

基于高阶马尔可夫随机场及 非线性压缩感知的相位恢复算法

练秋生, 宋 爽, 陈书贞, 石保顺
(燕山大学信息科学与工程学院, 河北秦皇岛 066004)

摘 要: 在编码衍射成像系统中, 为精确重构复图像的幅值和相位, 需获取大量的编码衍射图样, 导致数据采集时间长. 为减少编码衍射图样的数量, 本文基于非线性压缩感知理论框架, 利用高阶马尔可夫随机场统计先验模型, 提出了一种鲁棒相位恢复算法. 该方法将复图像的幅值和相位分别进行正则化, 并将数据保真项与幅值和相位正则项结合作为代价函数, 采用 Heavy-Ball 算法求解所对应的非凸优化问题. 实验结果表明, 本文算法在编码衍射图样较少的情况下仍能获得较高的图像重构质量, 且对噪声鲁棒.

关键词: 非线性压缩感知; 相位恢复; 高阶马尔可夫随机场; 编码衍射图样

中图分类号: TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)09-2210-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.09.023

A Phase Retrieval Algorithm Based on Higher-Order Markov Random Fields and Nonlinear Compressed Sensing

LIAN Qiu-sheng, SONG Shuang, CHEN Shu-zhen, SHI Bao-shun
(School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

Abstract: To enable perfect reconstruction of the magnitude and phase of the complex images in the coded diffraction imaging system, many coded diffraction patterns are required, which leads to time consuming of the sampling process. To reduce the number of coded diffraction patterns, a robust phase retrieval algorithm which exploits the statistical characteristic of the higher-order Markov random fields is proposed based on the nonlinear compressed sensing framework. The presented method regularizes the magnitude and phase separately, and combines the data fidelity term with the regularization terms of the magnitude and phase to formulate the cost function. Moreover, the heavy-ball algorithm is utilized for solving the corresponding non-convex optimization problem. Experimental results show that the proposed method can achieve high image quality with fewer coded diffraction patterns, and is robust to noise.

Key words: nonlinear compressed sensing; phase retrieval; higher-order Markov random fields; coded diffraction pattern

1 引言

相位恢复 (Phase Retrieval, PR) 问题是指仅利用信号傅立叶变换或其它线性变换的幅值恢复原始信号, 它广泛应用于光学^[1,2]、医学图像处理^[3]、衍射成像^[4]、X 射线晶体学^[2] 等领域. 由于相位的全局相位差、空间移位、共轭转置^[5] 会导致同一个傅里叶变换幅值对应许多不同的信号, 因而 PR 问题是病态问题. 为了有效地解决该病态问题, 现有的 PR 算法常常利用先验知识

以保证信号精确重构. PR 算法最早可追溯到文献[6]提出的 GS (Gerchberg-Saxton) 算法, 该算法将光波在物面和相面上交替投影, 并在两个面上分别施加幅值约束. Fienup 在 GS 算法的基础上加入支撑先验, 提出了混合输入输出 (Hybrid Input-Output, HIO) 算法^[7]. 随后, 人们提出了一系列改进算法, 如差异映射 (Difference Map, DM) 算法^[8] 以及松弛平均交替反射 (Relaxed Averaged Alternating Reflection, RAAR) 算法^[9] 等.

近年来, 压缩感知 (Compressed Sensing, CS)^[10,11] 成

为研究热点.受 CS 理论的启发,学者们将稀疏性引入到相位恢复问题中,提出了利用信号本身的稀疏性^[12]或信号在变换域^[13]、梯度域^[14]下的稀疏性进行相位恢复的算法.如 Moravec 等人提出的压缩相位恢复(Compressive Phase Retrieval, CPR)算法^[15],该算法利用原始信号的 l_1 范数以及支撑先验,寻求满足幅值约束的最优解. Shechtman 等人提出的 GESPAR (Greedy Sparse Phase Retrieval) 算法^[16],该算法利用快速局部搜索算法更新支撑信息,并利用阻尼高斯-牛顿算法最小化误差函数. Schniter 等人利用广义近似信息传递(Generalized Approximate Message Passing, GAMP)求解稀疏信号相位恢复问题^[17].文献[13]将信号在剪切波变换下的稀疏先验引入到 RAAR 算法中,并证明了该算法的有效性.文献[14]利用信号在梯度域下的稀疏先验,有效地提高了相位恢复质量.

编码衍射成像系统^[18]不需要信号的支撑信息且实验装置简单,易于实现.为解决编码衍射成像系统中的相位恢复问题,Candes 等人提出了 Wirtinger Flow (WF) 算法^[19],该算法的初始值采用谱方法,并利用梯度下降法迭代更新.为了提高算法对噪声的鲁棒性,Chen 等人提出了 Truncated Wirtinger Flow (TWF) 算法^[20],该算法的初始值采用截断谱方法,并利用截断阈值处理的梯度下降法迭代更新.文献[21]提出了 Block Kaczmarz 算法^[21],该算法每次迭代时选取观测矩阵的某一块,并将更新结果进行投影. WF 算法、TWF 算法、Block Kaczmarz 算法的迭代过程简单,但精确重构图像时所需的编码衍射图样(Coded Diffraction Pattern, CDP)较多.为了利用较少的 CDP 实现图像的重构,本文将高阶马尔可夫随机场(Markov Random Fields, MRF),也称专家场(Fields of Experts, FoE)模型^[22]的统计特性作为先验知识,提出基于 FoE 正则化的相位恢复(Phase Retrieval based on Fields of Experts regularization, FoEPR)算法.

2 非线性压缩感知

CS 理论利用稀疏先验从测量值中恢复原始信号.在线性压缩感知框架下,重构信号 \mathbf{x} 的问题可描述为:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} R(\mathbf{x}) \text{ s. t. } \|\Phi \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \leq \varepsilon \quad (1)$$

其中 $R(\mathbf{x})$ 蕴含着信号的先验知识. Φ 为观测矩阵, \mathbf{b} 为测量值. ε 为与噪声有关的参数.根据拉格朗日乘子法将式(1)转化为无约束优化问题:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{b}, \Phi \mathbf{x}) + \lambda R(\mathbf{x})\} \quad (2)$$

其中 $F(\mathbf{b}, \Phi \mathbf{x})$ 为数据保真项, $R(\mathbf{x})$ 为正则项, $\lambda > 0$ 为正则化参数.

在线性观测系统下,测量值是原始信号的线性变换.但在衍射成像中,仅能得到原始信号的非线性采样值,如 CCD 相机仅记录信号傅里叶变换的幅值.在非线

性压缩感知框架下^[23~25],优化问题(2)变成:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{F[\mathbf{b}, \Phi(\mathbf{x})] + \lambda R(\mathbf{x})\} \quad (3)$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 表示非线性采样算子.

PR 问题是非线性压缩感知问题的一个特例.在编码衍射成像中,测量值(即 CDP)是原始信号经随机掩膜调制后傅里叶变换的幅值,其采样算子为:

$$\Phi(\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}| \quad (4)$$

其中 $\mathbf{A} = (\Psi \mathbf{M}_1, \Psi \mathbf{M}_2, \dots, \Psi \mathbf{M}_t)^T$. Ψ 为傅里叶变换矩阵, \mathbf{M}_i 为第 i 个随机掩膜, t 为随机掩膜(或 CDP)的数量.

根据式(3)和式(4),在编码衍射成像中相位恢复问题可表示为:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{b}, |\mathbf{A}\mathbf{x}|) + \lambda R(\mathbf{x})\} \quad (5)$$

3 基于 FoE 模型及非线性压缩感知的相位恢复算法

3.1 FoE 模型

自然图像通常具有多个方向的边缘和纹理特征,而低阶 MRF 仅利用四邻域或八邻域的相关信息,无法捕捉图像大尺度的结构信息,因此 Roth 等人提出了 FoE 模型^[22].该模型利用一组线性滤波器(如图 1 所示)描述自然图像的结构信息^[26].由于图像的线性滤波响应通常十分陡峭,因而可利用 student- t 分布刻画滤波响应的概率分布^[27].在 FoE 模型下对应的正则项可表示为^[28]:

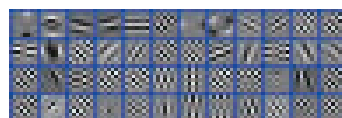


图1 FoE模型中的滤波器组

$$\varphi_{\text{FoE}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_f} \theta_i \rho(\mathbf{k}_i * \mathbf{x}) \quad (6)$$

其中 N_f 表示滤波器的个数, \mathbf{k}_i 表示第 i 个滤波器, $\theta_i > 0$ 表示第 i 个滤波器的权重, $*$ 表示卷积. 函数 $\rho(\mathbf{k}_i * \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^N \rho[(\mathbf{k}_i * \mathbf{x})_m]$, 其中 $\rho(u) = \log(1 + u^2)$, N 表示 \mathbf{x} 中像素的总个数.

3.2 Heavy-Ball 算法

目前求解非凸优化问题的算法主要有交替方向乘子法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)^[29]、Ipiano 算法^[30]、Heavy-Ball 算法(HBM)^[31]等. HBM 算法在梯度下降法的基础上加入惯性项,具有迭代过程简单,收敛性优于梯度下降法等优点^[31],因此本文采用 HBM 算法求解式(5)的非凸优化问题.

对于无约束优化问题: $\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$, 采用 HBM 算法求解该问题的过程为:

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^{n-1} - \alpha^{n-1} \nabla f(\mathbf{x}^{n-1}) + \beta(\mathbf{x}^{n-1} - \mathbf{x}^{n-2}) \quad (7)$$

其中 $\alpha^{n-1} > 0$ 为第 $n-1$ 次迭代的步长,且满足 $\alpha^{n-1} < 2(1-\beta)/L^{n-1}$ (L^{n-1} 是 $\nabla f(\mathbf{x}^{n-1})$ 的 Lipschitz 常数), $\mathbf{x}^{n-1} - \mathbf{x}^{n-2}$ 表示惯性项, $\beta > 0$ 为惯性项的权重.

3.3 基于 FoE 正则化的相位恢复算法

在编码衍射成像中,本文采用将复图像的幅值与相位分别进行 FoE 正则化的方法. 根据式(5)和式(6)可将复图像的相位恢复问题表示为:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{ F(\mathbf{b}, |\mathbf{Ax}|) + \lambda_1 \varphi_{\text{FoE}}(|\mathbf{x}|) + \lambda_2 \varphi_{\text{FoE}}(\angle \mathbf{x}) \} \quad (8)$$

其中 $|\mathbf{x}|$ 表示 \mathbf{x} 的幅值, $\angle \mathbf{x}$ 表示 \mathbf{x} 的相位. 根据贝叶斯-最大后验概率理论,当测量值中含有高斯噪声时, $F(\mathbf{b}, |\mathbf{Ax}|) = \|\mathbf{b} - |\mathbf{Ax}|\|_2^2$, 该 l_2 范数数据保真项保证对高斯噪声鲁棒. 当测量值中含有泊松噪声时, $F(\mathbf{b}, |\mathbf{Ax}|) = \mathbf{1}^T (\gamma |\mathbf{Ax}|^2) - (\mathbf{b}^2)^T \log(\gamma |\mathbf{Ax}|^2)$ ($\mathbf{1}$ 是全 1 列向量, γ 是与自由电子激光器的散射角度相关^[32] 的参数), 该数据保真项保证对泊松噪声鲁棒. $\varphi_{\text{FoE}}(|\mathbf{x}|)$ 、 $\varphi_{\text{FoE}}(\angle \mathbf{x})$ 分别为幅值和相位的正则项. $\lambda_1 > 0$ 、 $\lambda_2 > 0$ 为对应的正则化参数.

式(8)的优化问题可采用 HBM 算法求解, 当第 k 次迭代时:

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} - \alpha^{k-1} \nabla f(\mathbf{x}^{k-1}) + \beta(\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^{k-2}) \quad (9)$$

其中 α^{k-1} 采用回溯法^[30]更新. 式(8)中 $f(\mathbf{x})$ 对 \mathbf{x} 求导可得:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{b}, |\mathbf{Ax}|) + \lambda_1 \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_{\text{FoE}}(|\mathbf{x}|) \\ &\quad + \lambda_2 \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_{\text{FoE}}(\angle \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (10)$$

当 $F(\mathbf{b}, |\mathbf{Ax}|) = \|\mathbf{b} - |\mathbf{Ax}|\|_2^2$ 时, 对 \mathbf{x} 求偏导得: $\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{b}, |\mathbf{Ax}|) = 2\mathbf{A}^H [|\mathbf{Ax}| - \mathbf{b}] \odot (\mathbf{Ax}/|\mathbf{Ax}|)$; 当 $F(\mathbf{b}, |\mathbf{Ax}|) = \mathbf{1}^T (\gamma |\mathbf{Ax}|^2) - (\mathbf{b}^2)^T \log(\gamma |\mathbf{Ax}|^2)$ 时, 则 $\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{b}, |\mathbf{Ax}|) = 2\mathbf{A}^H [((\gamma |\mathbf{Ax}|^2 - \mathbf{b}^2)/|\mathbf{Ax}|^2) \odot (\mathbf{Ax})]$. 其中 \odot 表示逐元素相乘.

式(8)中 $\varphi_{\text{FoE}}(|\mathbf{x}|)$ 、 $\varphi_{\text{FoE}}(\angle \mathbf{x})$ 分别关于 \mathbf{x} 求偏导可得: $\nabla_{\mathbf{x}} \varphi_{\text{FoE}}(|\mathbf{x}|) = \sum_{i=1}^{N_j} \theta_i \mathbf{K}_i^T \rho'(\mathbf{K}_i |\mathbf{x}|) \odot (\mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$ 、 $\nabla_{\mathbf{x}} \varphi_{\text{FoE}}(\angle \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_j} \theta_i \mathbf{K}_i^T \rho'(\mathbf{K}_i \angle \mathbf{x}) \odot (j\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^2)$. 其中 \mathbf{K}_i 是 \mathbf{k}_i 对应的 Toeplitz 矩阵, 即 $\mathbf{K}_i \mathbf{x} = \mathbf{k}_i * \mathbf{x}$.

综上, 本文提出的基于 FoE 正则化的相位恢复 (FoEPR) 算法的步骤如算法 1:

算法 1 FoEPR 算法

输入: 原始图像经随机掩膜调制后傅立叶变换的幅值 \mathbf{b}

初始化: \mathbf{x}^0 为随机初始值, $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0$, $\alpha^0, \beta, \lambda_1, \lambda_2$

for $k = 1$: iter

(1) 根据式(10)计算 $\nabla f(\mathbf{x}^{k-1})$;

(2) if $k > 1$

```

if  $\alpha^{k-1} > \frac{\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^{k-2}\|}{\|\nabla f(\mathbf{x}^{k-1}) - \nabla f(\mathbf{x}^{k-2})\|}$ 
 $\alpha^{k-1} = 0.99 \times \frac{\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^{k-2}\|}{\|\nabla f(\mathbf{x}^{k-1}) - \nabla f(\mathbf{x}^{k-2})\|}$ 
end
end
(3) 根据式(9)更新  $\mathbf{x}^k$ ;
(4)  $\alpha^k = 1.05 \times \alpha^{k-1}$ ;
if  $\frac{\|\|\mathbf{Ax}^k - \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} < 10^{-4}$ 
break
end
end

```

输出: 重构图像 \mathbf{x}^k .

4 实验结果

本文选用 512×512 的标准灰度图像 Lena、Peppers、Fruit 测试算法性能. 对比算法包括 WF 算法^[19]、TWF 算法^[20] (WF、TWF 代码见 <http://web.stanford.edu/~yxchen/TWF/code.html>) 和 Block Kaczmarz 算法^[21] (块大小与随机掩膜的大小一致), 所有算法均利用四元随机掩膜^[20]进行调制, 并选取相对误差 (Relative Error)^[19] 衡量重构性能. WF、TWF 算法的初始值采用截断谱方法^[20], Block Kaczmarz 算法的初始值采用谱方法^[19], FoEPR 算法采用随机初始值. 各算法达到最大迭代次数或相对残差 (Relative Residual, res) 小于 10^{-4} 时, 算法终止. 其中相对残差定义为: $\text{res} = \|\|\mathbf{Ax}^k - \mathbf{b}\|_2 / \|\mathbf{b}\|_2$.

4.1 实图像相位恢复

在实图像相位恢复时, 各算法的最大迭代次数为 300 次. 式(8)中选取 l_2 范数数据保真项, 通过大量实验, FoEPR 算法的参数取值为: $\alpha^0 = 0.1$, $\beta = 0.8$, $\lambda_1 = 0.0015$. 当随机掩膜的数量为 1 时, 图 2 给出了 FoEPR 算法第 20 次、第 50 次迭代时重构的图像.



(a) 第20次

(b) 第50次

图2 FoEPR算法迭代过程中重构的实图像

由图 2 可以看出, FoEPR 算法在第 20 次迭代时已重构出图像的轮廓, 迭代到第 50 次时能较好地重构图像. 为减少算法运行时间, FoEPR 算法迭代 50 次之后将式(8)中的 λ_1 置 0. 在无噪声的情况下, 表 2 列出了重构

不同的实图像时,各算法在不同数量的随机掩膜下独立运行 10 次的平均相对误差.

表 2 各算法重构实图像的平均相对误差

| 随机掩膜的数量 | 算法 | Lena | Peppers | Fruits |
|---------|----------|----------|----------------|-----------------|
| $t = 4$ | WF | TWF | Block Kaczmarz | FoEPR |
| | 1.98E-04 | 2.01E-04 | 1.57E-04 | 1.45E-04 |
| | 2.04E-04 | 1.90E-04 | 1.25E-04 | 1.57E-04 |
| | 2.27E-04 | 2.00E-04 | 1.14E-04 | 1.45E-04 |
| $t = 3$ | WF | TWF | Block Kaczmarz | FoEPR |
| | 2.50E-04 | 2.15E-04 | 1.67E-04 | 1.75E-04 |
| | 2.48E-04 | 2.21E-04 | 1.61E-04 | 1.88E-04 |
| | 2.53E-04 | 2.15E-04 | 1.63E-04 | 1.51E-04 |
| $t = 2$ | WF | TWF | Block Kaczmarz | FoEPR |
| | 1.20 | 1.55 | 1.33 | 2.24E-04 |
| | 1.20 | 1.60 | 1.36 | 2.29E-04 |
| $t = 1$ | WF | TWF | Block Kaczmarz | FoEPR |
| | 1.39 | 1.90 | 1.40 | 9.00E-03 |
| | 1.39 | 1.90 | 1.41 | 8.70E-03 |
| | 1.39 | 1.90 | 1.41 | 7.80E-03 |

由表 2 可以看出,当随机掩膜的数量大于 2 时,四种算法重构图像的平均相对误差相差较小,但当随机掩膜的数量小于等于 2 时,FoEPR 算法重构图像的平均相对误差远小于另外三种算法的重构结果.为了更直观地比较各算法的性能,以 Lena 为例,图 3、图 4 分别显示了各算法利用 3 个随机掩膜、1 个随机掩膜重构的实图像.

从图 3 可以看出,当随机掩膜的数量为 3 时,各算法重构图像的轮廓信息和细节信息均十分清晰.从图 4 可知,当随机掩膜的数量为 1 时,FoEPR 算法重构图像的纹理信息仍十分清晰,而 WF 算法不能重构图像.TWF 算法、Block Kaczmarz 算法重构的图像与图 4(a)类似.实验结果表明,当随机掩膜的数量较少时,FoEPR 算法明显优于另外三种算法.

4.2 复图像相位恢复

本文选取 Lena-Peppers、Peppers-Lena 和 Lena-Fruits 三幅复图像进行相位恢复.复图像 Lena-Peppers 是将 Lena 作为幅值,Peppers 作为相位.其中幅值的取值范围为 $[0, 1]$,相位的取值范围为 $[0, \pi]$.各算法的最大迭代次数为 500 次.若重构复图像的相对误差小于 10^{-3} ,则视为复图像精确重构.

在无噪声的情况下,式(8)中选取 l_2 范数数据保真项,通过大量实验,FoEPR 算法的参数为: $\alpha^0 = 0.114, \beta$



图 3 3 个随机掩膜时各算法的重构图像

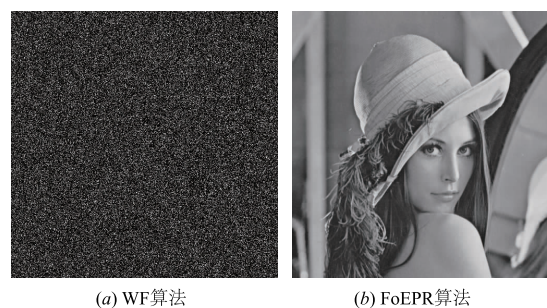


图 4 1 个随机掩膜时算法的重构图像

$= 0.902, \lambda_1 = 0.0026, \lambda_2 = 0.0003$.以利用 2 个随机掩膜重构 Lena-Peppers 为例,图 5 给出了 FoEPR 算法第 20 次、第 100 次迭代时重构的局部放大图像.由图 5 可以看出,FoEPR 算法第 20 次迭代时大致重构出图像的边缘信息,迭代到第 100 次时重构图像的细节信息较好.为减少算法运行时间,FoEPR 算法重构复图像时迭代 100 次之后将式(8)中 λ_1, λ_2 置 0.

当随机掩膜的数量大于 2 时,表 3 列出了重构不同的复图像时,各算法在不同数量的随机掩膜下独立运行 10 次的平均相对误差.由表 3 可以看出,当随机掩膜的数量大于 4 时,各算法均能精确重构复图像.但当随机掩膜的数量小于等于 4 时,FoEPR 算法能百分之百地精确重构复图像,另外三种算法不能重构复图像.

为了进一步体现 FoEPR 算法的优越性,图 6 显示了 FoEPR 算法利用 2 个随机掩膜和 1 个随机掩膜重构的复图像.由图 6 可以直观地看出,当随机掩膜的数量为 2 时,FoEPR 算法重构复图像的质量较高.当随机掩膜的数量为 1 时,FoEPR 算法重构的图像虽然丢失了部分纹理信息,但重构图像的总质量较好.而 WF、

TWF、Block Kaczmarz 算法重构的图像均为随机值. 因此本文利用 FoE 先验模型能更精确地表示图像复杂的结

构信息, 当随机掩膜的数量较少时, 提高了重构图像的质量, 有效地减少了测量数据以及测量数据的时间.



图5 FoEPR算法迭代过程中重构的局部放大图像 (左侧为幅值, 右侧为相位)

表3 无噪时各算法重构复图像的平均相对误差

| 随机掩膜的数量 | 算法 | Lena-Peppers | | Peppers-Lena | | Lena-Fruits | |
|---------|----------------|--------------|-----------------|--------------|-----------------|-------------|-----------------|
| | | 精确重构的次数 | 平均相对误差 | 精确重构的次数 | 平均相对误差 | 精确重构的次数 | 平均相对误差 |
| $t = 6$ | WF | 10 | 2.54E-04 | 10 | 2.59E-04 | 10 | 2.42E-04 |
| | TWF | 10 | 2.31E-04 | 10 | 2.33E-04 | 10 | 2.17E-04 |
| | Block Kaczmarz | 10 | 2.37E-05 | 10 | 1.36E-05 | 10 | 3.36E-05 |
| | FoEPR | 10 | 1.63E-04 | 10 | 1.62E-04 | 10 | 1.60E-04 |
| $t = 5$ | WF | 10 | 2.81E-04 | 10 | 2.85E-04 | 10 | 2.85E-04 |
| | TWF | 10 | 2.47E-04 | 10 | 2.45E-04 | 10 | 2.40E-04 |
| | Block Kaczmarz | 10 | 4.16E-05 | 10 | 3.94E-05 | 10 | 4.08E-05 |
| | FoEPR | 10 | 1.70E-04 | 10 | 1.73E-04 | 10 | 1.68E-04 |
| $t = 4$ | WF | 0 | --- | 0 | --- | 0 | --- |
| | TWF | 0 | --- | 0 | --- | 0 | --- |
| | Block Kaczmarz | 0 | --- | 0 | --- | 0 | --- |
| | FoEPR | 10 | 1.88E-04 | 10 | 2.01E-04 | 10 | 1.82E-04 |
| $t = 3$ | WF | 0 | --- | 0 | --- | 0 | --- |
| | TWF | 0 | --- | 0 | --- | 0 | --- |
| | Block Kaczmarz | 0 | --- | 0 | --- | 0 | --- |
| | FoEPR | 10 | 2.37E-04 | 10 | 2.85E-04 | 10 | 2.23E-04 |

注: “---”表示图像未精确重构.



图6 FoEPR算法重构的复图像 (左侧为幅值, 右侧为相位)

在实际进行相位恢复时, 测量值会不可避免地受到噪声的干扰. 当随机掩膜的数量为 5 时, 本文在 Lena-Peppers 上加入泊松噪声进行实验, 并选取信噪比 (Sig-

nal Noise Ratio, SNR) 衡量噪声强度. FoEPR 算法的参数为: $\alpha^0 = 0.15, \beta = 0.75, \lambda_1 = 10^{-6}, \lambda_2 = 10^{-7}$. 以 $\gamma = 10^{-4}$ (SNR = 13.65) 为例, 图 7 显示了各算法重构的局部放

大图像. 由图 7 可以直观地看出, WF、TWF、Block Kaczmarz 算法重构图像的噪声非常明显. FoEPR 算法利用

FoE 先验模型有效地降低了测量噪声的影响, 重构图像的效果明显优于另外三种算法.



图 7 加入泊松噪声时各算法重构的局部放大图像 (左侧为幅值, 右侧为相位)

4.3 算法的复杂度

为了比较各算法的运行时间, 本文在 Inter Core i5-4590 CPU, 主频 3.30GHz, 内存 4GB, Matlab R2014a 的实验平台下进行实验. 以 Lena-Peppers 为例, 在无噪声的情况下, 表 4 列出了各算法在 5 个随机掩膜下独立运行 10 次的平均运行时间.

表 4 无噪时各算法的平均运行时间

| 算法 | WF 算法 | TWF 算法 | Block Kaczmarz 算法 | FoEPR 算法 |
|-----------|-------|--------|-------------------|----------|
| 平均运行时间(s) | 68.83 | 168.89 | 38.39 | 208.96 |

由表 4 可以看出, WF、Block Kaczmarz 算法用时最少, FoEPR 算法用时最多. WF 和 Block Kaczmarz 算法的迭代过程简单, 耗时较少. TWF 算法在 WF 算法的基础上加入了截断阈值, 耗时增长. FoEPR 算法利用 FoE 模型中的滤波器组, 算法的复杂度较高, 耗时较长. 虽然 FoEPR 算法的平均运行时间较长, 但在更少的随机掩膜下保证了重构图像的质量, 有效地减少了数据采集时间.

5 结论

在非线性压缩感知框架下, 本文将 FoE 模型的统计特性作为先验知识, 提出了将复图像的幅值和相位分别进行 FoE 正则化的相位恢复算法. 该算法融合数据保真项与幅值和相位正则项用于构造相位恢复最小化问题, 并采用 HBM 算法有效地求解了所对应的非凸

优化问题. 实验结果表明, 在编码衍射成像系统中, 当 CDP 的数量较少时, 本文提出的 FoEPR 算法明显优于 WF 算法、TWF 算法以及 Block Kaczmarz 算法, 有效地减少了测量数据以及测量数据的时间, 且对噪声具有更强的鲁棒性.

参考文献

- [1] Shechtman Y, Eldar Y C, et al. Phase retrieval with application to optical imaging [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2015, 32(3): 88–109.
- [2] Millane R. Phase retrieval in crystallography and optics [J]. Journal of the Optical Society of America, 1990, 7(3): 394–411.
- [3] Akcakaya M, Tarokh V. Sparse signal recovery from a mixture of linear and magnitude-only measurements [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(9): 1220–1223.
- [4] Bunk O, Diaz A, Pfeiffer F, et al. Diffractive imaging for periodic samples: retrieving one-dimensional concentration profiles across microfluidic channels [J]. Acta Crystallographica Section, 2007, 63(4): 306–314.
- [5] Yang Z, Zhang C, Xie L. Robust compressive phase retrieval via L1 minimization with application to image reconstruction [A]. IEEE International Conference on Image Processing [C]. Melbourne, Australia: ICIP, 2013. 1–5.
- [6] Gerchberg R, Saxon W. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures [J]. International Journal for Light and Electron Optics,

- 1972,35(2): 237 – 250.
- [7] Fienup J R. Phase retrieval algorithms: a comparison[J]. *Applied Optics*,1982,21(15): 2758 – 2769.
- [8] Elser V. Phase retrieval by iterated projections[J]. *Journal of the Optical Society of America A-Optics Image Science and Vision*,2003,20(1): 40 – 55.
- [9] Luke D. Relaxed averaged alternating reflections for diffraction imaging[J]. *Inverse Problems*,2005,21(1): 37 – 50.
- [10] Donoho D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*,2006,52(4): 1289 – 1306.
- [11] 石光明,刘丹华,高大化,刘哲,林杰,王良君. 压缩感知理论及其研究进展[J]. *电子学报*,2009,37(5): 1070 – 1081.
Shi Guang-ming, Liu Dan-hua, Gao Da-hua, Liu Zhe, Lin Jie, Wang Liang-jun. Advances in theory and application of compressed sensing[J]. *Acta Electronica Sinica*,2009,37(5): 1071 – 1081. (in Chinese)
- [12] Eldar Y C, Sidorenko P, Mixon D G, et al. Sparse phase retrieval from short-time Fourier measurements[J]. *IEEE Signal Processing Letters*,2015,22(5): 638 – 642.
- [13] Looock S, Plonka G. Phase retrieval for Fresnel measurements using a shearlet sparsity constraint [J]. *Inverse Problems*,2014,30(5): 1 – 13.
- [14] Kostenko A, Batenburg K J, Suhonen H, et al. Phase retrieval in in-line x-ray phase contrast imaging based on total variation minimization [J]. *Optics Express*, 2013, 21(1): 710 – 723.
- [15] Moravec M, Romberg J, Baraniuk R. Compressive phase retrieval[A]. *Proceedings of the International Society of Optics and Photonics*[C]. San Diego: CA,2007. 1 – 11.
- [16] Shechtman Y, Beck A, Eldar Y C. GESPAR: efficient phase retrieval of sparse signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*,2014,62(4): 928 – 938.
- [17] Schniter P, Rangan S. Compressive phase retrieval via generalized approximate message passing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(4): 1043 – 1055.
- [18] Candes E J, Li X, Soltanolkotabi M. Phase retrieval from coded diffraction patterns[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*,2015,39(2): 277 – 299.
- [19] Candes E J, Li X, Soltanolkotabi M. Phase retrieval via wirtinger flow: theory and algorithms[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(4): 1985 – 2007.
- [20] Chen Y, Candes E J. Solving random quadratic systems of equations is nearly as easy as solving linear systems[A]. *Advances in Neural Information Processing Systems*[C]. Canada: NIPS,2015. 739 – 747.
- [21] Wei K. Phase retrieval via kaczmarz methods[EB/OL]. <http://arxiv.org/abs/1502.01822v2>, 2015-08-30/2016-06-15.
- [22] Roth S, Black M J. Fields of experts [J]. *International Journal of Computer Vision*,2009,82(2): 205 – 229.
- [23] Blumensath T. Compressed sensing with nonlinear observations and related nonlinear optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*,2013,59(6): 3466 – 3474.
- [24] Beck A, Eldar Y C. Sparsity constrained nonlinear optimization: optimality conditions and algorithms[J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2013, 23(3): 1480 – 1509.
- [25] Strohmer T. Measure what should be measured: progress and challenges in compressive sensing [J]. *IEEE Signal Processing Letters*,2012,19(12): 887 – 893.
- [26] Chen Y, Ranftl R, Pock T. Insights into analysis operator learning: from patch-based sparse models to higher order MRFs[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*,2014,23(3): 1060 – 1072.
- [27] Teh Y W, Welling M, Osindero S, et al. Energy based models for sparse overcomplete representations[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2003, 4(12): 1235 – 1260.
- [28] Chen Y, Feng W, Ranftl R, et al. A higher-order MRF based variational model for multiplicative noise reduction [J]. *IEEE Signal Processing Letters*,2014,21(11): 1370 – 1374.
- [29] Boyd S, Parikh N, Chu E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating method of multipliers[J]. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 2010,3(1): 1 – 122.
- [30] Ochs P, Chen Y, Brox T, Pock T. Ipiano: inertial proximal algorithm for nonconvex optimization[J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2014, 7(2): 1388 – 1419.
- [31] Zavriev S K, Kostyuk F V. Heavy-ball method in nonconvex optimization problems[J]. *Computational Mathematics and Modeling*,1993,4(4): 336 – 341.
- [32] Ikeda S, Kono H. Phase retrieval from single biomolecule diffraction pattern[J]. *Optics Express*,2012,20(4): 3375 – 3387.

作者简介



练秋生 男,1969年8月出生于江西遂川,现为燕山大学信息科学与工程学院教授,博士生导师,主要研究方向为图像处理,稀疏表示,压缩感知及相位恢复等.

E-mail: lianqs@ysu.edu.cn



宋爽 女,1992年5月出生于河北保定,现为燕山大学信息科学与工程学院硕士研究生,主要研究方向为非线性压缩感知,相位恢复.

E-mail: 526396994@qq.com



陈书贞 女,1968年11月出生于河北定州,现为燕山大学信息科学与工程学院副教授,主要研究方向为图像处理,压缩感知及生物识别等.

E-mail: chensz@ysu.edu.cn



石保顺 男,1989年2月出生于河北唐山,现为燕山大学信息科学与工程学院博士研究生,主要研究方向为盲压缩感知,字典学习及相位恢复.

E-mail: shibaoshun@stumail.ysu.edu.cn