算法中,如果满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t+1) = p$ , 则算法收敛.

当  $x_i(t) \neq p$  时,根据式(7)、(8)、(10)得到:

$$x_i(t+1) = p + \frac{2X_{i,r} - 1}{u} |p - x_i(t)| \quad (12)$$

所以式(12)的极限为:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2X_{i,r} - 1}{u} |p - x_i(t)| = 0 \quad (13)$$

得出:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t+1) = p \quad (14)$$

当  $x_i(t) = p$  时:

$$x_i(t+1) = p(1 + X_{i,r} - v) \quad (15)$$

因为  $0 < X_{i,r} < 1$  且  $0 < v < 1$ , 所以式(15)的极限为:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t+1) = \phi p \quad (16)$$

其中  $\phi$  为常数,通过上述分析, QCPSO 算法收敛于全局最优解.

### 3.3 QCPSO 算法流程

以优化 Sphere 函数为例,选择 Logistic 映射作为 QCPSO 的混沌映射结构说明 QCPSO 算法流程.

#### 算法 1 QCPSO 算法

1. 初始化种群数量  $n$ , 最大迭代次数  $T$ , 粒子  $i$  的上下界  $x_{\max}$  与  $x_{\min}$ , 混沌映射序列最大值  $m$ .
2. 通过计算 Sphere 函数 ( $F(x_{i,j}) = x_{i,j}^2$ ) 的适应值, 得到粒子  $x_{i,j}$  的历史最优位置  $P_{i,j}$  与所有粒子最优位置  $G_j$ .
3. For 每个粒子  $i, i \in [1..n]$
4. 根据式(6)计算吸引子不动点  $p_{i,j}(t)$ .
5. 根据式(7)(8)设置混沌映射搜索区间  $x_{imax}$  和  $x_{imin}$ .
6. 根据式(9)将粒子  $i$  归一化至混沌映射初始粒子  $X_{i,1}$ .
7. repeat
8. 通过 Logistic 混沌映射 ( $f(X_{i,n}) = 4X_{i,n}(1 - X_{i,n})$ ) 计算混沌序列  $X_{i,r}$ .
9. 根据式(10)将混沌序列反变换至原始空间.
10. 评价混沌映射序列中的粒子当前值的适应度函数是否优于  $P_{i,j}$  与  $G_j$ , 并更新  $P_{i,j}$  与  $G_j$ .
11. 线性递减混沌映射序列长度  $m$ .
12. until 满足终止条件
13. End for

## 4 数值分析

### 4.1 QCPSO 算法中混沌映射结构的选择

选择 Sphere、Rosenbrok 和 Griewank 作为标准测试函数, 函数维数设置为 10. QCPSO 算法中粒子数目设置为 30, 最大迭代次数为 1000, 混沌映射序列长度由 20 递减至 5. 选择 8 个常用的一维混沌映射函数作为 QCPSO 算法的混沌映射结构, 分别是 Logistic 映射、Cheby-

shev 映射、ICMIC 映射、Tent 映射、Simusoidal 映射、Piecewise 映射、Singer 映射、Gaussian 映射<sup>[15]</sup>。

算法在不同测试函数独立运行 50 次的最优值、最差值、平均值与标准差结果如表 1 所示。由表 1 可以看出 Simusoidal 映射的性能最差, 因为其概率分布基本没有覆盖设计函数的极值点; Logistic 映射与 Gaussian 映

射在 0 附近具有较高的落入频率, 所以对于极值为 0 的测试函数具有较好的优化性能; 服从均匀分布的 Tent 映射与 Piecewise 映射具有平均最优性能, 其中 Piecewise 映射的优化效果最优。因此本文的 QCPSO 算法采用 Piecewise 映射作为其混沌映射结构。

表 1 各混沌映射函数测试结果

测试函数	映射函数	最优值	最差值	平均值	标准差
Sphere	Logistic	2.520 8e-206	4.845 7e-195	9.691 7e-196	0
	Chebyshev	2.035 5e-045	1.504 4e-037	3.048 0e-038	6.706 3e-038
	ICMIC	3.805 9e-035	3.321 4e-032	1.764 6e-032	1.491 3e-032
	Tent	4.437 2e-217	1.978 4e-211	5.594 8e-212	0
	Simusoidal	5.742 3e-020	1.525 1e-015	5.306 9e-016	6.291 4e-016
	Piecewise	<b>6.793 3e-227</b>	<b>2.887 6e-222</b>	<b>5.954 4e-223</b>	0
	Singer	2.425 1e-089	2.581 6e-081	5.556 6e-082	1.135 4e-081
	Gaussian	6.023 2e-208	2.561 8e-202	8.946 7e-203	0
Rosenbrok	Logistic	0.181 3	3.263 7	0.954 9	1.298 5
	Chebyshev	5.862 8	6.140 6	5.991 9	0.105 6
	ICMIC	6.073 3	6.252 0	6.180 7	0.066 8
	Tent	0.050 6	1.670 0	0.621 8	0.658 2
	Simusoidal	22.581 0	31.590 0	25.481 0	3.557 8
	Piecewise	<b>0.036 9</b>	<b>3.155 3</b>	<b>0.800 8</b>	1.324 9
	Singer	17.392 0	18.036 0	17.791 0	0.263 4
	Gaussian	0.371 4	0.434 9	0.394 6	0.024 7
Griewank	Logistic	<b>0</b>	<b>0.066 4</b>	<b>0.025 2</b>	0.018 2
	Chebyshev	0	0.536 2	0.125 9	0.116 6
	ICMIC	0	0.523 4	0.158 6	0.110 4
	Tent	0	0.073 8	0.024 1	0.018 9
	Simusoidal	0.172 5	1.010 7	0.527 8	0.193 4
	Piecewise	0	0.083 6	0.028 9	0.019 2
	Singer	0.024 6	0.243 6	0.106 9	0.050 7
	Gaussian	0	0.078 7	0.032 6	0.021 3

## 4.2 QCPSO 算法的寻优行为分析

本节主要对 QCPSO 算法在标准测试函数优化过程中粒子的运行轨迹进行分析。混沌映射结构选为 Logistic 映射, 并选择粒子 1 的第一维  $P_{i=1, j=1}$  作为研究对象。粒子  $P_{1,1}$  的每一代位置更新由以  $P_{\text{attractor}}$  为吸引子不动点的 Logistic 混沌映射结构决定。

图 1 为粒子在各测试函数中的全局寻优轨迹与放大后的局部寻优轨迹。由图可看出在所有测试函数中, 粒子  $P_{1,1}$  在迭代初期已经覆盖了目标函数较大的搜索空间, 表明算法的混沌搜索区间设置方法具有较好的通用性。将全局寻优轨迹放大后得到的局部区域寻优

轨迹发现, 粒子的混沌映射轨迹存在跨尺度的自相似性, 且同一种混沌映射在不同测试函数中产生的映射轨迹不同。混沌系统存在统计意义上的内在规律性, 这种规律性是通过大量的统计数据得到的, 而粒子群优化算法的群体性和迭代寻优过程也可以反映一定的寻优规律, 将混沌系统叠加在粒子群优化算法的结果可能是整个系统处于一个相互关联的混沌体系中, 这种特有的性质可以保证粒子对整个搜索空间具有较高的覆盖率。

## 4.3 QCPSO 算法优化分数阶超混沌系统参数

分数阶超混沌 Rössler 系统的模型如下:

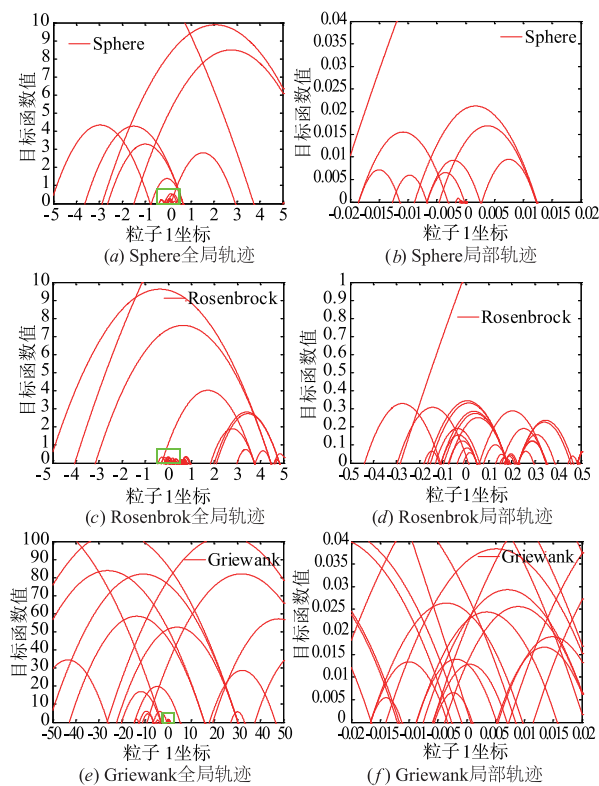


图 1 不同尺度Logistic映射轨迹的自相似性

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} &= -x_2 - x_3, & \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} &= x_1 + ax_2 + x_4 \\ \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} &= b + x_1x_3, & \frac{d^\alpha x_4}{dt^\alpha} &= -cx_3 + dx_4 \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\alpha$  为系统分数阶次,  $a, b, c, d$  为系统参数,  $x_1, x_2, x_3, x_4$  为系统控制变量, 当系统参数  $\alpha = 0.95, a = 0.25, b = 3, c = 0.5, d = 0.05$  时, 初值为  $x_1(0) = -10, x_2(0) = -6, x_3(0) = 0, x_4(0) = 10$ , 该系统是超混沌的.

分数阶超混沌 Chen 系统如下所示:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} &= a(x_2 - x_1) + x_4, & \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} &= dx_1 - x_1x_3 + cx_2 \\ \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} &= x_1x_2 - bx_3, & \frac{d^\alpha x_4}{dt^\alpha} &= x_2x_3 + rx_4 \end{aligned} \quad (18)$$

当分数阶次  $\alpha = 0.95$ , 系统参数  $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7, r = 0.6$  时系统进入超混沌状态. 上述混沌系统采用四阶龙格库塔求解, 步长为 0.01.

为了验证 QCPSO 算法的有效性, 选取自适应人工蜂群算法 (AABC)<sup>[4]</sup>、改进的差分进化算法 (IDE)<sup>[5]</sup> 与改进的量子粒子群优化算法 (QPPSO)<sup>[6]</sup> 进行对比分析. 所有算法的粒子总数设置为 20, 最大迭代数为 200, 选取固定初值的 150 个混沌变量作为目标函数中变量误差的评价指标. 其中, AABC 算法中  $limit = 5$ ; IDE 算法中缩放因子  $F = 0.5$ , 交叉概率因子  $CR = 0.9$ ; QPPSO 算法中的加速度常数  $c_1 = c_2 = 2$ , 惯性权重  $\omega$  由 1 至 0.5 线性递减. QCPSO 算法中混沌映射结构为 Piecewise, 混沌映射序列长度  $m$  设置为 20 递减至 5. 分数阶超混沌 Rössler 系统的各待估计参数上下界设置为:  $0.5 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 10, 0 \leq c \leq 1, 0 \leq d \leq 1$ , 粒子维数为 5. 分数阶超混沌 Chen 系统的各参数上下界设置为:  $0.5 \leq \alpha \leq 1, 20 \leq a \leq 40, 0 \leq b \leq 10, 8 \leq c \leq 15, 0 \leq d \leq 10, 0.5 \leq r \leq 1$ , 对应粒子维数为 6.

各算法在两个混沌系统下各独立运行 20 次得到的最优值、最差值与平均值分别如表 2 和表 3 所示. 从表 2 中可以看出, 对分数阶超混沌 Rössler 系统的参数估计问题中, AABC 算法与 IDE 算法得到相似的结果. QPPSO 算法在估计精度上要优于前两种算法, 其各参数估计的最优结果处于混沌系统参数的真实值附近, 而 QCPSO 算法则找到了混沌系统的参数真实值, 具有更高的估计精度. 由表 3 可以看出, 在对分数阶超混沌 Chen 系统的参数估计问题上: AABC 算法的寻优精度要高于 IDE 算法, QPPSO 算法仅有两参数没有找到真实值, 估计精度优于前两种算法, 但 QCPSO 算法在估计精度要高于 QPPSO 算法, 达到  $10^{-29}$  数量级. 以上结果表明 QCPSO 算法在解决高维优化问题方面优于其他三种算法.

表 2 分数阶超混沌 Rössler 系统参数估计结果

算法	时间 (min)	参数	真实值	最优值	平均值	最差值
AABC	25.866 9	$a$	0.25	0.249 999 990	0.249 999 998	0.250 000 008
		$b$	3	2.999 999 993	3.000 000 057	2.999 999 905
		$c$	0.5	0.500 000 014	0.500 000 042	0.500 000 081
		$d$	0.05	0.050 000 012	0.050 000 131	0.050 000 029
		$\alpha$	0.95	0.949 999 998	0.949 999 996	0.949 999 993
		适应值	-	$3.699 3e - 17$	$3.270 2e - 16$	$3.270 2e - 16$
QPPSO	31.861 4	$a$	0.25	0.249 999 996	0.249 999 993	0.249 999 990

续表

算法	时间(min)	参数	真实值	最优值	平均值	最差值
		<i>b</i>	3	2.999 999 999	2.999 999 993	2.999 999 991
		<i>c</i>	0.5	0.499 999 991	0.499 999 999	0.499 999 999
		<i>d</i>	0.05	0.050 000 000	0.049 999 998	0.049 999 992
		$\alpha$	0.95	0.950 000 000	0.949 999 999	0.949 999 999
		适应值	-	2.965 7e-027	6.064 1e-026	1.559 2e-26
IDE	61.161 5	<i>a</i>	0.25	0.250 000 005	0.250 000 006	0.250 000 008
		<i>b</i>	3	2.999 999 981	3.000 000 009	3.000 000 036
		<i>c</i>	0.5	0.499 999 994	0.499 999 953	0.499 999 911
		<i>d</i>	0.05	0.050 000 001	0.050 000 011	0.050 000 022
		$\alpha$	0.95	0.949 999 997	0.949 999 996	0.949 999 994
		适应值	-	1.248 9e-016	5.636 2e-016	2.313 2e-015
QCPSO	29.924 5	<i>a</i>	0.25	0.250 000 000	0.249 999 999	0.249 999 999
		<i>b</i>	3	3.000 000 000	2.999 999 999	2.999 999 999
		<i>c</i>	0.5	0.500 000 000	0.499 999 999	0.499 999 999
		<i>d</i>	0.05	0.050 000 000	0.049 999 999	0.049 999 999
		$\alpha$	0.95	0.950 000 000	0.950 000 000	0.950 000 000
		适应值	-	<b>8.809 4e-30</b>	<b>1.220 1e-29</b>	<b>1.559 2e-29</b>

表 3 分数阶超混沌 Chen 系统参数估计结果

算法	时间(min)	参数	真实值	最优值	平均值	最差值
AABC	26.642 5	<i>a</i>	35	35.000 000 017	34.999 999 993	34.999 999 898
		<i>b</i>	3	3.000 000 025	3.000 000 042	3.000 000 080
		<i>c</i>	12	12.000 000 003	11.999 999 995	11.999 999 983
		<i>d</i>	7	6.999 999 983	6.999 999 916	6.999 999 970
		<i>r</i>	0.6	0.600 000 002	0.599 999 991	0.599 999 993
		$\alpha$	0.95	0.949 999 998	0.950 000 002	0.950 000 001
		适应值	-	2.239 0e-16	9.755 6e-015	1.146 6e-14
QPPSO	32.236 3	<i>a</i>	35	35.000 000 000	35.000 000 001	34.999 999 999
		<i>b</i>	3	3.000 000 000	2.999 999 999	2.999 999 997
		<i>c</i>	12	12.000 000 000	12.000 000 001	12.000 000 001
		<i>d</i>	7	7.000 000 000	6.999 999 993	7.000 000 001
		<i>r</i>	0.6	0.600 000 001	0.599 999 997	0.599 999 999
		$\alpha$	0.95	0.949 999 997	0.950 000 000	0.949 999 998
		适应值	-	7.053 1e-024	1.000 5e-023	1.627 8e-023
IDE	59.911 1	<i>a</i>	35	34.999 999 920	35.000 000 657	35.000 001 395
		<i>b</i>	3	3.000 000 640	3.000 000 132	2.999 999 623
		<i>c</i>	12	12.000 000 356	12.000 000 718	12.000 001 080
		<i>d</i>	7	7.000 000 481	6.999 998 081	6.999 995 681
		<i>r</i>	0.6	0.599 997 352	0.599 999 864	0.600 002 376
		$\alpha$	0.95	0.950 000 016	0.949 999 749	0.949 999 482

续表

算法	时间 (min)	参数	真实值	最优值	平均值	最差值
		适应值	-	$1.3008e-012$	$3.8629e-012$	$6.4249e-012$
QCPSO	29.7535	$a$	35	35.00000000	35.00000000	35.00000000
		$b$	3	3.00000000	3.00000000	3.00000000
		$c$	12	12.00000000	12.00000000	12.00000000
		$d$	7	7.00000000	6.99999999	6.99999999
		$r$	0.6	0.60000000	0.59999999	0.59999999
		$\alpha$	0.95	0.95000000	0.95000000	0.95000000
		适应值	-	<b><math>3.5911e-029</math></b>	<b><math>3.7282e-029</math></b>	<b><math>3.8654e-029</math></b>

图 2 给出了分数阶超混沌 Rössler 系统和 Chen 系统的目标函数收敛曲线. 从图 2(a) 中可以看出, IDE 算法在迭代前期具有较快的收敛速度, 但从第 30 代开始收敛速度明显低于 AABC 算法; QPPSO 算法的收敛曲线表现出平稳的收敛速度; QCPSO 算法在第 50 次迭代后目标函数的精度达到  $10^{-28}$  的数量级, 相比于其他三种算法, 具有明显的收敛速度优势. 从图 2(b) 中可以看出, AABC 算法、QPPSO 算法与 IDE 算法在前 20 代具有较为接近的收敛速度, 但从 20 代以后, IDE 算法的收敛速度开始变慢, 算法的精确度低于 AABC 算法与 QPPSO 算法. QCPSO 算法在前 60 代收收敛速度明显快于其他算法, 最优的估计精度达到  $10^{-29}$  数量级, 上述实验表明本文提出的 QCPSO 算法可以对分数阶超混沌系统参数进行有效的估计, 算法具有良好的通用性和稳定性.

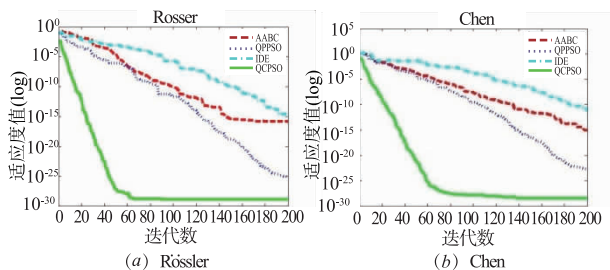


图 2 各算法在分数阶超混沌系统中的收敛曲线

#### 4.4 QCPSO 算法的复杂度分析

PSO 算法的时间复杂度为  $T(N) = O(NDT)$ , 其中  $N$  为粒子数,  $D$  为维数,  $T$  为最大迭代次数. 尽管 QPSO 算法的迭代公式发生变化, 但并没有增加算法的时间复杂度. 本文提出的 QCPSO 算法在 QPSO 算法的基础上加入了混沌搜索策略, 因此 QCPSO 算法的时间复杂度为  $T(N) = O(NDT) + O(m)$ , 其中  $m$  为混沌序列最大值. 从表 2 和表 3 的各算法运行时间可以看出, QCPSO 算法的附加策略与 QPPSO 算法基本保持在一个数量级. 因此本文提出的 QCPSO 算法在没有增加算法时间复杂度的情况下, 加快了收敛速度并提升了了解的

精度.

## 5 结论

本文提出一种以混沌吸引子围绕的不动点为势阱中心的 QCPSO 算法. 算法的尺度自适应策略不仅使粒子在迭代初期具有较高的目标区间覆盖率, 而且使粒子与不动点之间的初始距离具有一定的随机性, 进而充分利用混沌系统的初值敏感特性保证粒子的种群多样性. 混沌吸引子内部的粒子的相互排斥的特性使得粒子在陷入局部最优解后有一定的跳出机制. 通过对分数阶超混沌 Rössler 系统与分数阶超混沌 Chen 系统的参数估计进行仿真实验, 结果表明本文提出的 QCPSO 算法具有良好的通用性与较高的鲁棒性.

## 参考文献

- [1] Lorenz E N. Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogues[J]. Journal of Atmospheric Sciences, 1969, 26(1969): 636-646.
- [2] Lassoued A, Boubaker O. On new chaotic and hyperchaotic systems; A literature survey[J]. Nonlinear Analysis Modelling and Control, 2017, 21(6): 770-789.
- [3] Wu X, Lu Y. Generalized projective synchronization of the fractional-order Chen hyperchaotic system[J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 57(1-2): 25-35.
- [4] 任开军, 邓科峰, 刘少伟, 等. 自适应人工蜂群优化的混沌系统参数估计[J]. 国防科技大学学报, 2015, 37(5): 135-140.  
Ren Kaijun, Deng Kefeng, Liu Shaowei, et al. Adaptive artificial bee colony optimization for parameter estimation of chaotic systems[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2015, 37(5): 135-140. (in Chinese)
- [5] 何廷年, 李晓红, 蒋芸. 改进多种群差分进化算法的混沌系统参数估计[J]. 计算机工程, 2015, 41(2): 178-183.  
He Tingnian, Li Xiaohong, Jiang Yun. Chaotic System parameter estimation of improved multi-swarm differential evolution algorithm[J]. Computer Engineering, 2015, 41

- (2):178-183. (in Chinese)
- [6] 黄宇,刘玉峰,彭志敏,等. 基于量子并行粒子群优化算法的分数阶混沌系统参数估计[J]. 物理学报,2015,64(3):228-235.  
Huang Yu, Liu Yufeng, Peng Zhimin, et al. Research on particle swarm optimization algorithm with characteristic of quantum of quantum parallel and its application in parameter estimation for fractional-order chaotic systems[J]. Acta Phys Sin,2015,64(3):228-235. (in Chinese)
- [7] Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization[A]. Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks [C]. Piscataway: IEEE Press, 1995. 1942-1948.
- [8] 李祚泳,汪嘉杨,郭淳. PSO 算法优化 BP 网络的新方法及仿真实验[J]. 电子学报,2008,36(11):2224-2228.  
Li Zuoyong, Wang Jiayang, Guo Chun. A new method of BP network optimized based on particle swarm optimization and simulation test[J]. Acta Electronica Sinica,2008,36(11):2224-2228. (in Chinese)
- [9] Wang J, Hong P, Min T U, et al. A fault diagnosis method of power systems based on an improved adaptive fuzzy spiking neural P systems and PSO algorithms [J]. Chinese Journal of Electronics,2016,25(2):320-327.
- [10] 李奕,吴小俊. 粒子群进化学习自适应双通道脉冲耦合神经网络图像融合方法研究[J]. 电子学报,2014,42(2):217-222.  
Li Yi, Wu Xiaojun. A novel image fusion method using self-adaptive dual-channel pulse coupled neural networks based on PSO evolutionary learning[J]. Acta Electronica Sinica,2014,42(2):217-222. (in Chinese)
- [11] Frans V D B. An analysis of particle swarm optimizers [D]. Pretoria: University of Pretoria,2002.
- [12] Sun J, Feng B, Xu W. Particle swarm optimization with particles having quantum behavior [A]. Processing of IEEE Congress on Evolutionary Computation [C]. USA: IEEE Press,2004. 325-331.
- [13] Xi Maolong, Sun J, Xu W B. An improved quantum-behaved particle swarm optimization algorithm with weighted mean best position [J]. Applied Mathematics and Computation,2008,205(2):751-759.
- [14] 赵吉,傅毅,梅娟. 基于演化历史信息的自变异协同量子行为粒子群优化算法[J]. 电子学报,2016,44(12):2900-2907.  
Zhao Ji, Fu Yi, Mei Juan. An Improved cooperative QPSO algorithm with adaptive mutation based on entire search history[J]. Acta Electronica Sinica,2016,44(12):2900-2907. (in Chinese)
- [15] Yuan X, Zhang T, Xiang Y, et al. Parallel chaos optimization algorithm with migration and merging operation[J]. Applied Soft Computing,2015,35(C):591-604.

#### 作者简介



闫涛 男,1987 年生于山西定襄. 山西大学计算机与信息技术学院讲师. 研究方向为群体智能、机器视觉与图像处理.  
E-mail: hongyanyutian@126.com



刘凤娴 女,1987 年生于山西广灵. 中国科学院广州地球化学研究所博士研究生. 研究方向为大气环境化学.