

利用非线性约束整数 最小二乘快速求解整周模糊度

田增山,李小飞,杨进超

(重庆邮电大学移动通信技术重点实验室,重庆 400065)

摘 要: 整周模糊度的解算是高精度北斗姿态测量的核心问题,本文提出一种利用二次特征值求解非线性约束的最小二乘问题,用于整周模糊度快速求解,并将其应用在单频单历元的北斗姿态测量系统中. 该方法将基线长度的先验信息与整周模糊度目标函数整合,构造新的目标函数,提高姿态测量中整周模糊度求解准确度. 实验在北斗姿态测量平台上验证该方法的有效性,测试结果表明该方法在北斗单频单历元下,整周模糊度及姿态角求解的成功率有较大提升.

关键词: 北斗; 姿态测量; 整周模糊度; 非线性约束

中图分类号: P228 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)04-0863-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.04.014

Fast Integer Ambiguity Resolution Using Nonlinear Constrained Integer Least Squares

TIAN Zeng-shan, LI Xiao-fei, YANG Jin-chao

(Chongqing Key Lab of Mobile Communication Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: The integer ambiguity resolution is the key to precise attitude determination. In case of single frequency single epoch, this paper presents a fast integer ambiguity resolution method based on nonlinear constrained integer least-squares solved with the quadratic eigenvalue problem, and applies it to BDS attitude determination system. The method will integrate the baseline length called the priori information into objective function, and construct new objective function to improve the accuracy of integer ambiguity solution. The effectiveness of the proposed method is verified by experiments on the BDS attitude determination platform. The results show that, in the single frequency single epoch BDS attitude determination, the method has highly improved the success rate of integer ambiguity and attitude determination resolution.

Key words: BDS; attitude determination; integer ambiguity; nonlinear constrained

1 引言

随着卫星导航技术的不断发展,技术应用也朝向成熟阶段进步,利用卫星导航技术进行高可靠性、高有效性、高精度的姿态测量成为一种高效益低成本的手段. 同时我国的北斗系统也在不断的完善,对基于北斗系统的高精度、高稳定性、低成本姿态测量产品的技术研发刻不容缓^[1,2].

目前整周模糊度求解算法中, LAMBDA 算法是用于姿态测量最有效的算法之一^[3]. 但是它在搜索过程中会有弃真取伪现象存在,导致求得的姿态角有跳变

的情况. 近年来,为提高姿态测量系统的精度,将基线长度作为约束条件和先验信息来提高浮点解的精度^[4], 或将其用于 LAMBDA 算法搜索部分, 筛选待选解^[5].

因此, 本文将以北斗系统为背景, 研究基于北斗的具有较高精度与实时性的姿态测量算法. 该算法利用基线长度作为约束条件, 采用二次特征值法求解约束浮点解, 并将该求解方法用于整周模糊度的搜索中, 提升求解成功率. 实验结果表明单频单历元条件下能有效提升姿态角求解成功率.

2 约束的北斗测姿模型

假设基线长度的值是已知的,即 $\|b\|_l = l$ (l 是已知的常数). 约束北斗观测模型最小二乘形式为:

$$\min_{a \in Z^3, b \in R^3, \|b\|_l=l} \|y - Aa - Bb\|_{Q_0}^2 \quad (1)$$

对式(1)正交分解后等价于:

$$\begin{aligned} &\min_{a \in Z^3, b \in R^3, \|b\|_l=l} \|y - Aa - Bb\|_{Q_0}^2 = \\ &= \|\hat{e}\|_{Q_0}^2 + \min_{a \in Z^3} (\|\hat{a} - a\|_{Q_0}^2 + \min_{b \in R^3, \|b\|_l=l} \|\hat{b}(a) - b\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2) \end{aligned} \quad (2)$$

因此,方程(2)的解则是使得上式中右边两项的和最小. 由于基线长度的约束的存在,对任意的 a ,式中的第三项不再等于 0. 令:

$$\bar{b}(a) = \operatorname{argmin}_{b \in R^3, \|b\|_l=l} \|\hat{b}(a) - b\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \quad (3)$$

则约束的整数最小二乘的解表示为:

$$\bar{a} = \operatorname{argmin}_{a \in Z^3} (\|\hat{a} - a\|_{Q_0}^2 + \|\hat{b}(a) - \bar{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2) \quad (4)$$

$$\bar{b} = \bar{b}(\bar{a})$$

根据拉格朗日乘子法可得方程(3)描述的约束最小二乘的解 b 为:

$$(Q_{\hat{b}(a)}^{-1} - \lambda I_3)b = Q_{\hat{b}(a)}^{-1}\hat{b}(a) \quad (5)$$

3 约束最小二乘求解及应用

3.1 二次特征值

给定 M, C 和 K 为 $n \times n$ 复矩阵,二次特征值问题可以描述为:求标量 λ 和非零向量 u, v 满足方程 $Q(\lambda)u = 0, v^T Q(\lambda) = 0^T$. $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$ 称为二次束,满足上述方程的标量 λ 称为特征值,非零向量 u 和 v 分别称为与特征值相对应的右和左特征向量^[6].

二次特征值问题的求解方法有分解法和线性化法. 分解法是将二次特征值问题分解为两个一次特征值问题,但是在求解过程中会出现求解两个方程根的问题. 将非线性方程线性化是非线性方程的求解思路,因此本文采用线性化的方法,避免了方程求根的问题. 线性化法首先需要构造矩阵束,主要有两种方法:

第一友型:

$$A = \begin{bmatrix} C & K \\ -N & O \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} M & O \\ O & N \end{bmatrix} \quad (6)$$

第二友型:

$$A = \begin{bmatrix} O & K \\ -N & O \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} M & C \\ O & N \end{bmatrix} \quad (7)$$

矩阵 N 满足非奇异的条件,通常选为单位阵. 用线性化法求解二次特征值问题的具体过程如下:

Step1: 利用线性化公式构造矩阵束 (A, B) .

Step2: 对矩阵 A 和 B 进行 Schur 分解:

$$T = Q^T A Z, S = Q^T B Z \quad (8)$$

式中, T 和 S 是上三角矩阵(对角元素分别为 t_{kk} 和 s_{kk}), 而 Q 和 Z 分别为酉矩阵.

Step3: 计算二次特征值及其对应的特征向量:

for $k = 1 : 2n$

$$\lambda_k = t_{kk} / s_{kk}$$

求解 $(T - \lambda_k S)\varphi = 0$, 并令 $\xi = Z\varphi$

$$\xi_1 = \xi(1:n); \xi_2 = \xi(n+1:2n)$$

$$r_1 = P(\lambda_k)\xi_1 / \|\xi_1\|; r_2 = P(\lambda_k)\xi_2 / \|\xi_2\|$$

$$u_k = \begin{cases} \xi(1:n), & \text{若 } \|r_1\| \leq \|r_2\| \\ \xi(n+1:2n), & \text{其他} \end{cases}$$

Endfor

采用线性化法求解非线性二次特征值问题,避免了解方程中的多次迭代问题,这非常适用于约束的北斗测姿模型问题.

3.2 约束浮点解

通过拉格朗日乘子法可以将方程(3)化简成二次特征值的形式为:

$$[\lambda^2 I + 2\lambda Q_{\hat{b}(a)}^{-1} + (Q_{\hat{b}(a)}^{-2} - l^{-2} L L^T)]y = 0 \quad (9)$$

其中, $L = \hat{b}(a) Q_{\hat{b}(a)}^{-1}, (Q_{\hat{b}(a)}^{-1} - \lambda I)y = b$

这是一个二次特征值的问题,通过 2.1 节的方法得到 λ 值,即可得到方程(5)解.

假设问题(2)的约束浮点解为 \hat{a}_l 和 \hat{b}_l , 则

$$\hat{b}_l = \operatorname{argmin}_{b \in R^3, \|b\|_l=l} \|\hat{b} - b\|_{Q_0}^{-1} \quad (10)$$

$$\hat{a}_l = \hat{a}(\hat{b}_l) = \hat{a} - Q_{\hat{b}_l}^{-1}(\hat{b} - \hat{b}_l)$$

显然,通过约束的最小二乘求解得到约束的基线向量浮点解 \hat{b}_l , 约束的整周模糊度浮点解基于 \hat{b}_l 的残差.

4 整周模糊度搜索

将基线长度作为先验信息加入模糊度搜索过程是目前常用的方法,如文献[4]提出的在满足基线长度误差的条件下旋转整周模糊度残差最小的方法;文献[5]提出了“遍历法”选择使得基线残差最小候选解的方法,等等. 本文选择边界搜索法,根据搜索空间的边界确定搜索范围.

本文提出一种转换搜索空间的思想,可以避免多次计算 $\bar{b}(a)$ 的情况^[8].

令 λ_{\min} 和 λ_{\max} 分别为 $Q_{\hat{b}(a)}^{-1}$ 最小和最大特征值,则可以得到如下三个空间的关系:

$$\begin{aligned} F_1(a) &\leq F(a) \leq F_2(a) \\ \Psi_2(\chi^2) &\leq \Psi(\chi^2) \leq \Psi_1(\chi^2) \end{aligned} \quad (11)$$

其中:

$$F_1(a) = \|\hat{a} - a\|_{Q_0}^2 + \lambda_{\min} (\|\hat{b}(a)\| - l)^2$$

$$F(a) = \|\hat{a} - a\|_{Q_0}^2 + \|\hat{b}(a) - \bar{b}(a)\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 \quad (12)$$

$$F_2(a) = \|\hat{a} - a\|_{Q_0}^2 + \|\hat{b}\|_{Q_{\hat{b}(a)}}^2 (\|\hat{b}(a)\| - l)^2 / \|\hat{b}\|_{Q_0}^2$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(\chi^2) &= \{a \in Z^n \mid F_1(a) \leq \chi^2\} \\ \Psi(\chi^2) &= \{a \in Z^n \mid F(a) \leq \chi^2\} \\ \Psi_2(\chi^2) &= \{a \in Z^n \mid F_2(a) \leq \chi^2\} \end{aligned} \quad (13)$$

根据式(12)和(13)给出的边界条件,通过边界搜索算法即可得到整数向量^[9],具体过程如下:

1. 采用 bootstrapped 算法^[9] 设定空间初值 χ_0^2 ,并在空间 $\Psi_0(\chi_0^2)$ 中找到所有的整数向量集合 S_1 .
2. 用无约束 MLAMBDA^[8] 在向量集合 S_1 中找出在空间 $\Psi_1(\chi_0^2)$ 中的所有整数向量 S_2 .
3. 若 $\Psi_1(\chi_0^2)$ 为空,空间值 χ_0^2 需增加至 χ_1^2 返回步骤 1;若 $\Psi_1(\chi_0^2)$ 非空,则在 S_2 中选择满足 $\Psi(\chi_0^2)$ 的整数向量的集合 S_3 ,若 $S_3 = \emptyset$,则增加空间值,直到 $S_3 \neq \emptyset$.
4. 在 S_3 中,找出使 $F(a)$ 取得最小值的整数向量.

5 实验结果

为验证上述改进方法在单频单历元情况下北斗姿态测量算法中的应用,基线长度约 1.1m,采集动态和静态条件下北斗原始观测数据进行仿真分析.

5.1 静态测试结果

为比较算法的差异性,本文采用 i3-4130 处理器,主频 3.40GHz,内存 4.00GB 的 64 位 win7 系统下的 matlab2010 对北斗静态数据仿真结果统计.表 1 给出了无约束 MLAMBDA 算法(法 1)、遍历法(法 2)、约束浮点解法(法 3)和约束 MLAMBDA 算法(法 4)在静态测试条件下算法的成功率及解算时间的对比结果,如表 1 所示.从表 1 可知,本文采用的方法 4 单频单历元条件下

解算姿态角的成功率,平均用时(/历元)都有较大的优势.

表 1 几种算法性能比较

序号	分类	历元数	方法 1(%)	方法 2(%)	方法 3(%)	方法 4(%)
1		2862	47.5/27.1	58.2/55.8	78.9/60.8	93.6/76.7
2		871	45.2/47.6	67.1/60.2	67.1/61.2	97.7/97
3		2075	62.1/32.8	63.3/56.9	86.1/48.7	98.8/59.3
4		2896	15.1/10.2	20.1/16.3	53.2/48.7	95.8/86.2
平均时间/历元(s)			0.0411	1.7321	0.0767	0.0372

图 1 给出了第 4 组数据静态测试下仿真结果,如图 1(a),(b),(c),(d),(e)所示,分别给出了接收机输出的姿态角及上述 4 中方法的姿态角仿真结果.

由图 1(a)可知,静态情况下,接收机输出的姿态角没有准确值,且随时间在漂移.无约束情况下,姿态角求解有正确值,但是成功率低,波动大(标准差:航向角 12.35,俯仰角 35.99).这是因为浮点解的精度和伪距的精度一致,导致 MLAMBDA 算法“弃真取伪”现象.增加基线约束后,遍历法和约束浮点解法求解的姿态角的成功率有所提升,如图(c),(d)所示,但是效果不明显.这是由于遍历法是根据基线长度的值在浮点解“附近”限定模糊度的搜索空间,而浮点解是精度较低的伪距的精度.

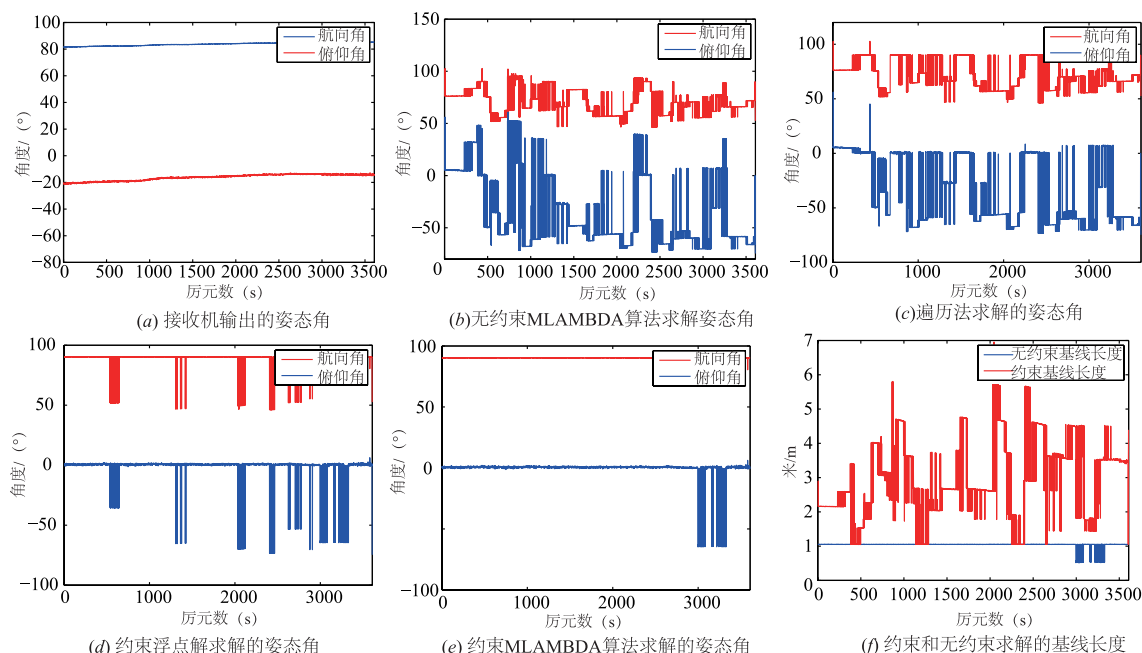


图 1 静态仿真结果

相比较之下,图(d)中的约束浮点解法对姿态角求解的成功率有所提升,但是由于该方法的判定准则只是可以接受的基线误差的范围内选择模糊度残差最小的整数向量,这仍然不能保证式(2)中后两项的和最小。

图1(e)给出了采用约束浮点解后用缩小搜索空间法求解的姿态角结果,采用约束浮点解可以提高浮点解的精度,加上缩小搜索空间的方法,可以保证快速搜索到正确的模糊度向量;由于该方法的判断条件是使得式中的后两项的和最小,因此该方法对姿态角求解的波动性有很大改善(标准差:航向角3.81,俯仰角11.89)。

图1(f)给出了第1、4两种方法下输出的基线长度值。从图中可以看出,在约束浮点解的基础上采用约束的MLAMBDA算法后,模糊度求解正确时的基线长度平均值为1.11m,与实际测量值相差0.01m。图1(e)中,在3000历元以后,约束的MLAMBDA算法求解的姿态角仍有跳变,这是由于观测模型中观测量误差模型的不准确,应该根据每颗卫星与接收机信噪比、仰角等

信息构造自适应的加权误差模型,得到更加准确的姿态角。

5.2 动态测试结果

考虑到自制转台本身的稳定性,过快或过慢都会引起较大的系统误差,实验中设定的转速约为50s/周。以转台连续旋转两周为例,对动态数据进行仿真。

姿态角如图2(a),(b)所示,直线部分为转台静止时数据。转台开始旋转后,从静止时的开始线性变化(转到360度后下一时刻值就是0度),连续旋转两周后到达起始位置并停止。由于接收机是每历元输出一组数据,因此当出现角度翻转(360度到0度)时,采样时的姿态可能不在0度,但是在0度附近。

从图2(a)中可以看出,无约束情况下姿态角均存在不稳定的情况。加入基线约束后,提升了姿态角求解成功率,如图2(b)。与实际测量的基线长度值相比,约束后基线长度值的波动性也很小,如图2(c)所示。

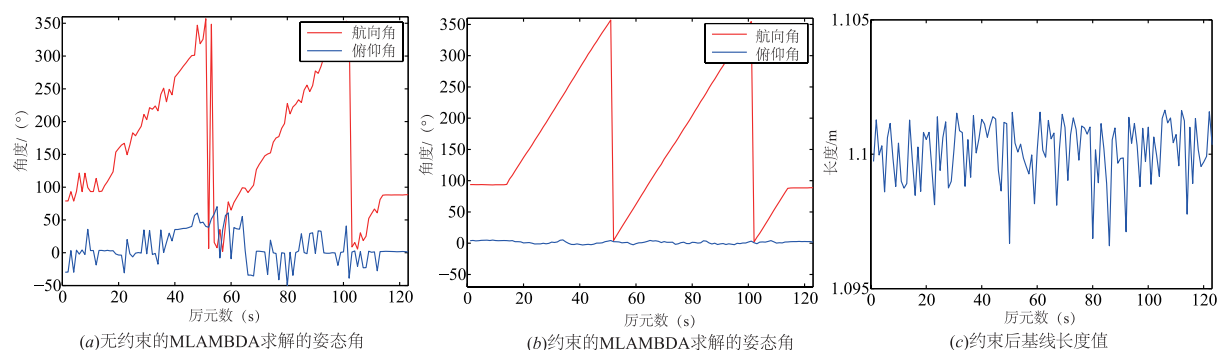


图2 动态仿真结果

6 结束语

针对目前单频单历元情况下北斗姿态测量系统中整周模糊度求解成功率不高的问题,提出了基于非线性约束的方法快速求解整周模糊度。该方法通过增加非线性约束,缩小搜索空间,减少计算量,满足实时性的同时提高姿态求解的成功率。仿真结果表明,单频单历元情况下,增加约束后的整周模糊度求解的成功率及姿态角的精度都有显著提升。

参考文献

- [1] 周巍. 北斗卫星导航系统精密定位理论方法研究与实现[D]. 河南郑州:解放军信息工程大学,2013.
Zhou Wei. Research and realization on theories and methods of precise positioning based on BeiDou navigation satellite system[D]. Zhengzhou, Henan; The PLA Information Engineering University, 2013. (in Chinese)

- [2] 孟骞,刘建业,曾庆化,等. 基于STK的北斗单天线姿态测量仿真实现[A]. 第四届中国卫星导航学术年会论文集-S1 北斗/GNSS 导航应用[C]. 武汉:中国知网,2013. 1-6.
Meng Qian, Liu Jian-ye, Zeng Qing-hua, et al. Attitude Determination with Beidou Single-antenna on STK Platform [A]. The 4th China Satellite Navigation Conference BDS/GNSS BeiDou/GNSS Navigation Applications [C]. Wuhan: CNKI, 2013. 1-6. (in Chinese)
- [3] De Jonge P, Tiberius C. The LAMBDA method for integer ambiguity estimation; implementation aspects [J]. Publications of the Delft Computing Centre, LGR-Series, 1996, 12 (12): 1-47.
- [4] 唐卫明,孙红星,刘经南. 附有基线长度约束的单频数据单历元LAMBDA方法整周模糊度确定[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2005, 30(5): 444-446.
Tang Wei-ming, Sun Hong-xing, Liu Jing-nan. Ambiguity resolution of single epoch single frequency data with base-

- line length constraint using LAMBDA algorithm [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2005, 30(5): 444 - 446. (in Chinese)
- [5] 王振杰, 乔永杰. 附有基线长度约束的模糊度快速解算方法 [J]. 全球定位系统, 2013, 38(2): 19 - 22.
WANG Zhen-jie, QIAO Yong-jie. Fast ambiguity resolution with the baseline length constraint [J]. GNSS World of China, 2013, 38(2): 19 - 22. (in Chinese)
- [6] 张贤达. 矩阵分析与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. 548 - 561.
- [7] Teunissen P. The LAMBDA method for the GNSS compass [J]. Artificial Satellites, 2006, 41(3): 89 - 103.
- [8] Chang X W, Yang X, Zhou T. MLAMBDA: a modified LAMBDA method for integer least-squares estimation [J]. Journal of Geodesy, 2005, 79(9): 552 - 565.
- [9] P J G Teunissen. The success rate and precision of GPS ambiguities [J]. Journal of Geodesy, 2000, 74(3-4): 321 - 326.

作者简介



田增山 男, 1968 年生, 河南人, 博士、教授, 于 1999 年获得电子科技大学博士学位. 研究方向为北斗姿态测量、个人通信、卫星导航、无线定位、信号检测与估计.



李小飞 女, 1989 年生, 河南人, 硕士研究生. 研究方向为无线定位、惯性导航.
E-mail: lxhx1024@163.com